

Cenni sulla teoria dei nodi
Polinomi

Francesco Dolce



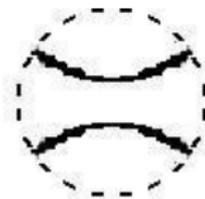
unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni



26 maggio 2009

Relazioni skein

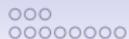
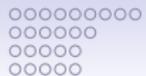
Definizione

 L_+  L_-  L_0  L_∞

Definizione

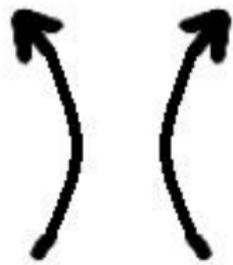
Una *relazione skein* è un'equazione del tipo

$$f(L_+, L_-, L_0, L_\infty) = 0$$



Relazioni skein

Flip e disincrocio



Bracket di Kauffman

Definizione

Definizione

Il *polinomio a bracket di Kauffman* di un diagramma piano D di un link non orientato $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ è definito dalle regole:

(0) $\langle D \rangle$ è un invariante per isotopie planari;

(1) $\langle \bigcirc \rangle = 1$;

(2) $\langle \diagdown \rangle = A \langle \bigcap \rangle + A^{-1} \langle \bigcup \rangle$

(2') $\langle \diagup \rangle = A^{-1} \langle \bigcap \rangle + A \langle \bigcup \rangle$

(3) $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$

Bracket di Kauffman

Coefficienti

$$(i) \langle \bigcirc \rangle = 1;$$

$$(ii) \langle \diagdown \rangle = \alpha \langle \rangle \langle \rangle + \beta \langle \rangle \langle \rangle$$

$$(ii') \langle \diagup \rangle = \beta \langle \rangle \langle \rangle + \alpha \langle \rangle \langle \rangle$$

$$(iii) \langle D \cup \bigcirc \rangle = \gamma \langle D \rangle$$

Bracket di Kauffman

Coefficienti - Ω_2

$$\boxed{\langle \chi \rangle = \langle \rangle \langle \rangle} = \langle \chi \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \chi \rangle &= \alpha \langle \mathfrak{X} \rangle + \beta \langle \mathfrak{Y} \rangle \\ &= \alpha(\alpha \langle \mathfrak{X} \rangle + \beta \langle \mathfrak{X} \rangle) + \beta(\alpha \langle \mathfrak{Y} \rangle + \beta \langle \mathfrak{Y} \rangle) \\ &= \alpha(\alpha \langle \mathfrak{X} \rangle + \beta \gamma \langle \mathfrak{Y} \rangle) + \beta(\alpha \langle \rangle \langle \rangle + \beta \langle \mathfrak{Y} \rangle) \\ &= (\alpha^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2) \langle \mathfrak{X} \rangle + \beta\alpha \langle \rangle \langle \rangle = \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \alpha^{-1} \\ \gamma = -\alpha^{-2} - \alpha^2 \end{cases}$$

Bracket di Kauffman Ω_3

$$\boxed{\langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle} \quad \mathbf{e} \quad \langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cap} \rangle \\ &= A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cap} \rangle \\ &= A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cap} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle \end{aligned}$$

Bracket di Kauffman

e Ω_1 ?

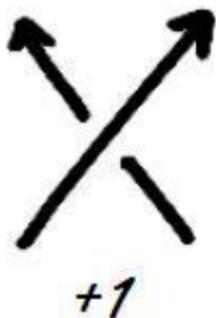
$$\langle \overline{\sigma} \rangle = \langle \longleftrightarrow \rangle = \langle \overline{\sigma} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{\sigma} \rangle &= A \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\ &= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\ &= -A^3 \langle \longleftrightarrow \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{\sigma} \rangle &= A \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\ &= A \langle \longleftrightarrow \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \longleftrightarrow \rangle \\ &= -A^{-3} \langle \longleftrightarrow \rangle \end{aligned}$$

