

Master 2 Science et Ingénierie Informatiques - Labex Bézout  
parcours Algorithmique et Bioinformatique

---

# Codes bifixes, échanges d'intervalles et propriété de la base d'indice fini

Étudiant  
M. Francesco Dolce

Directeur de stage  
M. Dominique Perrin

---

Année Accadémique 2012/2013



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Ensembles récurrents . . . . .	9
1.2 Codes bifixes . . . . .	11
1.3 Automates et groupes . . . . .	13
<b>2 Ensembles forts, faibles et neutres</b>	<b>17</b>
2.1 Mots forts, faibles et neutres . . . . .	17
2.2 Le Théorème de la Cardinalité . . . . .	18
<b>3 Condition de l'arbre</b>	<b>23</b>
3.1 Ensembles acyliques et ensembles connexes . . . . .	23
3.2 Acyclicité forte et connexité forte . . . . .	25
3.3 La condition de l'arbre planaire . . . . .	27
<b>4 Ensemble d'échanges d'intervalles</b>	<b>31</b>
4.1 Échanges d'intervalles . . . . .	31
4.2 Transformations d'échange d'intervalles régulières . . . . .	32
4.3 Codage naturel . . . . .	33
4.4 Codes bifixes et échanges d'intervalles . . . . .	38
4.5 Codes bifixes et transformations régulières . . . . .	41
<b>5 Induction de Rauzy</b>	<b>45</b>
5.1 Induction de Rauzy à droite . . . . .	45
5.2 Induction de Rauzy à gauche . . . . .	48
5.3 Induction et automorphismes . . . . .	49
5.4 Induction de Rauzy bilatère . . . . .	50
5.5 Mots de premier retour . . . . .	54
<b>6 Propriété de la base d'indice fini</b>	<b>59</b>
6.1 Graphe d'incidence . . . . .	59
6.2 Automate des classes latérales . . . . .	61
6.3 Codes bifixes dans des ensembles acyliques . . . . .	63
6.4 Le Théorème de la Base . . . . .	65
<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>



# Introduction

Ce rapport porte sur les travaux que j'ai fait cette année lors de mon stage à l'Institut d'électronique et d'informatique Gaspard Monge de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

Pendant mon stage j'ai eu l'occasion de collaborer avec une équipe formée par mon directeur de stage M. Dominique Perrin et par M.me Giuseppina Rindone, ainsi que d'autres personnes extérieurs à l'Université Paris-Est comme M.me Valérie Berthé (Université Paris 7), M.me Clelia De Felice (Università degli Studi di Salerno) et M. Christophe Reutenauer (Université du Québec à Montréal).

Le but des études de cette équipe est d'étendre certains résultats connus sur les ensembles Sturmien (déjà publiés par certains membres en [1]) à des classes d'ensembles plus grandes. On appelle ici mot Sturmien, ou mot de Sturm, la généralisation sur des alphabets arbitraires - souvent appelés mots épisturmiens strictes ou mots de Arnoux-Rauzy - des mots de Sturm classiques sur deux lettres. Un ensemble Sturmien est l'ensemble des facteurs d'un mot Sturmien.

On introduit plusieurs classes d'ensembles de mots uniformément récurrents sur un alphabet de  $k + 1$  lettres ayant tous  $kn + 1$  éléments de longueur  $n$  pour tout  $n \geq 0$ .

La classe la plus petite ( $SB$ ) est formée par les ensembles Sturmien sur un alphabet binaire, c'est-à-dire quand  $k = 1$  (voir Figure 1). Elle est contenue à la fois dans la classe des ensembles d'échange d'intervalles réguliers ( $EIR$ ) et des ensembles Sturmien ( $S$ ). De plus, on peut montrer que l'intersection de  $EIR$  et  $S$  est réduite à  $S$ . En effet, les ensembles Sturmien sur plus de deux lettres ne sont pas les facteurs d'une transformation d'échange d'intervalles avec chaque intervalle étiqueté par une lettre distincte.

La classe des ensembles normoux ( $No$ ) est introduit comme une généralisation naturelle des ensembles Sturmien et des ensembles d'échange d'intervalles réguliers.

Ensuite, on introduit la classe des ensembles uniformément récurrents satisfaisants la condition de l'arbre ( $A$ ), qui contient la précédente.

Une autre classe plus grande est celle des ensembles qui satisfont la condition de neutralité ( $Ne$ ).

Toutes ces classes sont contenues dans la classe des ensembles uniformément récurrents de complexité  $kn + 1$  sur un alphabet de cardinalité  $k + 1$ .

On a essayé, dans tout le rapport, d'utiliser les conditions les plus faibles pour prouver les résultats. Par exemple, on prouve que, dans l'hypothèse que un ensemble  $F$  satisfait la condition de neutralité, tout code bifixé  $F$ -maximal

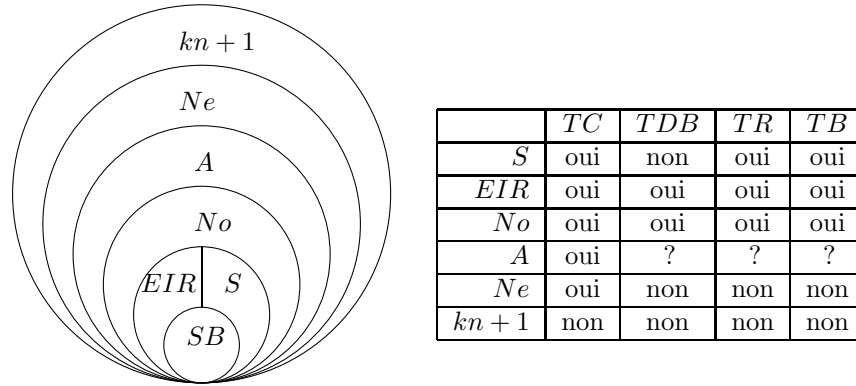


FIGURE 1 – Les classes d’ensembles des mots sur  $k+1$  lettres : Sturmien Binaire (*SB*), Sturmien (*S*), Échanges d’intervalle réguliers (*EIR*), Normaux (*No*), satisfaisant la condition de l’Arbre (*A*), Neutre (*Ne*), de complexité  $kn + 1$ . Les théorèmes satisfaits par les différents classes : Théorème de la Cardinalité (*TC*), Théorème du Décodage Bifixe (*TDB*), Théorème de Retour (*TR*), Théorème de la Base (*TB*).

de  $F$ -degré  $d$  a  $1 + d(\text{Card}(\cdot) A) - 1$  éléments (Théorème 2.8, dit Théorème de la Cardinalité).

