Cenni sulla teoria dei nodi

Invarianti, Tabulazioni, Grafi planari

Francesco Dolce

unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni

19 maggio 2009

Invarianti

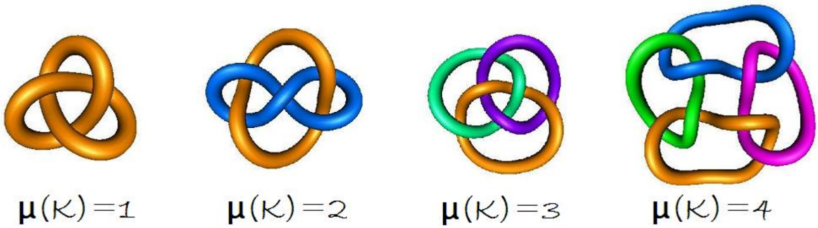
Definizione

Definizione

Un *invariante* i è una funzione dipendente solo dalla classe di equivalenza del nodo. Ovvero $K \simeq K' \Rightarrow i(K) = i(K')$.

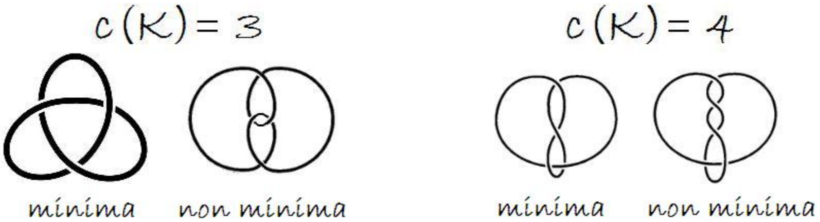
Invarianti

$\mu(L)$ - *Numero di componenti*



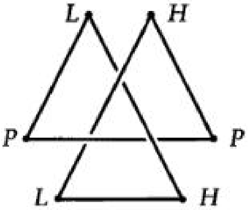
Invarianti

$c(K)$ - *Crossing number*



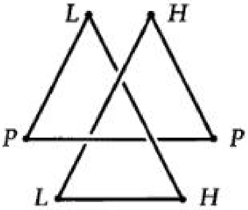
Invarianti

$s(K)$ - *Stick number*



Invarianti

$s(K)$ - *Stick number*



Proprietà

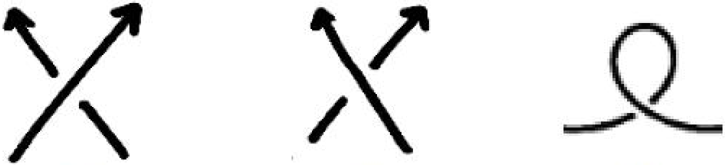
- $s(J\#K) \leq s(J) + s(K) - 1$
- $s(K) \leq 2c(K)$ (Negami, 1991)