Bracket di Kauffman

$\omega(D)$ - Writhe

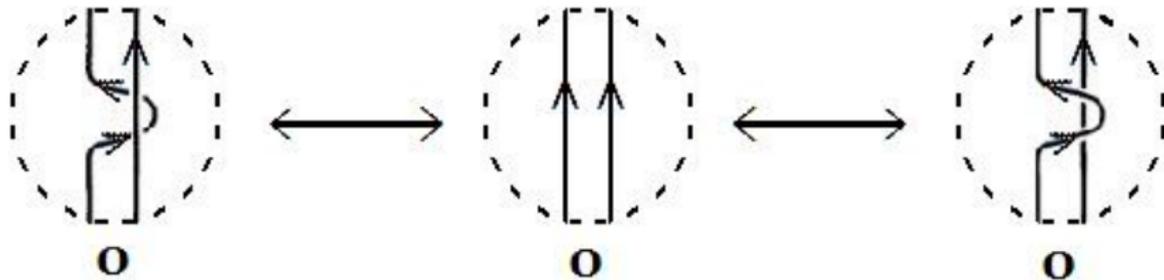


Definizione

$$\omega(D) = \sum_{c \in \pi(L)} \omega(c)$$

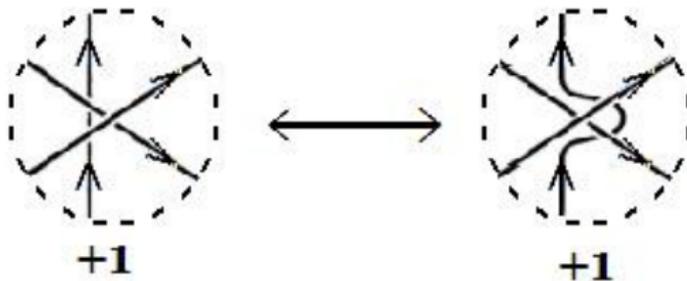
Bracket di Kauffman

$\omega(D)$ - Mosse di Reidemeister: Ω_2



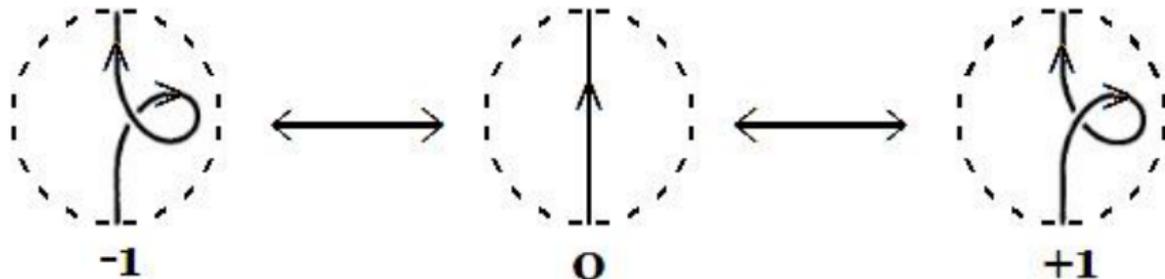
Bracket di Kauffman

$\omega(D)$ - Mosse di Reidemeister: Ω_3



Bracket di Kauffman

$\omega(D)$ - Mosse di Reidemeister: Ω_1



Il polinomio $X(L)$

Definizione

Definizione

$$X(D) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$$

Il polinomio $X(L)$

Definizione

Definizione

$$X(D) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$$

Osservazione

$X(D)$ è invariante per Ω_2 ed Ω_3 poiché $\omega(\cdot)$ e $\langle \cdot \rangle$ lo sono.

Il polinomio $X(L)$

Esempio - Link banale a due componenti

- $\langle \bigcirc\bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \rangle = -A^{-2} - A^2$
- $\omega(\bigcirc\bigcirc) = 0$

$$\Rightarrow X(\bigcirc\bigcirc) = (-A^3)^{-0} (-A^{-2} - A^2) = -A^{-2} - A^2$$

Il polinomio $X(L)$

Esempio - Link di Hopf

•

$$\begin{aligned}
 \langle \textcircled{\cup} \rangle &= A \langle \textcircled{\cap} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cup} \rangle \\
 &= A (A \langle \textcircled{\cap} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cap} \rangle) + A^{-1} (A \langle \textcircled{\cup} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\cup} \rangle) \\
 &= A (A(-A^2 + A^{-2})) + A^{-1} (1) + A^{-1} (A(1) + A^{-1}(-A^2 + A^{-2})) \\
 &= -A^4 - A^{-4}
 \end{aligned}$$