La famille d’ensembles Sturmien n’est pas fermée par décodage pour un code bifixe maximale, même dans le cas le plus simple du code formé par les mots de longueur  $n$  fixe. En fait, si on considère le mot de Fibonacci, qui correspond à une rotation d’angle  $\alpha$  (voir Exemple 4.7), son décodage par blocs de longueur  $n$  est une transformation d’échange d’intervalles correspondante à une rotation d’angle  $n\alpha$  sur  $n + 1$  intervalles. On démontre que la classe *EIR*, contrairement à la classe *S*, est fermée par décodage pour un code bifixe maximal (Corollaire 4.30, dit Théorème du Décodage Bifixe).

Le résultat principale de ce rapport est le fait que, sous des hypothèses naturelles satisfaites par un ensemble d’échange d’intervalles régulier  $F$ , un code bifixe  $F$  sur un alphabet  $A$  est un code  $F$ -maximal de  $F$ -degré  $d$  si et seulement si il est une base du groupe libre  $A^\circ$  (Théorème 6.14, dit Théorème de la Base).

La preuve pour les ensembles d’échange d’intervalles utilise la propriété que les ensembles des mots de premiers retours forment des base du groupe libre (Théorème 5.20, dit Théorème de Retour).

Dans ces derniers mois, des autres collaborations ont eu lieu sur des sujet différents que ceux présentés dans le présent rapport. En particulier, j’ai eu la chance de discuter de *complexité et classes de conjugaison* avec M. Antonio Restivo (Università degli Studi di Palermo), de *diagrammes de Bratelli* avec M. Alejandro Maas (Universidad de Chile) et de *transformations d’échanges d’intervalles et involutions linéaires* avec M. Vincent Delecroix (Université Paris 7).

Je tiens à remercier ces derniers, aussi bien que les membres de l’équipe avec qui j’ai travaillé et en particulier mon directeur de stage Dominique Perrin, source inépuisable d’idées, et Giuseppina Rindone, présence constante qui m’a

beaucoup aidé aussi avec le français.

Je remercie également mes collègues à l'Université Paris-Est et tous ceux qui, dans le Laboratoire et ailleurs, ont rendu intéressante et fructueuse mon expérience de stage.

Francesco Dolce  
Champs-sur-Marne, Août 2013





# Chapitre 1

## Notions préliminaires

Dans ce chapitre on donnera quelques définitions et concepts de base. En particulier, dans la Section 1.1 on parlera des mots et on présentera des ensembles de mots qui satisfont certaines conditions. On introduira aussi la notion de morphisme entre deux ensembles de mots. Dans la Section 1.2 on définira les codes, tandis que dans la Section 1.3 on abordera les automates.

### 1.1 Ensembles récurrents

Soit  $A$  un alphabet fini non vide.  $A^+$  désigne l'ensemble de tous les mots non vides sur  $A$  et l'on définit  $A^* = A^+ \cup \varepsilon$  où  $\varepsilon$  (ou  $1$ ) est le mot vide. On dénote  $A^n$  l'ensemble de tous les mots de  $A$  de longueur  $n$  et  $A^\omega$  les mots infinis, c'est-à-dire les séquences strictement dénombrables de lettres de  $A$ .

De manière similaire on peut définir  $X^*$  le sousmonoïde engendré par un ensemble de mots  $X$ .

Soit  $w$  un mot de  $A^*$ . On dit que  $u \in A^*$  est un *facteur* de  $w$  s'ils existent  $v, v' \in A^*$  tels que  $w = vv'u$ . Le mot  $u$  est dit *préfixe* (resp. *suffixe*) de  $w$  si  $v = \varepsilon$  (resp.  $v' = \varepsilon$ ). Dans le cas où à la fois  $v$  et  $v'$  soient non vides, on dit que  $u$  est un *facteur interne*.

Si  $w = uv$  (resp.  $w = vu$ ) avec  $v \neq \varepsilon$  on dit que  $u$  est un *préfixe propre* (resp. *suffixe propre*) de  $w$ .

On peut étendre de façon naturelle les notions de facteur, préfixes, suffixes et facteurs internes aux mots infinis :  $u \in A^*$  est un facteur du mot  $x \in A^\omega$  s'ils existent  $v \in A^*$  et  $y \in A^\omega$  tels que  $x = vuy$ .

Soit  $F$  un ensemble de mots (finis ou infinis). On appelle  $F$  ensemble *factoriel* s'il contient tous les facteurs de ses éléments. On dénote  $F(x)$  l'ensemble des facteurs d'un mot (fini ou infini)  $x$ . Soit  $X \subseteq A^* \cup A^\omega$ . De façon similaire on dénote  $F(X)$  l'ensemble des facteurs des tous les mots  $x \in X$ , formellement  $F(X) = \cup_{x \in X} F(x)$ .

Soit  $F$  un ensemble de mots sur l'alphabet  $A$ . Pour un  $w \in F$  on dénote

$$\begin{aligned} L(w) &= \{a \in A \mid aw \in F\} \\ R(w) &= \{a \in A \mid wa \in F\} \\ E(w) &= \{(a, b) \in A \times A \mid awb \in F\} \end{aligned}$$

respectivement les ensembles des *prolongements à gauche*, des *prolongements à*

droite et des *bi-prolongements* de  $w$ . On dénote aussi les quantités

$$\ell(w) = \text{Card}(L(w)), \quad r(w) = \text{Card}(R(w)), \quad e(w) = \text{Card}(E(w)).$$

Un mot  $w$  est dit *extensible à gauche* (resp. *extensible à droite*, resp. *biextensible*) si  $\ell(w) > 0$  (resp.  $r(w) > 0$ , resp.  $e(w) > 0$ ). Un ensemble factoriel  $F$  est dit *essentiel à gauche* (resp. *essentiel à droite*, resp. *biessentiel*) si tous les mots dans  $F$  sont extensible à gauche (resp. extensible à droite, resp. biextensible).

Un mot  $w$  est dit *spécial à gauche* (resp. *spécial à droite*) si  $\ell(w) \geq 2$  (resp.  $r(w) \geq 2$ ).  $w$  est *bispécial* s'il est à la fois spécial à droite et à gauche.

Un ensemble de mots  $F$  est dit *récurrent* s'il est factoriel et pour tous  $u, v \in F$  il existe un  $w \in F$  tel que  $u w v \in F$ . Un ensemble récurrent  $F \neq \{\varepsilon\}$  est aussi biessentiel.

**Exemple 1.1.** L'ensemble  $F = A^*$  est trivialement récurrent.

**Exemple 1.2.** Soit  $A = \{a, b\}$ . On considère  $F$  l'ensemble des mots de  $A$  sans facteurs  $bb$ , c'est-à-dire  $F = A^* \setminus A^* b b A^*$ . L'ensemble  $F$  est récurrent. En effet, si  $u, v \in F$  alors  $u a v \in F$ .

Un ensemble de mots  $F$  est dit *uniformément récurrent* s'il est factoriel et si pour tout  $u \in F$  il existe un entier  $n = n(u) \geq 1$  tel que  $u$  est facteur de tous les mots dans  $F \cap A^n$ .