Invarianti

$u(K)$ - *Unknotting number*

Linking number

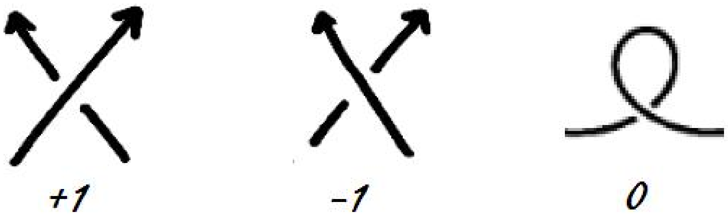
$Lk(L)$ - *Definizione*



+1 −1 0

Linking number

$Lk(L)$ - *Definizione*

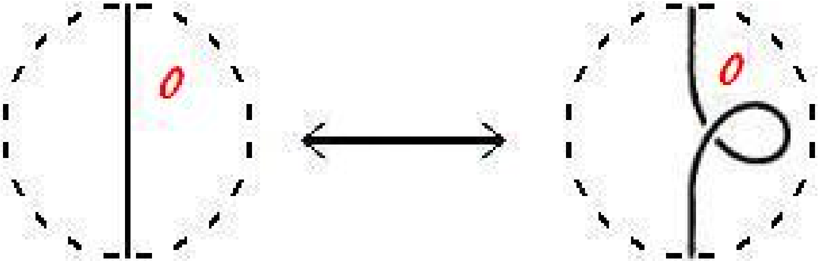


Definizione

$$Lk(L) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \pi(L)} Lk(c)$$

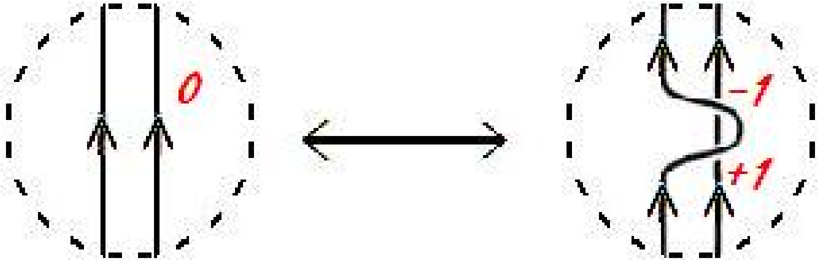
Linking number

Mosse di Reidemeister - Ω_1



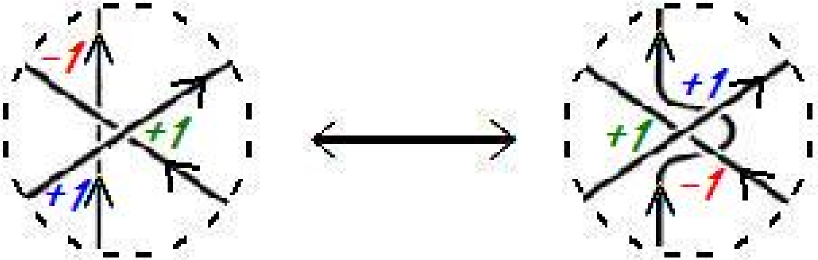
Linking number

Mosse di Reidemeister - Ω_2

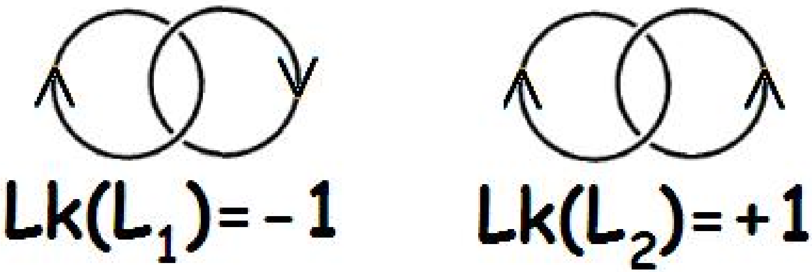


Linking number

Mosse di Reidemeister - Ω_3



Linking number



Linking number

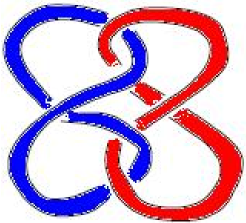
Formula di Gauss

$$Lk\Big(L(\gamma_1,\gamma_2)\Big) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\frac{\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}}{\left|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}\right|^3}\cdot(\mathrm{d}\overrightarrow{r_1}\wedge\mathrm{d}\overrightarrow{r_2})$$

Linking number

Formula di Gauss

$$Lk\Big(L(\gamma_1,\gamma_2)\Big) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\frac{\vec{r_1}-\vec{r_2}}{\left|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right|^3}\cdot\left(\mathrm{d}\vec{r_1}\wedge\mathrm{d}\vec{r_2}\right)$$

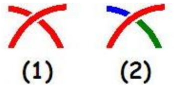


3-colorabilità

Definizione

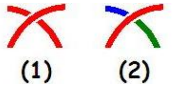
3-colorabilità

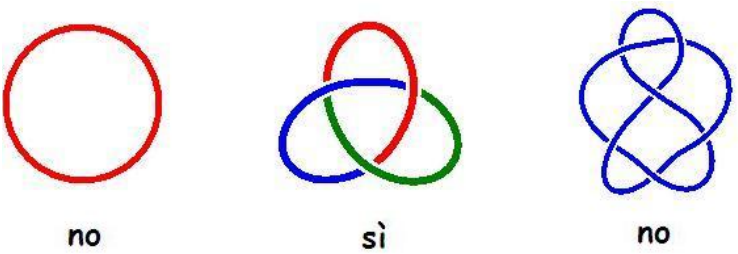
Definizione



3-colorabilità

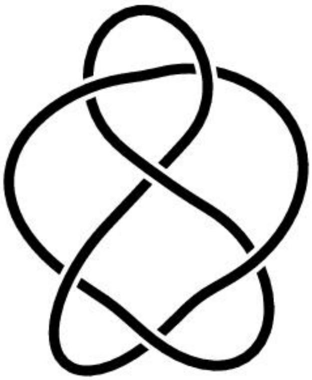
Definizione





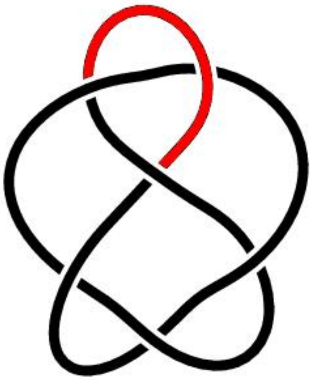
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