• $\omega(\textcircled{\cup}) = 2$

$$\Rightarrow X(\textcircled{\cup}) = (-A^3)^{-2} (-A^{-4} - A^4) = A^2 + A^{10}$$

Il polinomio $V(L)$

Definizione

Si pone $t = -A^4$.

$$V(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{4}}]$$

Il polinomio $V(L)$

Definizione

Si pone $t = -A^4$.

$$V(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{4}}]$$

Congettura

$$V_L(t) \neq 1 \quad \forall L \neq \bigcirc$$

Il polinomio $V(L)$

Proprietà

Proprietà

- $V(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$
- $V(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ per i link con un numero dispari di componenti
- $V_{L_1 \# L_2}(t) = V_{L_1}(t) \cdot V_{L_2}(t)$
- $V_L(1) = (-2)^{p-1}$ per i link di p componenti
- $V_K(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1 \quad \forall K$ nodo
- $[\frac{d}{dt} V_K](1) = 0 \quad \forall K$ nodo
- $V_{\text{spec}(K)}(t) = V_K(t^{-1})$, dunque se K è achirale $\Rightarrow V_K(t)$ è palindromo
- $V_K(t)$ non dipende dall'orientamento (falso per i link)

Il polinomio di Jones

Relazione skein

Teorema

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(L_0) = 0$$

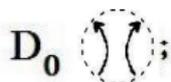
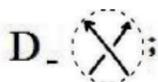
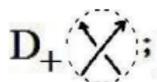
 L_+  L_-  L_0

Il polinomio di Jones

Relazione skein

Dimostrazione

Poniamo:



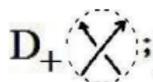
$$\begin{cases} \langle D_+ \rangle = A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_\infty \rangle \\ \langle D_- \rangle = A^{-1} \langle D_0 \rangle + A \langle D_\infty \rangle \end{cases}$$

Il polinomio di Jones

Relazione skein

Dimostrazione

Poniamo:



$$\begin{cases} \langle D_+ \rangle = A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_\infty \rangle \\ \langle D_- \rangle = A^{-1} \langle D_0 \rangle + A \langle D_\infty \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \langle D_+ \rangle = A^2 \langle D_0 \rangle + \langle D_\infty \rangle \\ A^{-1} \langle D_- \rangle = A^{-2} \langle D_0 \rangle + \langle D_\infty \rangle \end{cases}$$

Il polinomio di Jones

Relazione skein

$$\Rightarrow A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle$$

Il polinomio di Jones

Relazione skein

$$\Rightarrow A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle$$

ma

- $X(D_0) = \langle D_0 \rangle$
- $X(D_+) = (-A^3)^{-1} \langle D_+ \rangle \Rightarrow \langle D_+ \rangle = -A^3(D_+)$
- $X(D_-) = (-A^3)^1 \langle D_- \rangle \Rightarrow \langle D_- \rangle = -A^{-3}(D_-)$

Il polinomio di Jones

Relazione skein

$$\Rightarrow A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle$$

ma

- $X(D_0) = \langle D_0 \rangle$
- $X(D_+) = (-A^3)^{-1} \langle D_+ \rangle \Rightarrow \langle D_+ \rangle = -A^3 X(D_+)$
- $X(D_-) = (-A^3)^1 \langle D_- \rangle \Rightarrow \langle D_- \rangle = -A^{-3} X(D_-)$

$$\Rightarrow -A^4 X(D_+) + A^4 X(D_-) = (A^2 - A^{-2}) X(D_0)$$

ovvero

Il polinomio di Jones

Relazione skein

$$\Rightarrow A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle$$

ma

- $X(D_0) = \langle D_0 \rangle$
- $X(D_+) = (-A^3)^{-1} \langle D_+ \rangle \Rightarrow \langle D_+ \rangle = -A^3 X(D_+)$
- $X(D_-) = (-A^3)^1 \langle D_- \rangle \Rightarrow \langle D_- \rangle = -A^{-3} X(D_-)$

$$\Rightarrow -A^4 X(D_+) + A^4 X(D_-) = (A^2 - A^{-2}) X(D_0)$$

ovvero

$$t^{-1} V(D_+) - t V(D_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V(D_0)$$

□

Il polinomio di Jones

Esempio - Link di Hopf

$$t^{-1}V(\textcircled{\cup}) - tV(\textcircled{\cap}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\textcircled{\cup})$$