**Proposition 1.3.** *Un ensemble uniformément récurrent est récurrent.*

*Démonstration.* Soient  $u, v \in F$  et soit  $n$  tel que  $v$  est facteur de tout mot dans  $F \cap A^n$ . Comme  $F$  est essentiel à droite, il existe un mot  $w$  de longueur  $n$  tel que  $u w \in F$ . Du fait que  $v$  est un facteur  $w$  on a  $w = r v s$  pour quelques mots  $r, s$ . Donc  $u r v \in F$ .  $\square$

L'inverse de la Proposition 1.3 n'est pas vrai comme montré dans l'exemple ci-dessous.

**Exemple 1.4.** Soit  $A = \{a, b\}$ . L'ensemble  $F = A^*$  est récurrent mais n'est pas uniformément récurrent car  $b \in F$  mais pour tout  $n \geq 0$  il n'est pas un facteur de  $a^n \in F$ .

Soient  $A, B$  deux alphabets. Un *morphisme*  $f : A^* \rightarrow B^*$  est un morphisme de monoïdes de  $A^*$  à  $B^*$ . Si  $a \in A$  est tel que le mot  $f(a)$  commence avec  $a$  et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(a)| = \infty$ , alors il existe un unique mot infini, dénoté  $f^\omega(a)$ , qui a tous les mots  $f^n(a)$  comme préfixes. On dit que  $f^\omega(a)$  est un *point fixe* du morphisme  $f$ .

**Exemple 1.5.** Soit  $A = \{a, b\}$ . Le *morphisme de Thue-Morse* est le morphisme  $f : A^* \rightarrow A^*$  défini par  $f(a) = ab$  et  $f(b) = ba$ . Le *mot de Thue-Morse*  $x = abbabaab \dots$  est le point fixe  $f^\omega(a)$  de  $f$ . L'ensemble  $F(x)$ , qui est uniformément récurrent (voir [11]) est appelé *ensemble de Thue-Morse*.

Un morphisme  $f : A^* \rightarrow A^*$  est dit *primitif* s'il existe un entier  $k$  tel que pour chaque paire  $(a, b) \in A \times A$ , la lettre  $b$  est un facteur de  $f^k(a)$ . Si  $f$  est un morphisme primitif, l'ensemble des facteurs de n'importe quel point fixe de  $f$  est uniformément récurrent (voir [7, Proposition 1.2.3]).

Un mot infini est dit *épisturmien* si l'ensemble de ses facteurs est fermé par image miroir et pour tout  $n$ , il contient au plus un mot de longueur  $n$  spécial à droite. Il est dit *épisturmien strict* s'il contient exactement un facteur spécial à droite pour chaque longueur et, de plus, tout facteur spécial à droite  $u$  est tel que  $r(u) = \text{Card}(A)$ . Dans la littérature, les mots épisturmiens non périodiques dans un alphabet binaire (et donc épisturmiens strictes) sont appelés *Sturmiens*, tandis que les mots épisturmiens dans des alphabets de cardinalité supérieur à 2 sont appelés de *Arnoux-Rauzy*.

Un *ensemble Sturmien* est l'ensemble de facteurs d'un mot épisturmien strict.

**Exemple 1.6.** Soit  $A = \{a, b\}$ . Le *mot de Fibonacci* est le point fixe  $x = f^\omega(a) = abaababa \dots$  du morphisme  $f : A^* \rightarrow A^*$  défini par  $f(a) = ab$  et  $f(b) = a$ . Le morphisme est primitif car  $f^2(c)$  pour  $c = a, b$  contient tout  $A$  comme facteurs. Le mot  $x$  est un mot Sturmien (voir [11]). L'ensemble  $F(x)$  est dit *ensemble de Fibonacci*.

**Exemple 1.7.** Soit  $A = \{a, b, c\}$ . Le *mot de Tribonacci* est le point fixe  $x = f^\omega(a) = abacaba \dots$  du morphisme  $f : A^* \rightarrow A^*$  défini par  $f(a) = ab$ ,  $f(b) = ac$  et  $f(c) = a$ . Il est facile de voir que  $f$  est primitif. Le mot  $x$  est un mot épisturmien strict (voir [9]). L'ensemble  $F(x)$  est dit *ensemble de Tribonacci*.

Soit  $F$  un ensemble de mots. La fonction  $fn \mapsto \text{Card}(F \cap A^n)$  est appelé la fonction *complexité* de  $F$ . Une caractérisation des ensembles Sturmien sur un alphabet  $A$  est l'être de complexité  $kn + 1$  où  $k = \text{Card}(A) - 1$ .

Tout ensemble Sturmien est uniformément récurrent (voir [1, Proposition 2.3.3]). L'inverse n'est pas vrai, comme montré dans l'exemple suivant.

**Exemple 1.8.** L'ensemble de Thue-Morse défini dans l'Exemple 1.5 est uniformément récurrent mais non Sturmien car il contient quatre facteurs de longueur 2.

## 1.2 Codes bifixes

Un ensemble  $X \subseteq A^+$  de mots non vides sur un alphabet  $A$  est appelé *code* si la relation

$$x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$$

avec  $n, m \geq 1$  et  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$  implique  $n = m$  et  $x_i = y_i$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  (voir [2]).

Un *code préfixe* est un ensemble de mots non vides tel qu'aucun de ses éléments est un préfixe d'un autre. Formellement  $X$  est un code préfixe si pour tous  $u, v \in X$  distincts on a  $uA^* \cap vA^* = \emptyset$ . Il est facile à montrer que un code préfixe est un code.

On définit de manière symétrique un *code suffixe*. Un *code bifixe* est un ensemble qui est à la fois un code préfixe et un code suffixe.

Une propriété plus faible pour un code est la suivante. On dit qu'un ensemble  $X$  est un code *faiblement préfixe* si pour tout  $x, x', y \in X$  et  $y' \in X^*$  on a que si  $xy$  est un préfixe de  $x'y'$  alors  $x = x'$ . La notion de *faiblement suffixe* est symétrique.

Un *morphisme de codage* pour un code préfixe  $X \subseteq A^+$  est un morphisme  $f : B^* \rightarrow A^*$  qui envoie bijectivement  $B$  sur  $X$ .

Soit  $F$  un ensemble factoriel. Un code préfixe  $X \subseteq F$  est *maximal* en  $F$  ou *F-maximal* s'il n'est pas contenu proprement dans aucun code préfixe  $Y \subseteq F$ .

**Exemple 1.9.** Soit  $F$  l'ensemble de Fibonacci défini dans l'Exemple 1.6. L'ensemble  $X = \{a, ba\}$  est un code préfixe  $F$ -maximal (voir [1]).

Un ensemble  $X \subseteq F$  est dit *complet à droite* en  $F$  ou *F-complet à droite* si tout mot de  $F$  est un préfixe d'un mot de  $X^*$ . Soit  $F$  un ensemble factoriel. Un code préfixe est  $F$ -maximal si et seulement si il est  $F$ -complet à droite (voir [1, Proposition 3.3.2]).

