Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Codici bifissi ed insiemi Sturmiani

Francesco Dolce

26 Marzo 2012

Outline

1. Parole e insiemi di parole
2. Codici
3. Codici bifissi in insiemi Sturmiani
   - Teorema della Cardinalità
   - Teorema della Periodicità
   - Teorema della Base Sturmiana

Bifix codes and Sturmian words di J. Berstel, C. De Felice, D. Perrin, C. Reutenauer, G. Rindone (2010, da uscire su *Journal of Algebra*).

Parole

Sia A un insieme finito detto *alfabeto*. Il semigruppo libero A^+ sarà detto *semigruppo delle parole*. Il monoide libero A^*, con elemento neutro la *parola vuota* 1 sarà detto *monoide delle parole*. L'insieme delle parole infinite (a destra) sarà denotato A^ω. L'insieme delle parole di lunghezza n sarà denotato A^n.

Parole

Sia A un insieme finito detto *alfabeto*. Il semigruppo libero A^+ sarà detto *semigruppo delle parole*. Il monoide libero A^*, con elemento neutro la *parola vuota* 1 sarà detto *monoide delle parole*. L'insieme delle parole infinite (a destra) sarà denotato A^ω. L'insieme delle parole di lunghezza n sarà denotato A^n.

$$\text{Una parola } w \text{ sarà un } \begin{array}{c} \textit{prefisso} \\ \textit{suffisso} \\ \textit{fattore} \end{array} \text{ di una parola } u \text{ se } \begin{array}{rl} u = & wv \\ u = & vw \\ u = & vwv' \end{array}$$

per qualche $u, v \in A^*$.
w sarà un *prefisso interno* di u se $u = wv$ con $v \in A^+$.

Parole

Sia A un insieme finito detto *alfabeto*. Il semigruppo libero A^+ sarà detto *semigruppo delle parole*. Il monoide libero A^*, con elemento neutro la *parola vuota* 1 sarà detto *monoide delle parole*. L'insieme delle parole infinite (a destra) sarà denotato A^ω. L'insieme delle parole di lunghezza n sarà denotato A^n.

Una parola w sarà un $\begin{array}{c} \textit{prefisso} \\ \textit{suffisso} \\ \textit{fattore} \end{array}$ di una parola u se $\begin{array}{rl} u = & wv \\ u = & vw \\ u = & vwv' \end{array}$

per qualche $u, v \in A^*$.

w sarà un *prefisso interno* di u se $u = wv$ con $v \in A^+$.

Il *rovescio* di $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ è la parola $\widetilde{w} = a_n a_{n-1} \cdots a_1$.

Insiemi fattoriali

Un insieme non vuoto $F \subseteq A^*$ è detto *chiuso per prefissi* se contiene i prefissi di tutti i suoi elementi.
Un insieme non vuoto $F \subseteq A^*$ è detto *fattoriale* (o *chiuso per fattori*) se contiene i fattori di tutti i suoi elementi.

Esempio

Data una parola $x \in A^\omega$, il suo insieme dei fattori $F(x)$ è un insieme fattoriale.

Insiemi fattoriali

Un insieme non vuoto $F \subseteq A^*$ è detto *chiuso per prefissi* se contiene i prefissi di tutti i suoi elementi.
Un insieme non vuoto $F \subseteq A^*$ è detto *fattoriale* (o *chiuso per fattori*) se contiene i fattori di tutti i suoi elementi.

Esempio

Data una parola $x \in A^\omega$, il suo insieme dei fattori $F(x)$ è un insieme fattoriale.

Un insieme non vuoto $F \subseteq A^*$ è detto *chiuso per rovescio* se contiene i rovesci di tutti i suoi elementi.

Insiemi essenzialmente destri

Dato un insieme $F \subset A^*$ l'*ordine destro* di una parola $u \in F$ è il numero di lettere $a \in A$ tali che $ua \in F$. F è detto *essenzialmente destro* se è chiuso per prefissi ed ogni parola u in F ha ordine destro positivo.

Osservazione

Se F è essenzialmente destro, allora per ogni $u \in F$ ed $n \geq 1$ esisterà una parola $v \in F \cap A^n$ tale che $uv \in F$.