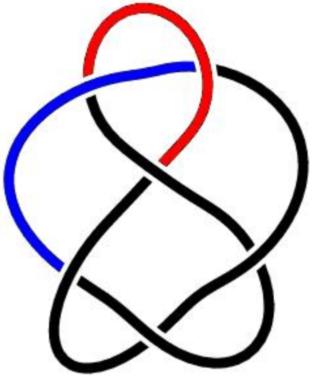
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



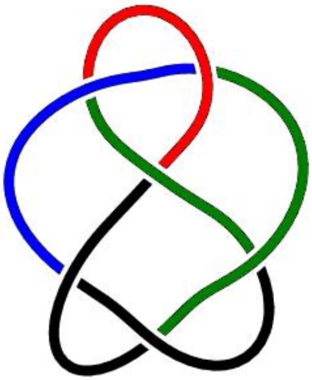
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



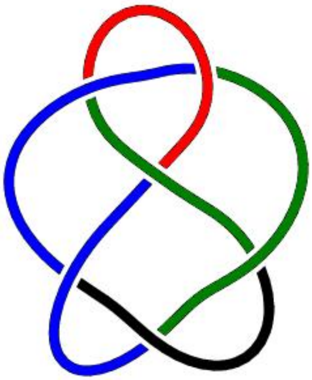
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



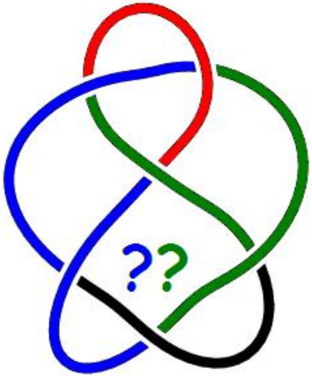
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