De façon symétrique on dit que un code bifix  $X \subseteq F$  est  $F$ -maximal s'il n'est pas contenu proprement dans aucun code bifix  $Y \subseteq F$ . Dans le cas où  $F$  est récurrent, un code bifix fini est  $F$ -maximal comme code bifix si et seulement si il est  $F$ -maximal comme code préfixe (voir [1, Proposition 4.2.2]).

De plus, dans le cas où  $F$  est uniformément récurrent, tout code bifix fini  $X \subseteq F$  est contenu dans un code  $F$ -maximal bifix fini (voir [1, Théorème 4.4.3]).

Un *parse* d'un mot  $w$  par rapport à un ensemble  $X$  est une triple  $(v, x, u)$  tel que  $w = vxu$  où  $v \in A^* \setminus A^*X$ ,  $x \in X^*$  et  $u \in A^* \setminus XA^*$ , c'est-à-dire  $v$  n'a pas de suffixes en  $X$ ,  $u$  n'a pas de préfixes en  $X$  et  $x$  est une composition de mots de  $X$ .

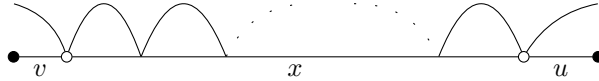


FIGURE 1.1 – Parse  $(v, x, u)$  d'un mot  $w$  par rapport à  $X$ .

Le nombre de parses d'un mot  $w$  par rapport à un ensemble  $X$  est dénoté par  $\delta_X(w)$ .

**Exemple 1.10.** Soit  $X = \emptyset$ . Pour tout mot  $w \in A^*$  on a  $\delta_X(w) = |w| + 1$ .

Soit  $F$  un ensemble factoriel. Le  $F$ -degré de  $X$ , dénoté  $d_F(X)$  est le nombre maximal de parses d'un mot de  $F$ , c'est-à-dire

$$d_F(X) = \max_{w \in F} \delta_X(w).$$

On remarque que le  $F$ -degré peut être fini ou infini. Le  $A^*$ -degré d'un ensemble  $X$  est appelé simplement le *degré* de  $X$  et il est dénoté  $d(X)$ .

Si  $X$  est un code bifix, le nombre de parses d'un mot  $w$  est égal au nombre de suffixes de  $w$  qui n'ont pas de préfixes dans  $X$  et, de symétriquement, aussi au nombre de préfixes de  $w$  qui n'ont pas de suffixes dans  $X$  (voir [2, Proposition 6.1.6]).

Soient  $F$  un ensemble factoriel et  $X \subseteq F$  un ensemble. L'ensemble des *facteurs internes* de  $X$ , dénoté par  $I(X)$  est l'ensemble des facteurs internes de mots de  $X$ . De manière équivalente, on a

$$I(X) = \{w \in A^* \mid A^+wA^+ \cap X \neq \emptyset\}.$$

Soient  $F$  un ensemble récurrent et  $X$  un code  $F$ -maximal bifix fini de  $F$ -degré  $d$ . Un mot  $w \in F$  est tel que  $\delta_X(w) < d$  si et seulement si il est un facteur interne de  $X$ , c'est-à-dire

$$I(X) = \{w \in F \mid \delta_X(w) < d\}$$

(voir [1, Théorème 4.2.8]). Ainsi tout mot de  $X$  de longueur maximale a-t-il  $d$  parses. Cela implique, en particulier, que le  $F$ -degré  $d$  est fini.

**Exemple 1.11.** Soit  $F$  un ensemble récurrent. Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'ensemble  $F \cap A^n$  est un code  $F$ -maximal bifixe de  $F$ -degré  $n$ .

**Exemple 1.12.** Soit  $F$  l'ensemble de Fibonacci défini dans l'Exemple 1.6. L'ensemble  $X = \{aaba, ab, baa, baba\}$  est un code bifixe fini. Il est  $F$ -maximal car il est  $F$ -complet à droite. Il a  $F$ -degré 3. En effet, le mot  $aaba$ , de longueur maximale et donc en  $F \setminus I(X)$ , a trois parses :  $(1, aaba, 1)$ ,  $(a, ab, a)$  et  $(aa, 1, ba)$ .

### 1.3 Automates et groupes

On dénote  $\mathcal{A} = (Q, i, T)$  un automate déterministe où  $Q$  est l'ensemble d'états,  $i \in Q$  est l'état initial et  $T \subseteq Q$  est l'ensemble d'états terminaux. Pour tout  $p \in Q$  et  $w \in A^*$  on dénote  $p \cdot w = q$  quand il existe un chemin étiqueté  $w$  de  $p$  à  $q$ , tandis que l'on dénote  $p \cdot w = \emptyset$  sinon.

L'ensemble *reconnu* par l'automate  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des mots  $w \in A^*$  tels que  $i \cdot w \in T$ . Un ensemble de mots est dit *rationnel* s'il est reconnu par un automate fini.

Un automate déterministe  $\mathcal{A} = (Q, i, T)$  est dit *trim* si pour tout  $q \in Q$  il existe un chemin de  $i$  à  $q$  et un chemin de  $q$  à un certain  $t \in T$ .

Un automate est appelé *simple* s'il est trim et il a un unique état terminal qui coïncide avec l'état initial.

Un automate  $\mathcal{A} = (Q, i, T)$  est *complet* si pour tout état  $p \in Q$  et toute lettre  $a \in A$ , on a  $p \cdot a \neq \emptyset$ .

Soit  $X \subseteq A^*$  un ensemble de mots. L'*automate minimal* de  $X$  est l'automate déterministe  $\mathcal{A}(X)$  avec états les ensembles non vides  $u^{-1}(X) = \{v \in A^* \mid uv \in X\}$  pour  $u \in A^*$ , état initial l'ensemble  $X$ , états finaux les ensembles  $u^{-1}X$  pour  $u \in X$  et transitions  $(u^{-1}X) \cdot a = (ua)^{-1}X$ .

Soit  $X \subseteq A^*$  un code préfixe. Il existe un automate simple  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  qui reconnaît  $X^*$ . De plus, l'automate minimal de  $X^*$  est simple.

Soient  $X$  un code préfixe et  $P$  l'ensemble des préfixes propres de  $X$ . L'*automate literal* de  $X^*$  est l'automate simple  $\mathcal{A} = (P, 1, 1)$  avec transitions définies pour  $p \in P$  et  $a \in A$  par

$$p \cdot a = \begin{cases} pa & \text{si } pa \in P, \\ 1 & \text{si } pa \in X, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier que cet automate reconnaît  $X^*$ . Donc, pour tout code préfixe  $X \subseteq A^*$  existe un automate simple  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  qui reconnaît  $X^*$ . De plus, l'automate minimal de  $X^*$  est simple. L'automate literal n'est pas, en général, minimal (voir Exemple 1.13).