Insiemi essenzialmente destri

Dato un insieme $F \subset A^*$ l'*ordine destro* di una parola $u \in F$ è il numero di lettere $a \in A$ tali che $ua \in F$. F è detto *essenzialmente destro* se è chiuso per prefissi ed ogni parola u in F ha ordine destro positivo.

Osservazione

Se F è essenzialmente destro, allora per ogni $u \in F$ ed $n \geq 1$ esisterà una parola $v \in F \cap A^n$ tale che $uv \in F$.

Esempio

$F(x)$ è essenzialmente destro per ogni $x \in A^\omega$.

Insiemi essenzialmente destri

Dato un insieme $F \subset A^*$ l'*ordine destro* di una parola $u \in F$ è il numero di lettere $a \in A$ tali che $ua \in F$. F è detto *essenzialmente destro* se è chiuso per prefissi ed ogni parola u in F ha ordine destro positivo.

Osservazione

Se F è essenzialmente destro, allora per ogni $u \in F$ ed $n \geq 1$ esisterà una parola $v \in F \cap A^n$ tale che $uv \in F$.

Esempio

$F(x)$ è essenzialmente destro per ogni $x \in A^\omega$.

Una parola u è *speciale a destra* se ha ordine destro maggiore o uguale a 2; u è *stretta* se $uA \subseteq F$.

Insiemi ricorrenti

Un insieme F è detto *ricorrente* se è fattoriale e per ogni $u, v \in F$ esiste una parola $w \in F$ tale che $uwv \in F$.

Osservazione

Un insieme ricorrente è essenzialmente destro ed essenzialmente sinistro.

Insiemi ricorrenti

Un insieme F è detto *ricorrente* se è fattoriale e per ogni $u, v \in F$ esiste una parola $w \in F$ tale che $uwv \in F$.

Osservazione

Un insieme ricorrente è essenzialmente destro ed essenzialmente sinistro.

Esempio

Siano $A = \{a, b\}$ ed F l'insieme delle parole in A che non presentino come fattore bb. Dunque $F = A^* \setminus (A^*bbA^*)$. Tale insieme è ricorrente poiché, dati $u, v \in F$, sicuramente anche $uav \in F$.

Insiemi uniformemente ricorrenti

Un insieme F è detto *uniformemente ricorrente* se è fattoriale, essenzialmente destro e per ogni $u \in F$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che u è fattore di ogni parola in $F \cap A^n$.

Insiemi uniformemente ricorrenti

Un insieme F è detto *uniformemente ricorrente* se è fattoriale, essenzialmente destro e per ogni $u \in F$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che u è fattore di ogni parola in $F \cap A^n$.

Proposizione

Un insieme uniformemente ricorrente è ricorrente.

Insiemi uniformemente ricorrenti

Un insieme F è detto *uniformemente ricorrente* se è fattoriale, essenzialmente destro e per ogni $u \in F$ esiste un intero $n \geq 1$ tale che u è fattore di ogni parola in $F \cap A^n$.

Proposizione

Un insieme uniformemente ricorrente è ricorrente.

Il viceversa non vale.

Esempio

$A^* \setminus (A^* bbA^*)$ è ricorrente ma non uniformemente ricorrente in quanto $b \in F$ non è fattore di a^n per ogni $n \geq 1$.

Parole ricorrenti

Una parola infinita $x \in A^\omega$ è detta *ricorrente* se ogni suo fattore ha un numero infinito di occorrenze, ovvero se per ogni $u \in F(x)$ esiste una parola $v \in F(x)$ tale che $uvu \in F(x)$.

Proposizione

Gli insiemi ricorrenti sono tutti e soli della forma $F(x)$ per un'opportuna parola infinita x ricorrente.

Parole uniformemente ricorrenti

Una parola infinita $x \in A^\omega$ è detta *uniformemente ricorrente* se il suo insieme dei fattori $\in F(x)$ è uniformemente ricorrente.

Osservazione

Una parola uniformemente ricorrente è ricorrente.

Parole uniformemente ricorrenti

Una parola infinita $x \in A^\omega$ è detta *uniformemente ricorrente* se il suo insieme dei fattori $\in F(x)$ è uniformemente ricorrente.

Osservazione

Una parola uniformemente ricorrente è ricorrente.