⇒

$$\begin{aligned} V(\textcircled{\cap}) &= t^{-2}V(\textcircled{\cup}) - t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\textcircled{\cup}) = \\ &= -t^{-2}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) - t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Il polinomio di Jones

Esempio - Nodo trifoglio

$$t^{-1}V(\text{trifoglio}) - tV(\text{trifoglio}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{trifoglio})$$

⇒

$$V(\text{trifoglio}) = t^{-2} + t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) =$$

Il polinomio di Jones

Esempio - Nodo trifoglio

$$t^{-1}V(\text{trifoglio}) - tV(\text{trifoglio}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{trifoglio})$$

⇒

$$\begin{aligned} V(\text{trifoglio}) &= t^{-2} + t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) = \\ &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \end{aligned}$$

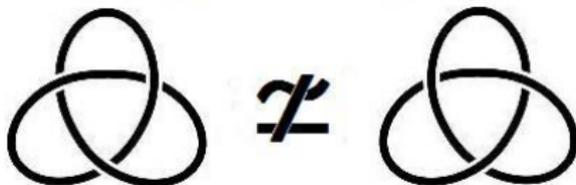
Il polinomio di Jones

Esempio - Nodo trifoglio

$$t^{-1}V(\text{trifoglio}) - tV(\text{trifoglio}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{trifoglio})$$

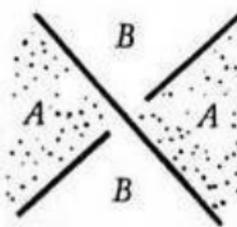
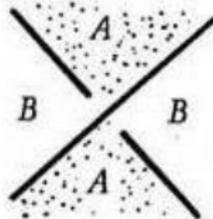
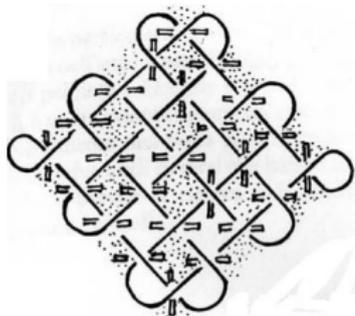
⇒

$$\begin{aligned} V(\text{trifoglio}) &= t^{-2} + t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) = \\ &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \end{aligned}$$



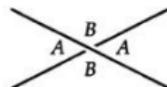
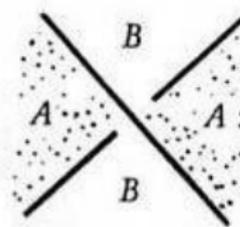
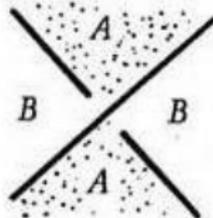
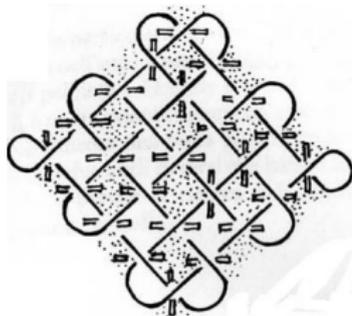
Modello di Kauffman