**Exemple 1.13.** Soit  $X = \{aa, ab, bba, bbb\}$ . L'automate literal et l'automate minimal de  $X^*$  sont représenté dans la Figure ??.

Un automate simple  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  est dit *réversible* si pour tout  $a \in A$ , la fonction partielle  $\varphi_{\mathcal{A}}(a) : p \rightarrow p \cdot a$  est injective. Cette condition permet de construire l'*inverse* de l'automate défini comme l'automate avec les mêmes états, 1 comme unique état initial et final et transitions données par  $p \cdot a = q$

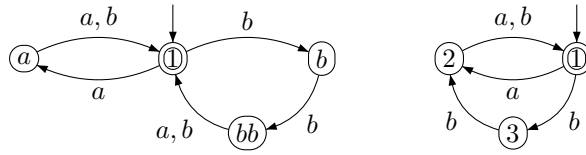


FIGURE 1.2 – L'automate literal et l'automate minimal de  $X^*$ .

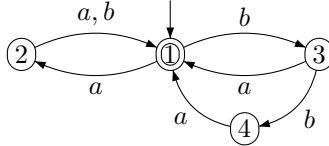


FIGURE 1.3 – L'automate minimal de  $X^*$ .

si et seulement si  $q \cdot a = p$  dans  $\mathcal{A}$ . Une automate réversible est minimal (voir [14]). L'ensemble reconnu par un automate réversible est engendré par un code bifixé.

On denote avec  $A^\circ$  le groupe libre sur l'alphabet  $A$ . Ce groupe est l'ensemble de tous les mots dans l'alphabet  $A \cup A^{-1}$  qui son réduits, dans le sens qu'ils n'ont pas de facteurs  $aa^{-1}$  ou  $a^{-1}a$  pour  $a \in A$ . Pour tout mot  $w \in A \cup A^{-1}$  existe un unique mot réduit équivalent à  $w$  modulo les relations  $aa^{-1}$  et  $a^{-1}a$  pour  $a \in A$ . Le produit de deux éléments  $u, v \in A^\circ$  est le mot réduit équivalent à  $uv$ .

Un automate déterministe  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  est dit un *automate à groupe* si pour tout  $a \in A$  la fonction  $\varphi_{\mathcal{A}} : p \rightarrow p \cdot a$  est une permutation de  $Q$ . Quand  $Q$  est fini, un automate réversible et complet est aussi un automate à groupe.

La Proposition suivante a été démontrée par Reutenauer dans [14] (voir aussi [2]).

**Proposition 1.14.** *Soit  $X \subseteq A^+$  un code bifixé. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $X^* = \langle X \rangle \cap A^*$ ,
- (ii) *l'automate minimal de  $X^*$  est réversible.*

L'exemple suivant montre que, en général, l'automate minimal d'un code bifixé n'est pas réversible.

**Exemple 1.15.** Soit  $X = \{aa, ab, ba, bba\}$ . L'ensemble  $X$  n'est pas un ode bifixé. L'automate minimal de  $X^*$  est représenté en Figure 1.3. Cet automate n'est pas réversible car  $2 \cdot a = 4 \cdot a = 1$ . La condition (i) de la Proposition 1.14 n'est pas satisfaite car  $bb = ba(aa)^{-1}ab$  est dans  $\langle X \rangle \cap A^*$  mais pas dans  $X^*$ .

Soit  $\mathcal{A} = (Q, i, T)$  un automate déterministe. Un *chemin généralisé* est une séquence  $(p_0, a_1, p_1, a_2, \dots, p_n, a_n, p_n)$  avec  $a_i \in A \cup A^{-1}$  et  $p_i \in Q$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq n$  on a  $p_{i-1} \cdot a_i = p_i$  si  $a_i \in A$  et  $p_i \cdot a_i = p_{i-1}$  si  $a_i \in A^{-1}$ . L'*étiquette* du chemin généralisé est l'élément  $a_1 a_2 \dots a_n$  du groupe libre  $A^\circ$ . Soit  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  un automate déterministe. L'ensemble des étiquettes des chemins généralisés dans  $\mathcal{A}$  de 1 à 1 est un sous-groupe de  $A^\circ$  dit le *sous-groupe décrit* par  $\mathcal{A}$ .

Un chemin dans un automate déterministe est un cas particulier d'un chemin généralisé. Si  $\mathcal{A}$  a un seul état final qui coïncide avec l'état initial, le sous-monoïde de  $A^*$  reconnu par  $\mathcal{A}$  est contenu dans le sous-groupe de  $A^\circ$  décrit par  $\mathcal{A}$ .

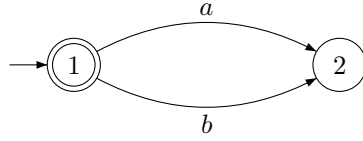


FIGURE 1.4 – L'automate  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 1.16.** Soit  $\mathcal{A} = (Q, 1, 1)$  l'automate défini par  $Q = \{1, 2\}$ ,  $1 \cdot a = 1 \cdot b = 2$  et  $2 \cdot a = 2 \cdot b = \emptyset$  (voir Figure 1.4).

Le sous-monoïde reconnu par  $\mathcal{A}$  est  $\{1\}$ . Le sous-groupe décrit par  $\mathcal{A}$  est le groupe engendré par  $ab^{-1}$ .

Le résultat suivant a été démontré dans [1, Proposition 6.1.3].

**Proposition 1.17.** Soient  $\mathcal{A}$  un automate simple et  $X$  le code préfixe qui engendre le sous-monoïde reconnu par  $\mathcal{A}$ . Le sous-groupe décrit par  $\mathcal{A}$  est engendré par  $X$ . De plus, si  $\mathcal{A}$  est réversible, alors  $X^* = \langle X \rangle \cap A^*$ .

Pour tout sous-groupe  $H$  de  $A^\circ$ , le sous-monoïde  $H \cap A^*$  est engendré par un code bifix. Un sous-groupe  $H$  de  $A^\circ$  est *engendré positivement* s'il existe un ensemble  $X \subseteq A^*$  tel que  $X$  engendre  $H$ . On peut toujours choisir  $X$  un code bifix. En effet, si  $H$  est engendré positivement, l'ensemble  $H \cap A^*$  engendre le sous-groupe  $H$ . Donc, si  $X$  est le code bifix qui engendre le sous-monoïde  $H \cap A^*$ ,  $X$  engendre aussi le sous-groupe  $H$ .

Le résultat suivant a été démontré dans [1, Proposition 6.1.4].

**Proposition 1.18.** Pour tout sous-groupe engendré positivement  $H$  de  $A^\circ$  il existe un unique automate réversible  $\mathcal{A}$  tel que  $H$  est le sous-groupe décrit par  $\mathcal{A}$ .

L'automate réversible  $\mathcal{A}$  tel que  $H$  est le sous-groupe décrit par  $\mathcal{A}$  est appelé l'*automate de Stallings* de  $H$ .