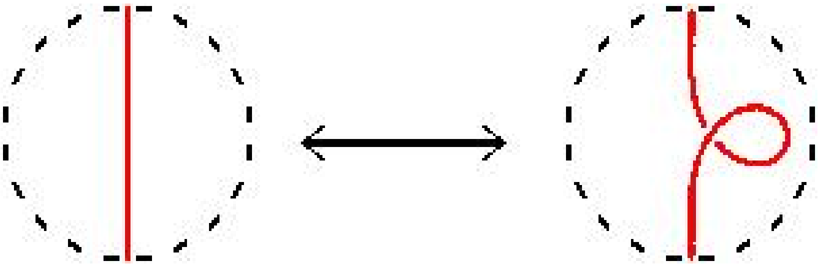
3-colorabilità

6.1 non è tricolorabile



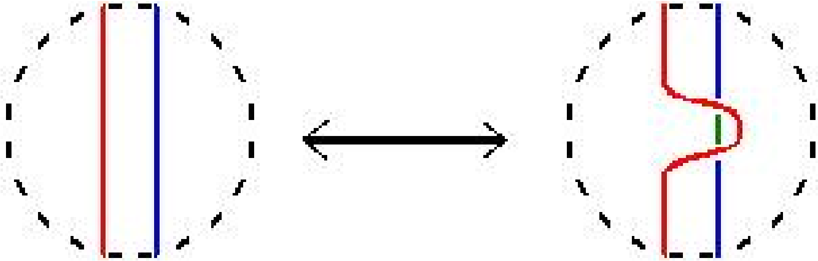
3-colorabilità

Mosse di Reidemeister - Ω_1



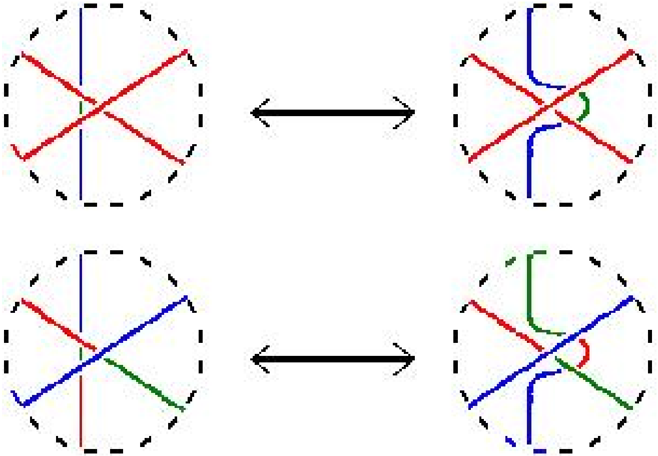
3-colorabilità

Mosse di Reidemeister - Ω_2



3-colorabilità

Mosse di Reidemeister - Ω_3



3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Definizione*

Definizione

Dato un diagramma di un nodo D, si definisce *insieme delle 3-colorazioni* $T(D)$, l'insieme delle possibili colorazioni degli archi di D tali da ad ogni incrocio sia verificata (1) o (2). Si definisce *numero di tricolorabilità* $\tau(D)$ la cardinalità di $T(D)$.

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Invariante*

Teorema

$\tau(D)$ è un invarianti dei link.

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Invariante*

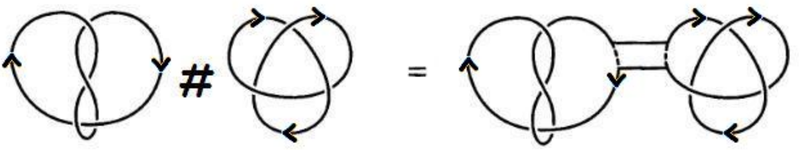
Teorema

$\tau(D)$ è un invariante dei link.

- $\tau(\bigcirc) = 3$
- $\tau($  $) = 9$
- $\tau(\bigcirc\bigcirc) = 9$
- $\tau($  $) = 3$

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Somma connessa*



Teorema

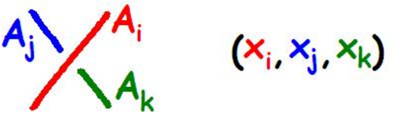
$$\tau(K_1 \# K_2) = \frac{1}{3}\tau(K_1)\tau(K_2)$$

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Equazioni lineari omogenee in* $\mathbb{Z}_3^l$

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Equazioni lineari omogenee in* $\mathbb{Z}_3^l$



$$x_i + x_j + x_k \equiv 0 (mod 3)$$

3-colorabilità

$\tau(K)$ - *Equazioni lineari omogenee in* $\mathbb{Z}_3^l$

$$(x_i, x_j, x_k)$$

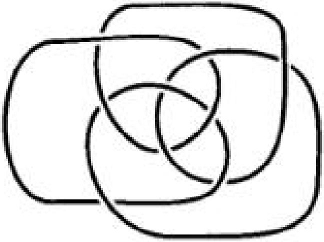
$$x_i + x_j + x_k \equiv 0(mod3)$$

Osservazione

$T(D) = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{Z}_3^l : x_i + x_j + x_k = 0$ se A_i, A_j, A_k formano un incrocio$\Big\}$

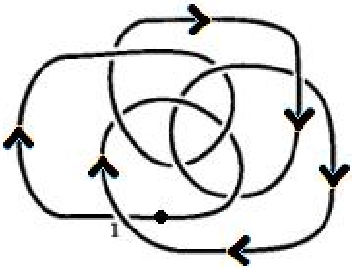
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



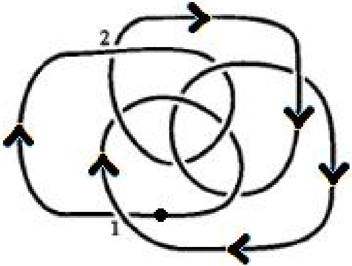
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



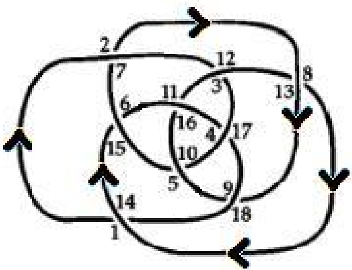
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



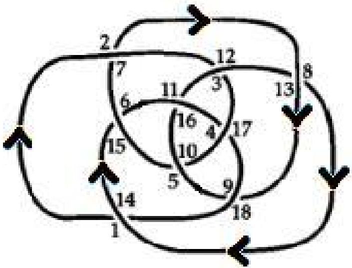
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



Notazione Dowker

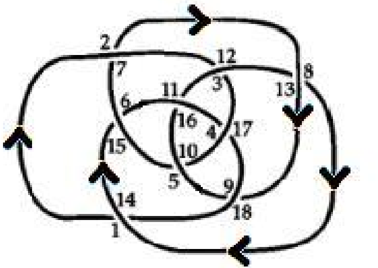
Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