Il viceversa non vale.

Esempio

La *parola di Champernowne* x ottenuta concatenando tutte le parole in $\{a, b\}$ seguendo l'ordine militare, ovvero

$$x = a\ b\ aa\ ab\ ba\ bb\ aaa\ aab\ aba\ abb\ baa\ bab\ bba\ bbb \cdots$$

è ricorrente ma non uniformemente ricorrente in quanto due occorrenze della lettera b compaiono a distanza arbitraria.

Parole Sturmiane

Una *parola Sturmiana* è una parola infinita $x \in A^\omega$ su un alfabeto binario A tale che $F(x) \cap A^n = n + 1$ per ogni $n \geq 1$.

Parole Sturmiane

Una *parola Sturmiana* è una parola infinita $x \in A^\omega$ su un alfabeto binario A tale che $F(x) \cap A^n = n + 1$ per ogni $n \geq 1$.

Esempio

La *parola di Fibonacci* f, ottenuta come $\lim_{n\to\infty} f_n$ con $f_0 = b$, $f_1 = a$ e $f_{n+2} = f_{n+1} f_n$, ovvero

$$f = abaababaabaababaababaabaababaabaab\cdots$$

è una parola Sturmiana.

Parole episturmiane

Una parola infinita $x \in A^{\omega}$ è detta *parola episturmiana* se il suo insieme dei fattori $F(x)$ è chiuso per rovescio e se per ogni $n \geq 1$ esiste al più una parola $u \in F(x) \cap A^n$ speciale a destra.

Una parola è *episturmiana stretta* se è episturmiana ed ha esattamente un fattore speciale a destra per ogni lunghezza e questo è stretto.

Parole episturmiane

Una parola infinita $x \in A^{\omega}$ è detta *parola episturmiana* se il suo insieme dei fattori $F(x)$ è chiuso per rovescio e se per ogni $n \geq 1$ esiste al più una parola $u \in F(x) \cap A^{n}$ speciale a destra.

Una parola è *episturmiana stretta* se è episturmiana ed ha esattamente un fattore speciale a destra per ogni lunghezza e questo è stretto.

Osservazione

Per ogni parola episturmiana stretta x su un alfabeto A di k lettere si ha $Card\, F(x) \cap A^{n} = (k-1)n + 1$ per ogni n.

Insiemi Sturmiani

Un insieme F è *Sturmiano* se è l'insieme dei fattori di una parola episturmiana stretta.

Insiemi Sturmiani

Un insieme F è *Sturmiano* se è l'insieme dei fattori di una parola episturmiana stretta.

Equivalentemente

Proposizione

F è Sturmiano $\iff$
(i) F è uniformemente ricorrente;
(ii) F è chiuso per rovescio;
(iii) $\forall\, n \geq 0\ \exists !\ u \in F \cap A^n$ speciale a destra e questa è stretta.

Insiemi Sturmiani

Un insieme F è *Sturmiano* se è l'insieme dei fattori di una parola episturmiana stretta.

Equivalentemente

Proposizione

F è Sturmiano $\iff$
- (i) F è uniformemente ricorrente;
- (ii) F è chiuso per rovescio;
- (iii) $\forall\, n \geq 0\ \exists!\ u \in F \cap A^n$ speciale a destra e questa è stretta.

Osservazione

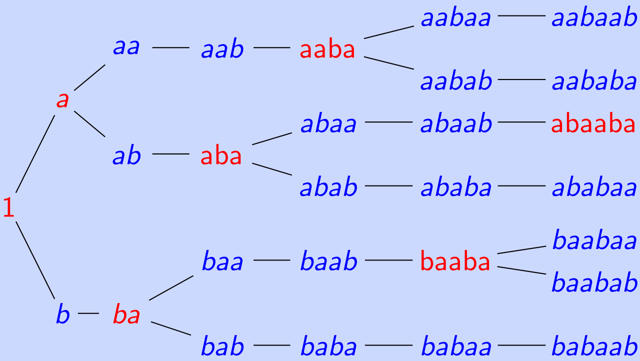
$\{$Insiemi fattoriali$\} \supset \{$Insiemi ricorrenti$\} \supset \{$Insiemi uniformemente ricorrenti$\} \supset \{$Insiemi Sturmiani$\}$.