Le résultat suivant a été démontré dans [1, Proposition 6.1.5].

**Proposition 1.19.** Soit  $M$  un sous-monoïde de  $A^*$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $M$  est reconnu par un automate à groupe avec  $d$  états ;
- (ii)  $M = \varphi^{-1}(K)$ , où  $K$  est un sous-groupe d'indice  $d$  d'un groupe  $G$  et  $\varphi$  est un morphisme surjectif de  $A^*$  à  $G$  ;
- (iii)  $M = H \cap A^*$ , où  $H$  est un sous-groupe d'indice  $d$  de  $A^\circ$ .

De plus, si une des conditions équivalentes est vérifiée, l'ensemble minimal de générateurs de  $M$  est un code bifix maximal de degré  $d$ .

Un code bifix  $Z$  tel que  $Z^*$  satisfait une des conditions équivalentes de la Proposition 1.19 est appelé un *code à groupe*.

La Proposition suivante montre que, en particulier, un sous-groupe d'indice fini est engendré positivement (voir [1, Proposition 6.1.6]).

**Proposition 1.20.** Soit  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $A^\circ$ . L'automate minimal  $\mathcal{A}$  de  $H \cap A^*$  est un automate à groupe qui décrit le sous-groupe  $H$ .

Soit  $X$  le groupe de code tel que  $\mathcal{A}$  décrit  $X^*$ . Alors le sous-groupe engendré par  $X$  est  $H$ .

**Exemple 1.21.** D'après le point (ii) de la Proposition 1.19, l'ensemble  $A^d$  est un code à groupe. Donc il est un code bifix maximal de degré  $d$ . D'après la Proposition 1.20, l'intersection  $\langle A^d \rangle \cap A^*$  est le sous-monoïde engendré par  $A^d$ . Il est composé des mots de longueur un multiple de  $d$ .



## Chapitre 2

# Ensembles forts, faibles et neutres

Dans ce chapitre on abordera trois classes de mots : les mots forts, les mots neutre et les mots faibles. On verra que on peut étendre ces notions même aux ensembles. Le résultat principal est le Théorème 2.8, qui corrèle la cardinalité d'un code bifixé  $F$ -maximal fini avec son  $F$ -degré.

### 2.1 Mots forts, faibles et neutres

Soit  $F$  un ensemble factoriel. Pour un mot  $w \in F$  on définit

$$m(w) = e(w) - \ell(w) - r(w) + 1.$$

On dit que un mot  $w$  est *fort* (resp. *faible*, resp. *neutre*) par rapport à  $F$  si  $m(w) > 0$  (resp.  $m(w) < 0$ , resp.  $m(w) = 0$ ).

On utilisera le résultat suivant.

**Lemme 2.1.** *Soit  $F$  un ensemble factoriel. Un mot  $w \in F$  est fort (resp. faible, resp. neutre) si et seulement si  $r(w) - 1 < \sum_{a \in L(w)} (r(aw) - 1)$  (resp.  $r(w) - 1 > \sum_{a \in L(w)} (r(aw) - 1)$ , resp.  $r(w) - 1 = \sum_{a \in L(w)} (r(aw) - 1)$ ).*

*Démonstration.* Le résultat se voit facilement à partir de l'équation

$$\sum_{a \in L(w)} (r(aw) - 1) = e(w) - \ell(w).$$

□

On dit que un mot biextensible est *ordinaire* si  $E(w) \subseteq (a \times A) \cup (A \times b)$  pour quelque  $(a, b) \in E(w)$ . Si  $F$  est biessentiel, tout mot ordinaire est neutre. En effet, on a  $E(w) = (a \times (R(w) \setminus b)) \cup ((L(w) \setminus a) \times b) \cup (a, b)$  et donc  $e(w) = \ell(w) + r(w) - 1$ .

**Observation 2.2.** Dans un ensemble Sturmien, tout mot est ordinaire.

Un ensemble  $F$  est dit *fort* (resp. *faible*, resp. *neutre*) s'il est factoriel et tout mot biextensible  $w \in F$  est fort ou neutre (resp. faible ou neutre, resp. neutre).

**Lemme 2.3.** Soit  $F$  un ensemble fort et soit  $k = \text{Card}(F \cap A) - 1$ . On a

$$\sum_{w \in F \cap A^n} (r(w) - 1) \geq k.$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . La propriété est vraie pour  $n = 0$ . En appliquant le Lemme 2.1 et l'hypothèse inductive, on en déduit que

$$\sum_{w \in F \cap A^n} (r(w) - 1) = \sum_{u \in F \cap A^{n-1}} \left( \sum_{a \in L(u)} (r(au) - 1) \right) \geq \sum_{u \in F \cap A^{n-1}} (r(u) - 1) \geq k.$$

□

**Proposition 2.4.** Soit  $F$  un ensemble fort (resp. faible, resp. neutre). La complexité de  $F$  est au moins  $kn + 1$  (resp. au plus  $kn + 1$ , resp.  $kn + 1$ ) où  $k = \text{Card}(F \cap A) - 1$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . La propriété est vraie pour  $n = 1$ . On suppose maintenant vrai pour  $n \geq 1$ . D'après le Lemme 2.3 et l'hypothèse inductive, on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Card}(F \cap A^{n+1}) &= \sum_{w \in F \cap A^{n+1}} e(w) \\ &\geq \sum_{w \in F \cap A^{n+1}} (\ell(w) + r(w) - 1) \\ &= \sum_{w \in F \cap A^{n+1}} \ell(w) + \sum_{w \in F \cap A^{n+1}} (r(w) - 1) \\ &\geq kn + 1 + k \\ &= k(n + 1) + 1 \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété aussi pour  $n + 1$ . □

L'inverse n'est pas vrai. En effet dans l'exemple suivant on montre qu'il existe un ensemble non neutre de complexité  $2n + 1$  sur un alphabet à 3 lettres.

**Exemple 2.5.** Soit  $A = \{a, b, c\}$ . Le mot de Chacon sur trois lettres est le point fixe  $x = f^\omega(a) = aabcaabcbcab \dots$  du morphisme  $f : A^* \rightarrow A^*$  défini par  $f(a) = aabc$ ,  $f(b) = bc$  et  $f(c) = abc$ . L'ensemble de Chacon est l'ensemble  $F$  des facteurs de  $x$ . Il a complexité  $2n + 1$  (voir [7, Section 5.5.2]). Cet ensemble contient des mots forts, neutres et faibles. En effet,  $F \cap A^2 = \{aa, ab, bc, ca, cb\}$ , ce qui montre que  $m(\varepsilon) = 0$ . De plus,  $E(abc) = \{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b)\}$ , d'où  $m(abc) = 1$ . Enfin, on a  $E(bca) = \{(a, a), (cb)\}$  et donc  $m(bca) = -1$ .