1	3	5	7	9	11	13	15	17
14	12	10	2	18	16	8	6	4

Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



14 12 10 2 18 16 8 6 4

Notazione Dowker

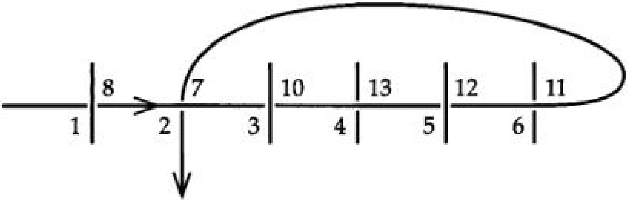
Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4

Notazione Dowker

Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

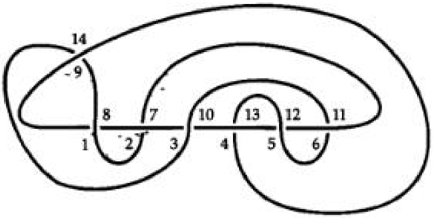
1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4



Notazione Dowker

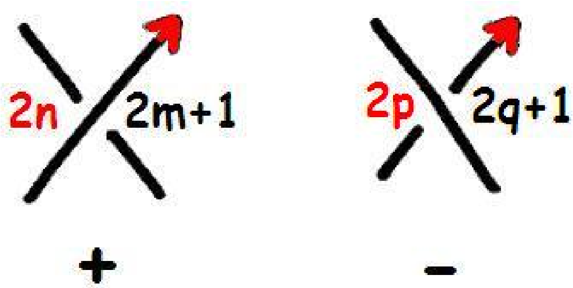
Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4



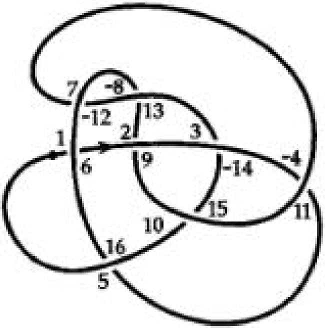
Notazione Dowker

Nodo non alterno



Notazione Dowker

Nodo non alterno



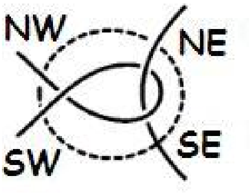
1	3	5	7	9	11	13	15
6	-14	16	-12	2	-4	-8	10

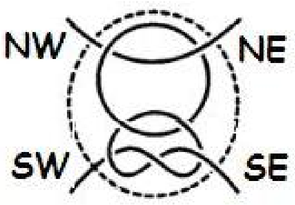
Notazione Conway

Grovigli - Definizione

Definizione

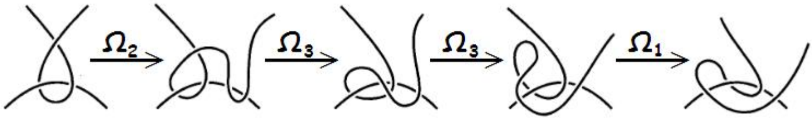
Un *groviglio* (o *tangle*) è una regione del piano delimitata da una circonferenza tale che il diagramma del link intersechi la circonferenza in esattamente 4 punti.