Insiemi Sturmiani

Insieme di Fibonacci

Esempio

$$f = abaababaabaababaababaabaababaabaab\cdots$$



Codici

Un insieme $X \subseteq A^*$ è detto *codice* se per ogni $n, m \geq 0$, e $x_i, y_j \in X$ si ha

$$x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m \quad \Longrightarrow \quad n = m \text{ e } x_i = y_i.$$

Codici

Un insieme $X \subseteq A^*$ è detto *codice* se per ogni $n, m \geq 0$, e $x_i, y_j \in X$ si ha

$$x_1 x_2 \cdots x_n = y_1 y_2 \cdots y_m \quad \Longrightarrow \quad n = m \text{ e } x_i = y_i.$$

$X \subseteq A^*$ è un *codice prefisso* se tutti i suoi elementi sono incomparabili per prefisso.

Esempio

L'insieme $X = \{b, ab\}$ è un codice prefisso.

$X \subseteq A^*$ è un *codice bifisso* se è sia prefisso che suffisso.

Esempio

L'insieme $X = \{a, bab\}$ è un codice bifisso.

Insiemi F-thin

Sia $F \subseteq A^*$. Un insieme $X \subseteq F$ è detto F-*thin* se esiste una parola in F che non è fattore di alcuna parola di X.

Insiemi F-thin

Sia $F \subseteq A^*$. Un insieme $X \subseteq F$ è detto F-*thin* se esiste una parola in F che non è fattore di alcuna parola di X.

Se F è un insieme fattoriale, l'*insieme dei fattori interni* di X sarà

$$H(X) = A^{-}XA^{-} = \left\{ w \in A^* \mid A^{+}wA^{+} \cap X \neq \emptyset \right\}.$$

Insiemi F-thin

Sia $F \subseteq A^*$. Un insieme $X \subseteq F$ è detto *F-thin* se esiste una parola in F che non è fattore di alcuna parola di X.

Se F è un insieme fattoriale, l'*insieme dei fattori interni* di X sarà

$$H(X) = A^- X A^- = \{w \in A^* \mid A^+ w A^+ \cap X \neq \emptyset\}.$$

Proposizione

Sia $F \subseteq A^*$ un insieme fattoriale essenzialmente destro ed essenzialmente sinistro. Un insieme $X \subseteq F$ è F-thin se e solo se $F \setminus H(x) \neq \emptyset$.

Codici F-massimali

Un codice prefisso (bifisso) $X \subseteq F$ sarà detto *F-massimale prefisso* (*bifisso*) se non è contenuto propriamente in alcun codice prefisso (bifisso) $Y \subseteq F$.

Proposizione

Siano F un insieme ricorrente ed $X \subseteq F$ un insieme F-thin. Sono equivalenti:

(i) X è un codice F-massimale bifisso;

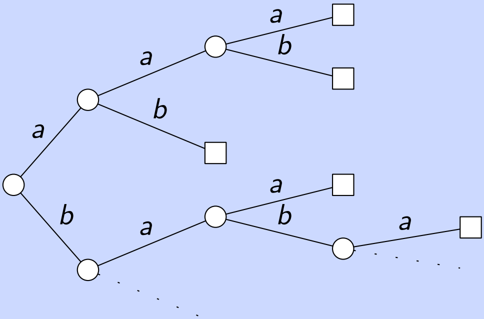
(ii) X è un codice F-massimale prefisso ed F-massimale suffisso.

Codici F-massimali bifissi

Esempio

Esempio

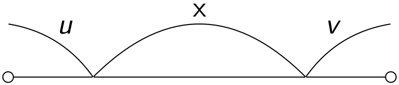
Sia $F = A^* \setminus (A^*bbA^*)$. L'insieme $X = \{aaa, aab, ab, baa, baba\}$ è un codice F-massimale bifisso.



Parse

Un *parse* di una parola w rispetto ad un insieme X è una tripla (u, x, v) tale che $w = uxv$ con

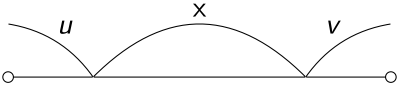
$$u \in A^* \setminus (A^*X), \quad x \in X^*, \quad v \in A^* \setminus (XA^*).$$



Parse

Un *parse* di una parola w rispetto ad un insieme X è una tripla (u, x, v) tale che $w = uxv$ con

$$u \in A^* \setminus (A^*X), \quad x \in X^*, \quad v \in A^* \setminus (XA^*).$$



L'*indicatore* di un insieme X è la funzione δ_X che associa ad ogni parola il suo numero di parse rispetto ad X.