## 2.2 Le Théorème de la Cardinalité

Pour démontrer le Théorème de la Cardinalité on aura besoin de quelques résultats concernant la théorie des arbres. On utilisera les notions habituelles de racine, nœud, fils et parent et le fait que l'on peut représenter un code préfixe par un arbre.

Le lemme suivant est un résultat très connu qui rapporte le nombre des feuilles d'un arbre à la somme des degrés des ses nœuds internes.

**Lemme 2.6.** Soient  $X$  un code préfixe et  $P$  l'ensemble de ses préfixes propres. Alors  $\text{Card}(X) = 1 + \sum_{p \in P} (r(p) - 1)$ .

On donne un ordre aux nœuds de l'arbre en définissant  $m \leq n$  si  $m$  est un descendant de  $n$ .

**Lemme 2.7.** *Soit  $T$  un arbre fini avec racine  $r$  sur un ensemble  $N$  de nœuds. Soient  $d \geq 1$  et  $\pi, \alpha$  deux fonctions de  $N$  à  $\mathbb{N}$  telles que :*

- (i) *pour tout nœud interne  $n$ , on a  $\pi(n) \leq \sum \pi(m)$  (resp.  $\pi(n) \geq \sum \pi(m)$ ) où la somme est prise sur les enfants de  $n$ ,*
- (ii) *pour toute feuille  $m$  de  $T$ , on a  $\sum_{m \leq n} \alpha(n) = d$ .*

Alors  $\sum_{n \in N} \alpha(n)\pi(n) \geq d\pi(r)$  (resp.  $\sum_{n \in N} \alpha(n)\pi(n) \leq d\pi(r)$ ).

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le nombre des nœuds de  $T$ . Si  $T$  est composé que de la racine, alors le fait que  $d = \alpha(r)$  implique que  $\alpha(r)\pi(r) = d\pi(r)$ .

On suppose le résultat vrai pour les arbres avec moins de nœuds que  $T$ . Comme  $T$  est fini, il existe un nœud  $m$  tel que tous ses enfants sont des feuilles. La somme  $\sum_{x \leq n} \alpha(n) = \alpha(x) + \sum_{m \leq n} \alpha(n)$  a la même valeur pour tout fils  $x$  de  $m$ . Ainsi aussi la valeur  $v = \alpha(x)$  est-elle la même pour tout fils  $x$  de  $m$ .

Soient  $T'$  l'arbre obtenu de  $T$  en supprimant tous les fils de  $m$  et  $N'$  l'ensemble des nœuds de  $T'$ . Soit  $\pi'$  la restriction de  $\pi$  à  $N'$  et l'on défine  $\alpha'$  par

$$\alpha'(n) = \begin{cases} \alpha(n) & \text{si } n \neq m \\ \alpha(m) + v & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est facile à démontrer que  $T', \pi'$  et  $\alpha'$  satisfont les hypothèses du lemme. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in N} \alpha(n)\pi(n) &= \sum_{n \in N' \setminus m} \alpha(n)\pi(n) + \alpha(m)\pi(m) + \sum_{x \leq m} v\pi(x) \\ &= \sum_{n \in N' \setminus m} \alpha'(n)\pi'(n) + \alpha(m)\pi(m) + v \sum_{x \leq m} \pi(x) \\ &\geq \sum_{n \in N' \setminus m} \alpha'(n)\pi'(n) + (\alpha(m) + v)\pi(m) \\ &= \sum_{n \in N' \setminus m} \alpha'(n)\pi'(n) + \alpha'(m)\pi'(m) \\ &= \sum_{n \in N'} \alpha'(n)\pi'(n) \\ &\geq d\pi'(r) = d\pi(r). \end{aligned}$$

L'autre cas est démontré de manière symétrique. □

Soit  $F$  un ensemble récurrent sur un alphabet  $A$ . Pour un code  $F$ -maximal bifixe fini  $X$  de  $F$ -degré  $d$  on dénote

$$m(X) = \text{Card}(X) - 1 - d(\text{Card}(A) - 1).$$

**Théorème 2.8** (Théorème de la Cardinalité). *Soient  $F$  un ensemble récurrent contenant  $A$  et  $X \subseteq F$  un code bifixe  $F$ -maximal fini de  $F$ -degré  $d$ . Si  $F$  est fort (resp. faible, resp. neutre) alors  $m(X) \geq 0$  (resp.  $m(X) \leq 0$ , resp.  $m(X) = 0$ ).*

*Démonstration.* On suppose que  $F$  soit fort. Soient  $k > \max_{w \in X} |x|$  et  $N$  l'ensemble des mots de  $F$  de longueur au plus  $k$ . Si l'on considère tout mot  $w$  comme le père de  $aw$  pour  $a \in A$  on peut voir l'ensemble  $N$  comme un arbre  $T$  avec racine le mot vide  $\varepsilon$ . Les feuilles de  $T$  sont les éléments de  $F$  de longueur  $k$ .

Pour tout  $w \in N$  on pose  $\pi(w) = r(w) - 1$ . Soit

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un préfixe propre de } X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que les hypothèses du Lemme 2.7 sont satisfaites.

Soit  $u \in N$ . D'après le Lemme 2.1 on a  $\sum_{a \in L(u)} (r(au) - 1) \geq r(u) - 1$ . Cela implique que  $\sum_{au \in F} \pi(au) \geq \pi(u)$ , ce qui montre que la condition (i) est satisfaite.

Soit  $w$  une feuille de  $T$ , c'est-à-dire un mot de  $F$  de longueur  $k$ . Comme  $k$  est plus grand que la longueur maximale des mots de  $X$ , le mot  $w$  n'est pas un facteur interne de  $X$ . Ainsi  $w$  a-t-il  $d$  parses par rapport à  $X$  et donc  $d$  suffixes qui ne sont pas de préfixes propres de  $X$ , d'où  $\sum_{w \leq u} \alpha(u) = d$ , ce qui montre que même la condition (ii) est satisfaite.

D'après le Lemme 2.7 on a donc  $\sum_{n \in N} \alpha(n)\pi(n) \geq d\pi(\varepsilon)$ . Soit  $P$  l'ensemble des préfixes propres de  $X$ . D'après la définition de  $\alpha$  on a  $\sum_{n \in N} \alpha(n)\pi(n) = \sum_{p \in P} \pi(p)$  et, d'après la définition de  $\pi$ ,  $d\pi(\varepsilon) = d(\text{Card}(A) - 1) \leq \sum_{p \in P} (r(p) - 1)$ .

En utilisant le Lemme 2.6 on en déduit que  $\text{Card}(X) \geq 1 + d(\text{Card}(A) - 1)$ , d'où  $m(X) > 0$ .

De manière symétrique on peut démontrer que  $m(X) \leq 0$  si  $F$  est faible. Le cas où  $F$  est neutre devient donc immédiat.  $\square$

On remarque que pour un ensemble récurrent neutre  $F$ , un code biface  $X \subseteq F$  peut être infini. En effet ce cas peut arriver même dans le cas où  $F$  est Sturmien (voir [1]).