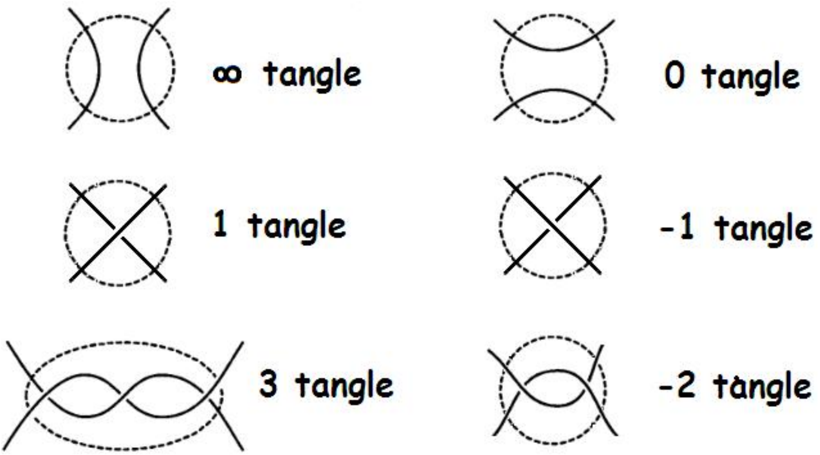
Notazione Conway

Grovigli - Mosse di Reidemeister



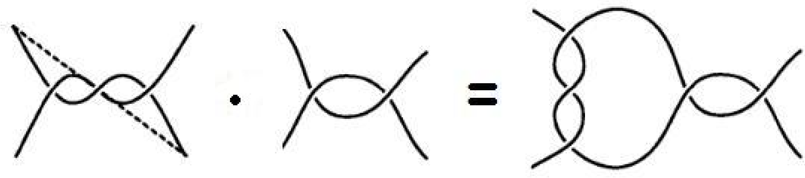
Notazione Conway

Grovigli - Notazione



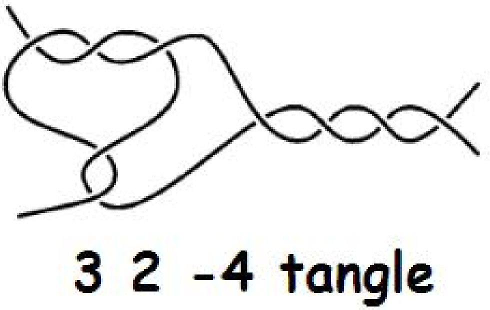
Notazione Conway

Grovigli - Moltiplicazione



Notazione Conway

Grovigli - Grovigli razionali



Notazione Conway

Grovigli - Frazioni continue

Definizione

Dato il groviglio razionale con notazione $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ si considera il valore corrispondente alla frazione

$$\alpha_n + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \cdots \frac{1}{\alpha_1}}} \in \mathbb{Q}$$

Notazione Conway

Grovigli - Frazioni continue

Definizione

Dato il groviglio razionale con notazione $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ si considera il valore corrispondente alla frazione

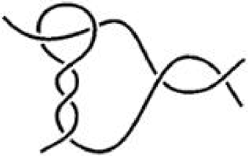
$$\alpha_n + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_{n-2} + \cdots \frac{1}{\alpha_1}}} \in \mathbb{Q}$$

Teorema

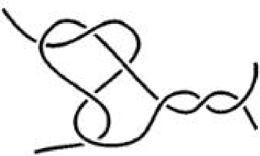
Due grovigli razionali sono equivalenti se e solo se le due frazioni corrispondenti coincidono. (Burde e Zieschang, 1986)

Notazione Conway

Grovigli - Grovigli equivalenti



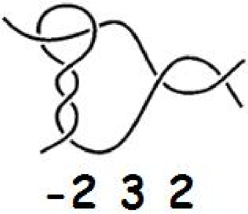
-2 3 2

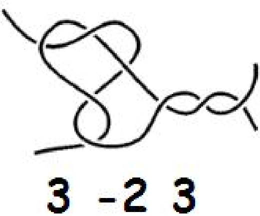


3 -2 3

Notazione Conway

Grovigli - Grovigli equivalenti





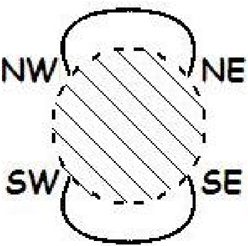
$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}} \quad = \quad \frac{12}{5} \quad = \quad 3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}}$$

Notazione Conway

Link razionali

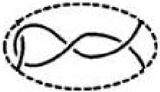
Definizione

Si definisce *link razionale* un link ottenuto partendo da un groviglio e collegando tra loro i rami **NE** e **NW** e i rami **SE** e **SW**, senza formare nuovi incroci.



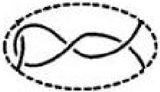
Notazione Conway

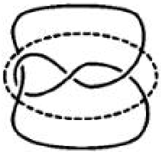
Link razionali - Esempio



Notazione Conway

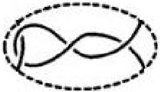
Link razionali - Esempio

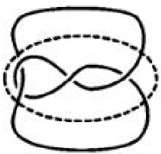


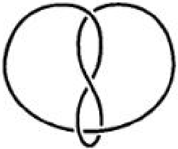


Notazione Conway

Link razionali - Esempio



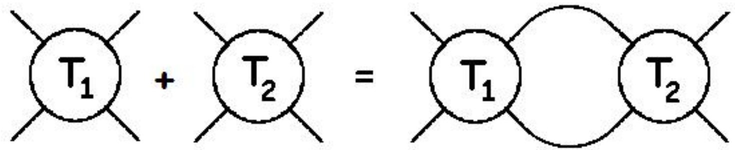




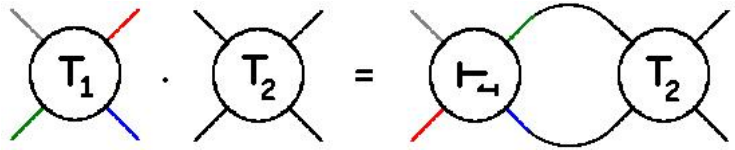
Notazione Conway

Grovigli - Operazioni

Addizione:



Moltiplicazione:



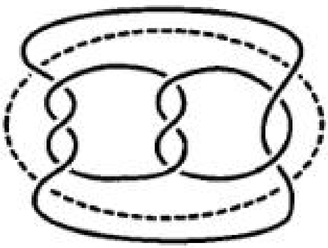
Notazione Conway

Grovigli - Nodi pretzel

Indichiamo con

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

il groviglio ottenuto da $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0$.



3, 3, 2 pretzel

Notazione Conway

Grovigli algebrici e Link algebrici

Definizione

Si definisce *groviglio algebrico* un groviglio ottenuto da grovigli razionali sommati e moltiplicati tra loro.

Notazione Conway

Grovigli algebrici e Link algebrici

Definizione

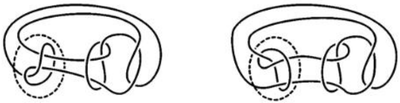
Si definisce *groviglio algebrico* un groviglio ottenuto da grovigli razionali sommati e moltiplicati tra loro.

Definizione

Si definisce *link algebrico* un link ottenuto partendo da un groviglio algebrico collegando tra loro i rami **NE** e **NW** e i rami **SE** e **SW**, senza formare nuovi incroci.

Notazione Conway

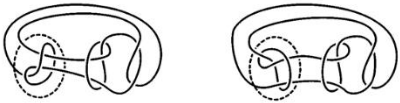
Grovigli mutanti



Mutanti di Kinoshita-Terasaka

Notazione Conway

Grovigli mutanti



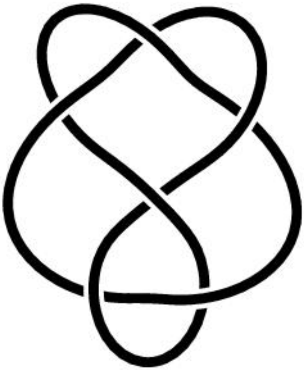
Mutanti di Kinoshita-Terasaka

Proprietà

- Il mutante di un nodo alterno è un nodo alterno.
- Il mutante di un nodo (link ad 1 componente) è un nodo.
- Il mutante di un nodo non banale è un nodo non banale.

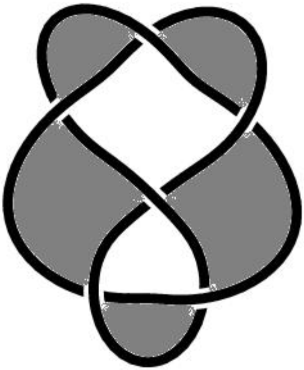
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



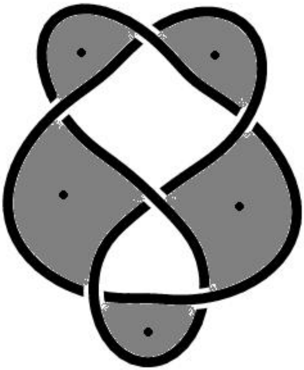
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



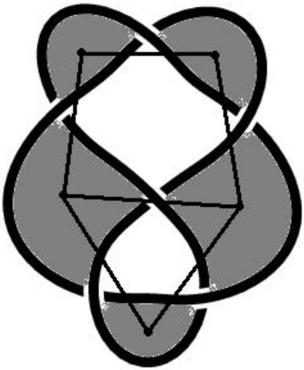
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



Grafi planari

Dal diagramma al grafo

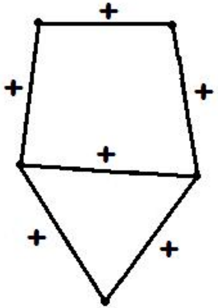


Grafi planari

Dal diagramma al grafo

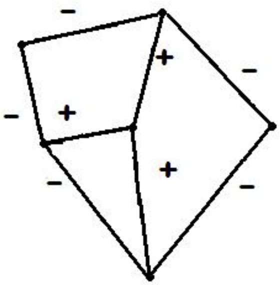
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