Esempio

- Sia $X = \{a, bab\}$. Allora $\delta_X(bab) = 2$ (precisamente $(1, bab, 1)$ e (b, a, b)).
- Sia $X = A^*$. Allora $\delta_X(w) = 1$ per ogni $w \in A^*$.
- Sia $X = \emptyset$. Allora $\delta_X(w) = |w| + 1$ per ogni $w \in A^*$.

Parse e codici bifissi

Proposizione

Siano F un insieme fattoriale, $X \subseteq F$ un codice prefisso e w una parola. $\delta_X(w)$ è pari al numero di prefissi di w privi di suffissi in X.

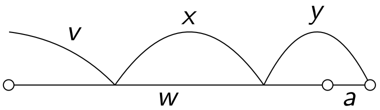
Parse e codici bifissi

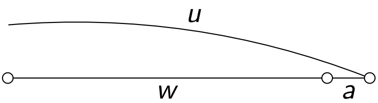
Proposizione

Siano F un insieme fattoriale, $X \subseteq F$ un codice prefisso e w una parola. $\delta_X(w)$ è pari al numero di prefissi di w privi di suffissi in X.

Dunque per ogni parola w ed ogni lettera a si ha

$$\delta_X(wa) = \begin{cases} \delta_X(w) & \text{se } wa \in A^*X \\ \delta_X(w) + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$





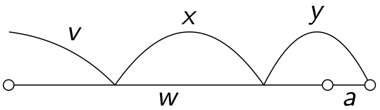
Parse e codici bifissi

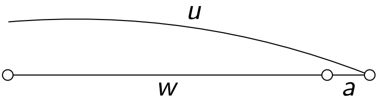
Proposizione

Siano F un insieme fattoriale, $X \subseteq F$ un codice prefisso e w una parola. $\delta_X(w)$ è pari al numero di prefissi di w privi di suffissi in X.

Dunque per ogni parola w ed ogni lettera a si ha

$$\delta_X(wa) = \begin{cases} \delta_X(w) & \text{se } wa \in A^*X \\ \delta_X(w) + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$





Osservazione

Nel caso di codici bifissi, la funzione δ_X determina X.

Grado

Sia $F \subseteq A^*$ un insieme fattoriale. L'F-*grado* di un insieme X è il numero massimo di parse rispetto ad X di parole di F

$$d_F(X) = \max_{w \in F}\{\delta_X(w)\}.$$

Grado

Sia $F \subseteq A^*$ un insieme fattoriale. L'F-*grado* di un insieme X è il numero massimo di parse rispetto ad X di parole di F

$$d_F(X) = \max_{w \in F}\{\delta_X(w)\}.$$

Teorema

Siano F un insieme ricorrente ed $X \subseteq F$ un codice bifisso. X è F-thin ed F-massimale bifisso se e solo se $d_F(X) < \infty$. In tal caso

$$H(X) = \{w \in F \mid \delta_X(w) < d_F(X)\}.$$

Grado

Sia $F \subseteq A^*$ un insieme fattoriale. L'F-*grado* di un insieme X è il numero massimo di parse rispetto ad X di parole di F

$$d_F(X) = \max_{w \in F}\{\delta_X(w)\}.$$

Teorema

Siano F un insieme ricorrente ed $X \subseteq F$ un codice bifisso. X è F-thin ed F-massimale bifisso se e solo se $d_F(X) < \infty$. In tal caso

$$H(X) = \{w \in F \mid \delta_X(w) < d_F(X)\}.$$

Esempio

Sia $X = \{a, bab\} \subseteq F$, con F insieme di Fibonacci. X è F-thin ed F-massimale bifisso. $d_F(X) = 2$ poiché $bab \notin H(X)$ e $\delta_X(bab) = 2$.