Modelli statistici



Modello di Kauffman

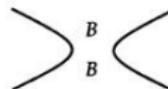
Modelli statistici



A-split →

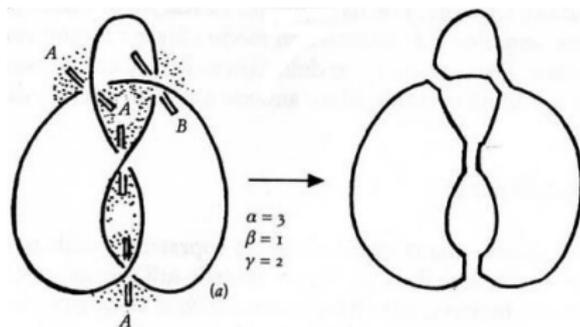


B-split →



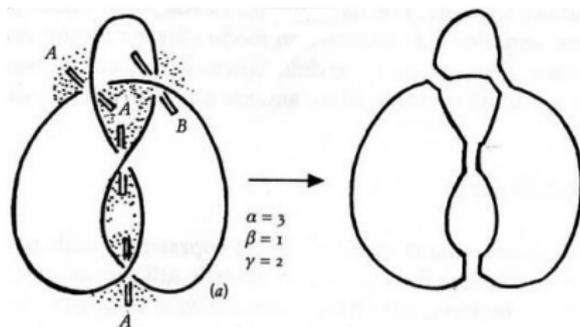
Modello di Kauffman

Stati possibili



Modello di Kauffman

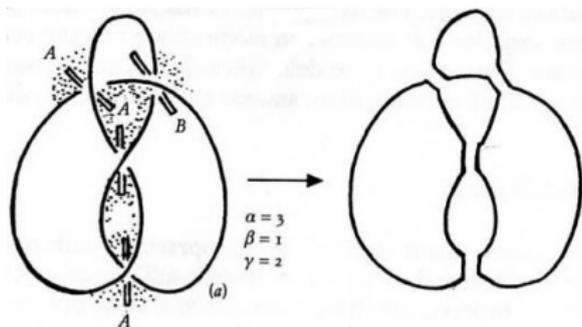
Stati possibili



$$|S| = 2^c$$

Modello di Kauffman

Stati possibili

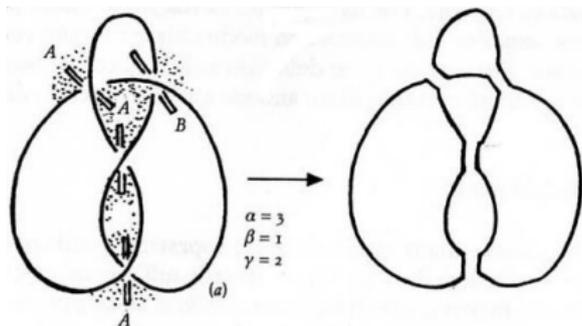


$$|S| = 2^c$$

Uno stato finale sD ha $\langle sD \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{\gamma(s)-1}$.

Modello di Kauffman

Stati possibili



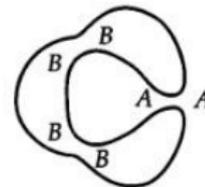
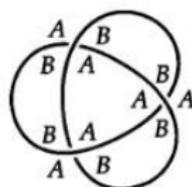
$$|S| = 2^c$$

Uno stato finale sD ha $\langle sD \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{\gamma(s)-1}$.

Il fattore per cui è moltiplicato in $\langle L \rangle$ è $A^{\alpha(s)} \cdot A^{-\beta(s)}$

Modello di Kauffman

Esempio - Nodo trifoglio



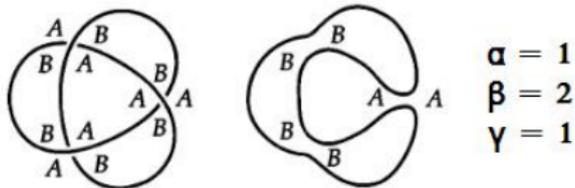
$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 1$$

Modello di Kauffman

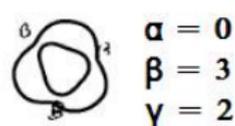
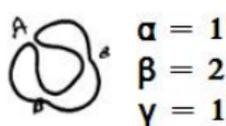
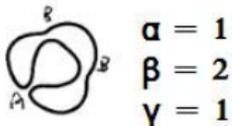
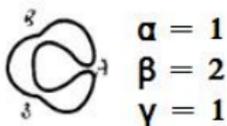
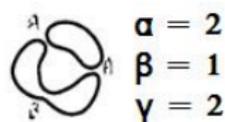
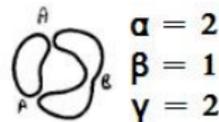
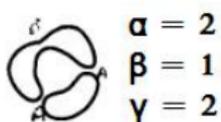
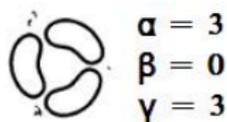
Esempio - Nodo trifoglio



$$\langle L \rangle = \sum_{s \in S} A^{\alpha(s) - \beta(s)} (-A^{-2} - A^2)^{\gamma(s) - 1}$$