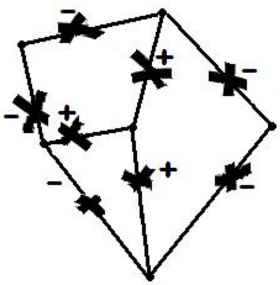
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



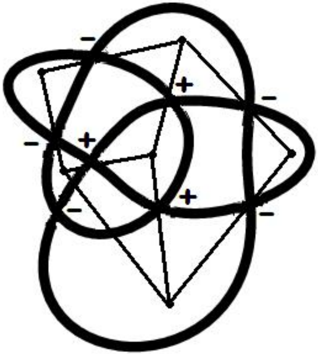
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



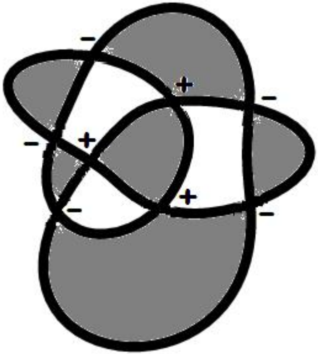
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



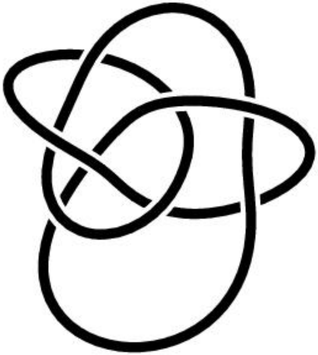
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



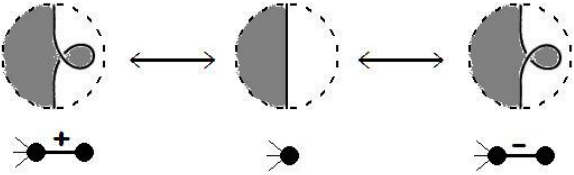
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



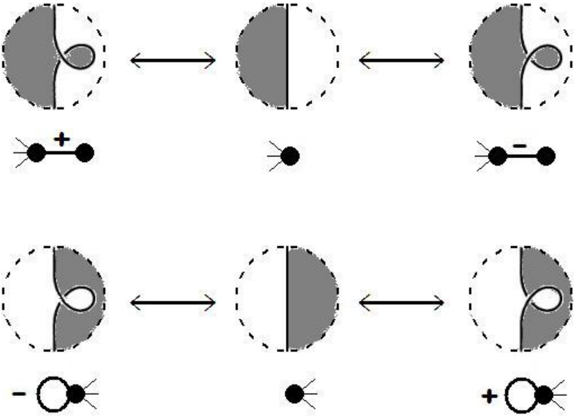
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_1



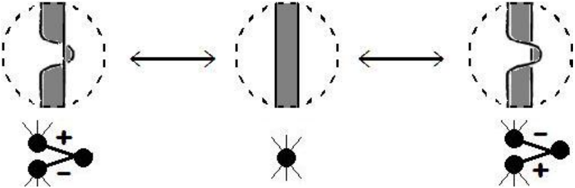
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_1



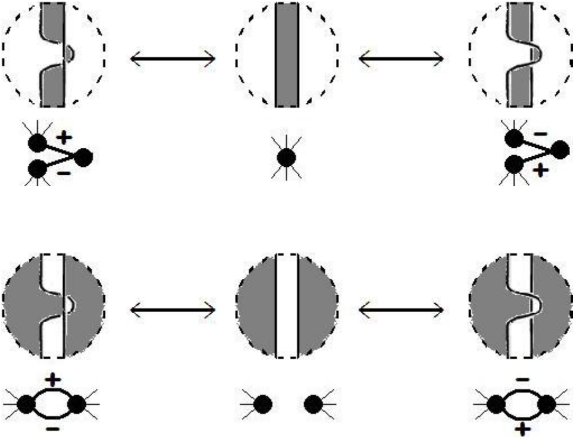
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_2



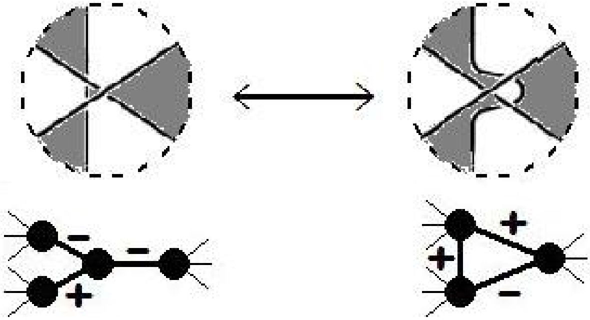
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_2



Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_3



Domande?