Nucleo

Dato un insieme X il suo *nucleo* $K(X)$ è l'insieme delle parole di X che sono fattori interni di parole di X, ovvero

$$K(X) = X \cap H(X).$$

Teorema

Siano F un insieme ricorrente ed $X \subseteq F$ un codice bifisso di F-grado $d < \infty$. Per ogni $w \in F$ si ha

$$\delta_X(w) = \min\{d, \delta_{K(X)}(w)\}.$$

Nucleo

Dato un insieme X il suo *nucleo* $K(X)$ è l'insieme delle parole di X che sono fattori interni di parole di X, ovvero

$$K(X) = X \cap H(X).$$

Teorema

Siano F un insieme ricorrente ed $X \subseteq F$ un codice bifisso di F-grado $d < \infty$. Per ogni $w \in F$ si ha

$$\delta_X(w) = \min\{d, \delta_{K(X)}(w)\}.$$

Osservazione

Sia F un insieme ricorrente. Un codice bifisso $X \subseteq F$ è determinato dal suo F-grado e dal suo nucleo.

Nucleo di un codice F-massimali bifisso

Lemma

Sia F un insieme ricorrente. Un codice bifisso $Y \subseteq F$ è il nucleo di un codice bifisso di F-grado $d < \infty$ se e solo se:

(i) Y non è un codice F-massimale bifisso;

(ii) $\max\{\delta_Y(w) \mid w \in Y\} \leq d - 1$.

Nucleo di un codice F-massimali bifisso

Lemma

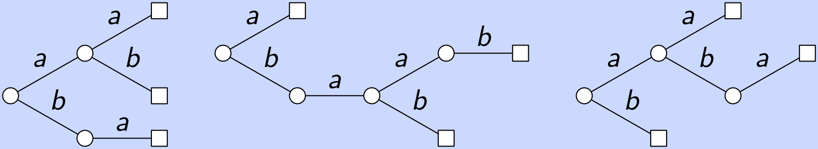
Sia F un insieme ricorrente. Un codice bifisso $Y \subseteq F$ è il nucleo di un codice bifisso di F-grado $d < \infty$ se e solo se:

(i) Y non è un codice F-massimale bifisso;

(ii) $\max\{\delta_Y(w) \,|\, w \in Y\} \leq d - 1$.

Esempio

Sia F l'insieme di Fibonacci. I codici F-massimali bifissi di F-grado 2 sono tre (i possibili nuclei sono $\emptyset$, $\{a\}$ e $\{b\}$).



Codici F-massimali bifissi finiti

Teorema (Schützenberger, 1961)

Siano F un insieme ricorrente e $d \geq 1$. Vi è solo un numero finito di codici F-massimali bifissi finiti di F-grado d.

Codici F-massimali bifissi finiti

Teorema (Schützenberger, 1961)

Siano F un insieme ricorrente e $d \geq 1$. Vi è solo un numero finito di codici F-massimali bifissi finiti di F-grado d.

Per $F = A^*$ e $\mathrm{Card}\,(A) \geq 2$ esistono codici massimali bifissi infiniti per ogni grado fissato.

Teorema

Sia F un insieme uniformemente ricorrente. Ogni codice bifisso F-thin è finito. Inoltre ogni codice bifisso finito è contenuto in un codice F-massimale bifisso finito.

Teorema della Cardinalità

Sia F un insieme Sturmiano su un alfabeto di k lettere. Allora $\text{Card}\,(F \cap A^n) = (k-1)n + 1$.

Teorema (BDPRR, 2010)

Sia $X \subseteq F$ un codice F-massimale bifisso finito. Allora $\text{Card}\,(X) = (k-1)d_F(X) + 1$.

Teorema della Cardinalità

Sia F un insieme Sturmiano su un alfabeto di k lettere. Allora $\mathrm{Card}\,(F \cap A^n) = (k-1)n + 1$.

Teorema (BDPRR, 2010)

Sia $X \subseteq F$ un codice F-massimale bifisso finito. Allora $\mathrm{Card}\,(X) = (k-1)d_F(X) + 1$.

Corollario

Siano x una parola Sturmiana ed X un codice massimale bifisso di grado d. Allora $\mathrm{Card}\,(X \cap F(x)) = d + 1$.