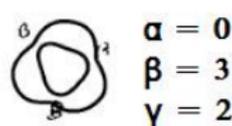
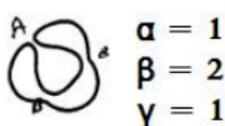
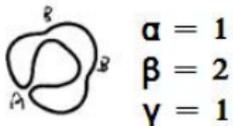
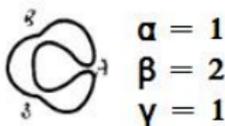
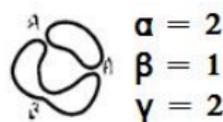
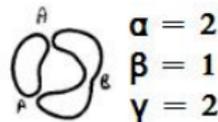
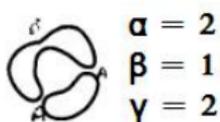
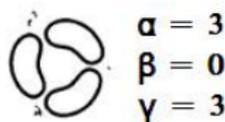
Modello di Kauffman

Esempio - Nodo trifoglio



Modello di Kauffman

Esempio - Nodo trifoglio



$$\begin{aligned} \langle K \rangle = & A^{3-0} (-A^{-2} - A^2)^{3-1} + A^{2-1} (-A^{-2} - A^2)^{2-1} + \\ & A^{2-1} (-A^{-2} - A^2)^{2-1} + A^{2-1} (-A^{-2} - A^2)^{2-1} + \\ & A^{1-2} (-A^{-2} - A^2)^{1-1} + A^{1-2} (-A^{-2} - A^2)^{1-1} + \\ & A^{1-2} (-A^{-2} - A^2)^{1-1} + A^{0-3} (-A^{-2} - A^2)^{2-1} = A^{-5} - A^3 + A^7 \end{aligned}$$

Proiezioni ridotte

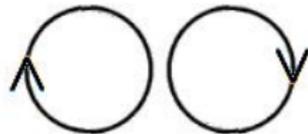
Diagrammi connessi

Definizione

Un diagramma piano è detto *connesso* se è rappresentabile tramite una curva connessa (a meno che negli incroci).



connesso



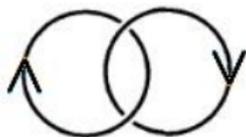
non connesso

Proiezioni ridotte

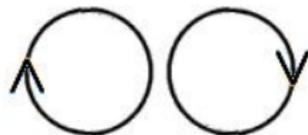
Diagrammi connessi

Definizione

Un diagramma piano è detto *connesso* se è rappresentabile tramite una curva connessa (a meno che negli incroci).



connesso



non connesso

Osservazione

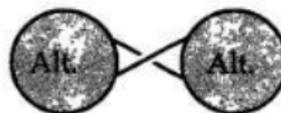
Un diagramma piano connesso con c incroci divide il piano in $c + 2$ regioni omeomorfe a dischi.

Proiezioni ridotte

Definizione

Definizione

Un diagramma alterno è detto *ridotto* se non possiede istmi.



Congettura di Tait

Teorema

Un diagramma alterno ridotto è minimale.

Proposizione

1. Due diagrammi piani ridotti alterni di uno stesso nodo hanno ugual numero di incroci;
2. tale numero è quello minimo.

Conggettura di Tait

Span di un polinomio

Definizione

Si definisce *span* di un polinomio la differenza tra la potenza più grande e quella più piccola.

Esempio:

$$\text{span}(A^3 - 2A^2 + 1 - A^{-1} - 7A^{-2}) = 3 - (-2) = 5$$

Osservazione

$$\text{span}(X(L)) = \text{span}(\langle L \rangle)$$

Congettura di Tait

Lemma

Lemma

Se K ha una proiezione alterna ridotta con n incroci \Rightarrow
 $\text{span}(\langle K \rangle) = 4n.$

Congettura di Tait

Lemma

Lemma

Se K ha una proiezione alterna ridotta con n incroci \Rightarrow
 $\text{span}(\langle K \rangle) = 4n.$

Dimostrazione

$\text{span}(\langle K \rangle)$ non dipende dalla proiezione, scegliamone dunque una ridotta.

Conggettura di Tait

Lemma

Lemma

Se K ha una proiezione alterna ridotta con n incroci \Rightarrow
 $\text{span}(\langle K \rangle) = 4n$.

Dimostrazione

$\text{span}(\langle K \rangle)$ non dipende dalla proiezione, scegliamone dunque una ridotta.

Ogni termine contribuisce con $A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)-1}$.

Conggettura di Tait

Lemma

Lemma

Se K ha una proiezione alterna ridotta con n incroci \Rightarrow
 $\text{span}(\langle K \rangle) = 4n$.