Teorema della Cardinalità

Sia F un insieme Sturmiano su un alfabeto di k lettere. Allora $\mathrm{Card}\,(F \cap A^n) = (k-1)n + 1$.

Teorema (BDPRR, 2010)

Sia $X \subseteq F$ un codice F-massimale bifisso finito. Allora $\mathrm{Card}\,(X) = (k-1)d_F(X) + 1$.

Corollario

Siano x una parola Sturmiana ed X un codice massimale bifisso di grado d. Allora $\mathrm{Card}\,(X \cap F(x)) = d + 1$.

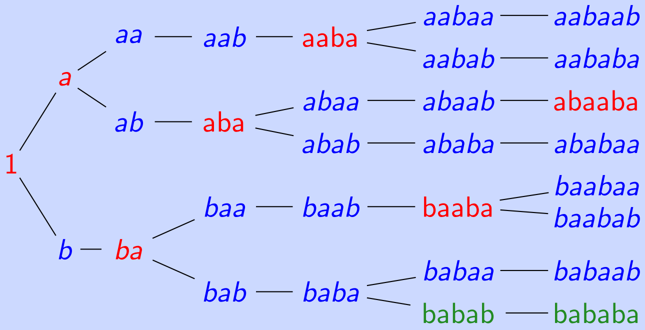
<u>MA</u> esiste una parola x non Sturmiana ed una famiglia $\{X_d\}_{d>0}$ di codici massimali bifissi finiti con $\deg X_d = d$ t.c. $\mathrm{Card}\,(F(x) \cap X_d) = d + 1$.

Teorema della Cardinalità

Controesempio

Esempio

$$x = bab\,f = bab\,abaababaabaababaababaab\cdots$$



Siano $X_d = A^d$ per $d \leq 4$ e X_d codici bifissi finiti t.c. $d_F(X) = d$ e $K(X) = \{baba\}$ per $d \geq 5$.

Teorema della Periodicità

Una parola infinita $x = a_1 a_2 \cdots$ sarà detta *periodica* se esiste un $p \geq 1$ t. c. $a_i = a_{i+p}$ per ogni i. Una parola $w \in A^\omega$ è detta *definitivamente periodica* se $x = uy$ con $u \in A^*$ ed $y \in A^\omega$ periodica.

Teorma (Coven e Hedlund, 1973)

Una parola $x \in A^\omega$, con $\mathrm{Card}\,(A) = k$ è definitivamente periodica se $\mathrm{Card}\left(F(x) \cap A^d\right) \leq d + k - 2$ per un opportuno d.

Teorema della Periodicità

Una parola infinita $x = a_1 a_2 \cdots$ sarà detta *periodica* se esiste un $p \geq 1$ t. c. $a_i = a_{i+p}$ per ogni i. Una parola $w \in A^\omega$ è detta *definitivamente periodica* se $x = uy$ con $u \in A^*$ ed $y \in A^\omega$ periodica.

Teorma (Coven e Hedlund, 1973)

Una parola $x \in A^\omega$, con $\mathrm{Card}\,(A) = k$ è definitivamente periodica se $\mathrm{Card}\left(F(x) \cap A^d\right) \leq d + k - 2$ per un opportuno d.

Teorema (BDPRR, 2010)

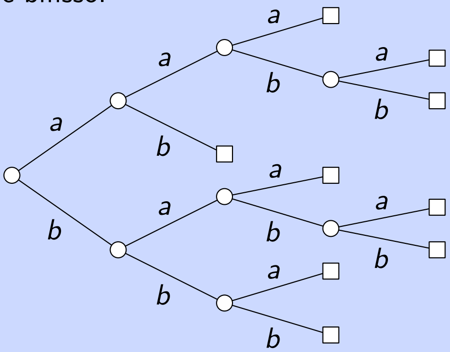
Una parola $x \in A^\omega$, con $\mathrm{Card}\,(A) = k$ è definitivamente periodica se $\mathrm{Card}\,(F(x) \cap X) \leq d$ per un opportuno codice massimale bifisso X di grado d.

Teorema della Periodicità

Esempio

Esempio

Sia $X = \{a^3, a^2ba, a^2b^2, ab, ba^2, baba, bab^2, b^2a, b^3\}$ un codice massimale bifisso.

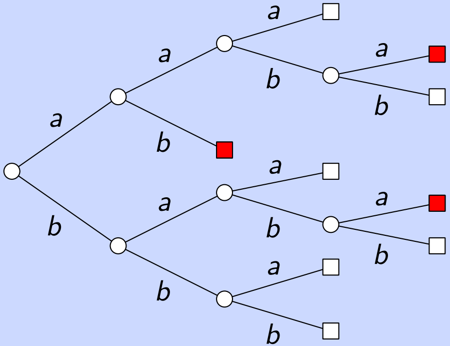


Teorema della Periodicità

Esempio

Esempio

Sia $X = \{a^3, a^2ba, a^2b^2, ab, ba^2, baba, bab^2, b^2a, b^3\}$ un codice massimale bifisso.



Sia $x \in A^\omega$ t.c. $X \cap F(x) = \{a^2ba, ab, baba\}$. Allora $x = u\,(ba)^\omega$.

Teorema della Base Sturmiana

Teorema (BDPRR, 2010)

Siano F un insieme Sturmiano e $d \geq 1$. Un codice bifisso $X \subseteq F$ è una base di un sottogruppo di indice d di A° se e solo se esso è F-massimale bifisso finito di F-grado d.

Teorema della Base Sturmiana

Teorema (BDPRR, 2010)

Siano F un insieme Sturmiano e $d \geq 1$. Un codice bifisso $X \subseteq F$ è una base di un sottogruppo di indice d di A° se e solo se esso è F-massimale bifisso finito di F-grado d.

Da tale Teorema segue anche il Teorema della Cardinalità. Infatti per la *formula di Schreier* dato un sottogruppo $H \leq A^\circ$ di rango n ed indice d, con $\mathrm{Card}\,(A) = k$, si ha

$$n = d(k-1) + 1.$$

Dunque, dato un codice X F-massimale bifisso di grado d si ha $\mathrm{Card}\,(X) = (k-1)d + 1$.

Teorema della Base Sturmiana

Corollari

Per ogni insieme Sturmiano F ed $n \geq 1$ si ha $\langle F \cap A^d \rangle = \langle A^d \rangle$.

Esempio

Sia F l'insieme di Fibonacci. Si ha $F \cap A^2 = \{aa, ab, ba\}$ e $bb = ba\,(aa)^{-1}\,ab$;

Teorema della Base Sturmiana

Corollari

Per ogni insieme Sturmiano F ed $n \geq 1$ si ha $\langle F \cap A^d \rangle = \langle A^d \rangle$.

Esempio

Sia F l'insieme di Fibonacci. Si ha $F \cap A^2 = \{aa, ab, ba\}$ e $bb = ba\,(aa)^{-1}\,ab$;

Corollario

Sia F un insieme Sturmiano. Vi è una biezione tra l'insieme dei codici F-massimali bifissi di F-grado d e quello dei sottogruppi di A° di indice d.

$$X \subseteq F \quad \xmapsto{\varphi} \quad \langle X \rangle = H \leq A^\circ \quad \xmapsto{\varphi^{-1}} \quad Z \cap F \subseteq F$$

con X base di $\langle X \rangle$ e $Z^* = H \cap A^*$.

Teorema della Base Sturmiana

Corollari

Il numero di codici F-massimali bifissi finiti di F-grado è pari a quello dei sottogruppi di indice d del gruppo libero di rango k, ovvero (Hall, 1949) $N_{1,k} = 1$ e

$$N_{d,k} = d\,(d!)^{k-1} - \sum_{i=1}^{d-1} ((d-1)!)^{k-1}\, N_{i,k}.$$

Teorema della Base Sturmiana

Corollari

Il numero di codici F-massimali bifissi finiti di F-grado è pari a quello dei sottogruppi di indice d del gruppo libero di rango k, ovvero (Hall, 1949) $N_{1,k} = 1$ e

$$N_{d,k} = d\,(d!)^{k-1} - \sum_{i=1}^{d-1} ((d-1)!)^{k-1}\, N_{i,k}.$$

In particolare per $k = 2$, la formula è

$$N_{d,2} = d\,d! - \sum_{i=1}^{d-1} (d-1)!N_{i,2}.$$

d	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	3	13	71	461	3447	29092	273343


DOMANDE?