Dimostrazione

$\text{span}(\langle K \rangle)$ non dipende dalla proiezione, scegliamone dunque una ridotta.

Ogni termine contribuisce con $A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma(s)-1}$.

Il termine maggiore sarà dunque del tipo

$$A^{\alpha(s)-\beta(s)+2(\gamma(s)-1)}$$

Congettura di Tait

Lemma

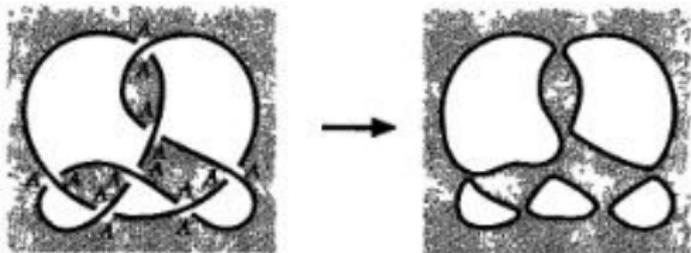
Massimizziamo $\alpha(s) - \beta(s) + 2(\gamma(s) - 1)$.

Conggettura di Tait

Lemma

Massimizziamo $\alpha(s) - \beta(s) + 2(\gamma(s) - 1)$.

Consideriamo uno stato con $\alpha(s) = n$ e $\beta(s) = 0$.



Denotiamo con W il numero delle regioni bianche.

La potenza corrispondente allo stato sarà dunque: $n + 2(W - 1)$

Congettura di Tait

Lemma

Mostriamo che tale potenza è quella massima.

Consideriamo due stati s_1 ed s_2 che differiscono solo per uno split.

Si avrà:

Conggettura di Tait

Lemma

Mostriamo che tale potenza è quella massima.

Consideriamo due stati s_1 ed s_2 che differiscono solo per uno split.

Si avrà:

$$\begin{cases} \alpha(s_2) &= \alpha(s_1) - 1 \\ \beta(s_2) &= \beta(s_1) + 1 \\ \gamma(s_2) &= \gamma(s_1) \pm 1 \end{cases}$$

Conggettura di Tait

Lemma

Mostriamo che tale potenza è quella massima.

Consideriamo due stati s_1 ed s_2 che differiscono solo per uno split.

Si avrà:

$$\begin{cases} \alpha(s_2) &= \alpha(s_1) - 1 \\ \beta(s_2) &= \beta(s_1) + 1 \\ \gamma(s_2) &= \gamma(s_1) \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha(s_2) - \beta(s_2) + 2(\gamma(s_2) - 1) &= \\ &= [\alpha(s_1) - 1] - [\beta(s_1) + 1] + 2(\gamma(s_1) \pm 1 - 1) = \\ &= \alpha(s_1) + \beta(s_1) + 2(\gamma(s_1) - 1) - 2 \pm 2 \leq \\ &\leq \alpha(s_1) + \beta(s_1) + 2(\gamma(s_1) - 1) \end{aligned}$$

Congettura di Tait

Lemma

Similmente si dimostra che la potenza minima è $-n - 2(D - 1)$, con D il numero delle regioni inscurite.

Conggettura di Tait

Lemma

Similmente si dimostra che la potenza minima è $-n - 2(D - 1)$, con D il numero delle regioni inscurite.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{span}(\langle K \rangle) &= [n + 2(W - 1)] - [-n - 2(D - 1)] = \\ &= 2n + 2(W + D - 2) = \\ &= 2n + 2(n + 2 - 2) = 4n \end{aligned}$$

□

Congettura di Tait

Corollario al Lemma

Corollario

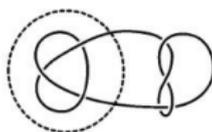
Dati due diagrammi piani ridotti alterni di uno stesso nodo, questi hanno entrambi *span* pari a $4n$ e dunque entrambi n incroci.

Conggettura di Tait

Teorema di Menasco

Teorema

Se $K_1 \# K_2$ è un nodo alterno $\Rightarrow K_1 \# K_2$ appare composto in ogni proiezione alterna. Ovvero è sempre possibile disegnare un cerchio che racchiude completamente uno dei due fattori e incontra la proiezione solo due volte. (Menasco, 1983)

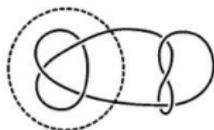


Conggettura di Tait

Teorema di Menasco

Teorema

Se $K_1 \# K_2$ è un nodo alterno $\Rightarrow K_1 \# K_2$ appare composto in ogni proiezione alterna. Ovvero è sempre possibile disegnare un cerchio che racchiude completamente uno dei due fattori e incontra la proiezione solo due volte. (Menasco, 1983)



Corollario

Se $K_1 \# K_2$ è un nodo alterno $\Rightarrow c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.

Polinomio di Alexander

Esempio - Link banale

$$\Delta(\bigcirc\bigcirc) = 0$$

infatti per la Regola 2 si ha:

$$\Delta(\infty) - \Delta(\infty) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(\bigcirc\bigcirc) = 0$$

ovvero

$$1 - 1 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(\bigcirc\bigcirc) = 0$$

Polinomio di Alexander

Esempio - Link di Hopf

$$\Delta \left(\bigcirc \bigcirc \right) = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$$

infatti si ha:

$$\Delta \left(\bigcirc \bigcirc \right) - \Delta \left(\bigcirc \bigcirc \right) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta \left(\infty \right) = 0$$

Polinomio di Alexander

Esempio - Nodo trifoglio

$$\Delta \left(\text{trifoglio} \right) = t^{-1} - 1 + t$$

infatti si ha:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\text{trifoglio} \right) &= \Delta \left(\text{trifoglio} \right) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta \left(\text{trifoglio} \right) \\ &= 1 - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) \\ &= t^{-1} - 1 + t \end{aligned}$$

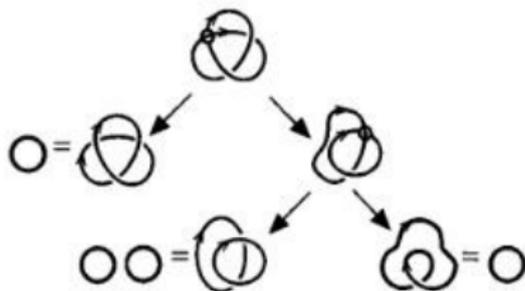
Polinomio di Alexander

Difetti

$$\Delta(L) = 0 \quad \forall L \text{ link banale di } m \text{ componenti}$$

Polinomio di Alexander

Albero di risoluzione



Definizione

Si definisce *profondità* di un link L il minimo tra le profondità di tutti gli alberi di risoluzione.

Polinomio di Conway

Definizione

Si pone $x = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$.

Polinomio di Conway

Definizione

Si pone $x = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$.

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = x\nabla(L_0)$$

Polinomio di Conway

Definizione

Si pone $x = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$.

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = x\nabla(L_0)$$

Esempi:



$$\Delta_K(t) = t^{-1} - 1 + t$$

$$\nabla_K(x) = x^2 + 1$$



$$\Delta_K(t) = t^{-1} + 3 - t$$

$$\nabla_K(x) = 1 - x^2$$

Polinomio HOMFLY

Definizione

Definizione

$$(1) \Delta(\bigcirc) = 1;$$

Polinomio HOMFLY

Definizione

Definizione

$$(1) \Delta(\bigcirc) = 1;$$

$$(2) lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0;$$

Osservazione

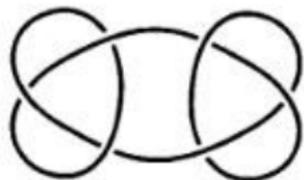
Con un'opportuna posizione potremmo riscrivere la (2) come:

$$xP(L_+) - yP(L_-) = P(L_0)$$

Polinomio HOMFLY

Proprietà

- $V(t) = P(it^{-1}, i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}))$
- $\Delta(t) = P(i, i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$
-  $P(L_1 \cup L_2) = (-l^{-1} - l)m^{-1} \cdot P(L_1)P(L_2)$
- $P(L \cup \bigcirc) = (-l^{-1} - l)m^{-1}P(L)$
- $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$



$$P(L) = (-2l^2 - l^4 + l^2 m^2)^2$$

RELAZIONI SKEIN

oo

POLINOMIO DI JONES

oooooooo
oooooo
ooooo
oooo
oooo

CONGETTURA DI TAIT

oo
oo
oooooooo

ALEXANDER, CONWAY E HOMFLY

ooooo
o
oo●

Domande?