On peut illustrer la preuve du Théorème 2.8 avec l'exemple suivant.

**Exemple 2.9.** Soient  $B = \{x, y, z, t\}$  et  $G$  l'ensemble des mots sur l'alphabet  $B$  représenté dans la Figure 2.1. Cet ensemble peut être étendue à un ensemble neutre en ajoutant des mots de longueur 5 et plus (voir Exemple 4.33). Pour simplifier on appellera  $G$  même le nouveau ensemble.

Dans la Figure 2.1 la valeur de  $r$  est indiqué pour chaque nœud spécial à droite.

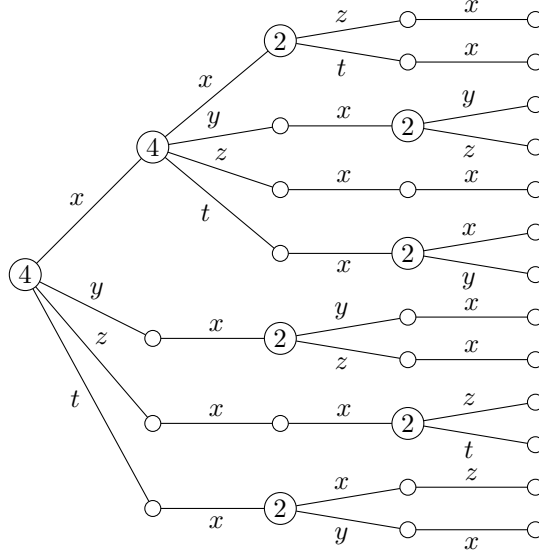


FIGURE 2.1 – Un ensemble  $G$  neutre.

Les codes bifixes

$$Y = \{xx, xyx, xz, xt, y, zx, tx\} \text{ et } Z = \{x, yxy, yxz, zxxz, zaxt, txxz, txy\}$$

sont  $G$ -maximaux et ils ont tous les deux  $G$ -degré 2.

En accord avec le Théorème 2.8, on a  $\text{Card}(Y) = \text{Card}(Z) = 1 + 2(\text{Card}(B) - 1) = 7$ .

Les codes  $Y$  et  $Z$  sont représentés en Figure 2.2 avec les valeurs de  $r(p) - 1$  indiqués pour les préfixes propres  $p$  spéciaux à droite de deux codes.

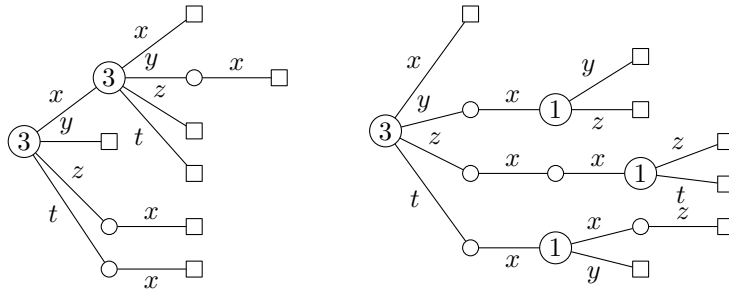


FIGURE 2.2 – Deux codes  $G$ -maximaux bifixes de  $G$ -degré 2.

Comme pour  $Y$  et  $Z$  le  $G$ -degré est 2 et  $\pi(\varepsilon) = r(\varepsilon) - 1 = 3$ , en accord avec le Lemme 2.7, la somme des valeurs de  $r(p) - 1$  est dans les deux cas 6.

L'exemple suivant montre que si un ensemble  $F$  n'est pas neutre alors pour un code  $X$  satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.8 en général  $m(X) \neq 0$ .

**Exemple 2.10.** Soit  $F$  l'ensemble de Chacon vu dans l'Exemple 2.5. Soient  $X = F \cap A^4$  et  $Y, Z$  les codes  $F$ -maximaux bifixes de  $F$ -degré 4 représentés en Figure 2.3. Ces codes sont obtenus de  $X$  par transformation interne (voir [1]) respectivement par rapport à  $abc$  et à  $bca$ . Le code bifixe  $Y$  a 10 éléments, tandis que  $\text{Card}(Z) = 8$ . Dans les deux cas, le Théorème 2.8 n'est pas satisfait.

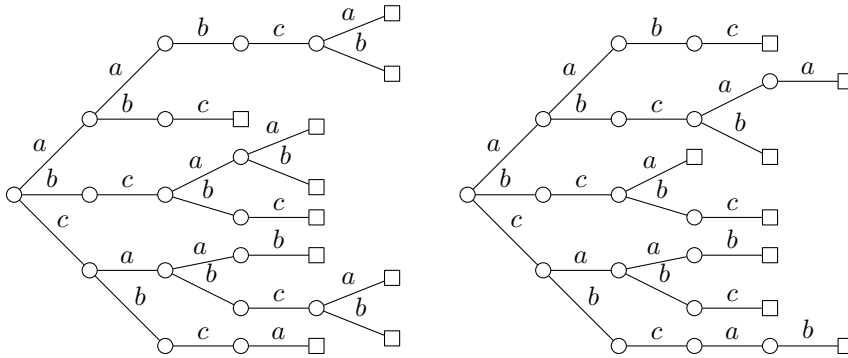


FIGURE 2.3 – Deux codes  $F$ -maximaux bifixes de  $F$ -degré 4.



## Chapitre 3

# Condition de l'arbre

Dans ce chapitre on donnera des conditions sur les ensembles : l'acyclicité, la connexité et la condition de l'arbre. On donnera aussi une variante de cette dernière dit de l'arbre planaire. Pour chacune de ces conditions, il en existe une plus forte, notamment la condition de forte acyclicité, de forte connexion, etc. On prouvera que chaque condition forte est équivalente à sa correspondante faible.

### 3.1 Ensembles acyliques et ensembles connexes

Soient  $F$  un ensemble factoriel et  $w$  un mot biextensible. On définit le *graphe d'extension* en  $F$  de  $w$  comme le graphe non orienté  $G(w)$  avec pour sommets l'union disjointe de  $L(w)$  et  $R(w)$  et pour arêtes les paires  $(a, b) \in E(w)$ , où  $a \in L(w)$  et  $b \in R(w)$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $F$  l'ensemble de Tribonacci vu dans l'Exemple 1.7. Le graphes d'extension  $G(\varepsilon)$  et  $G(ab)$  sont représentés dans la Figure 3.1

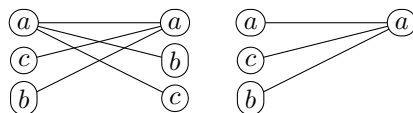


FIGURE 3.1 – Les graphes d'extensions  $G(\varepsilon)$  et  $G(ab)$  pour l'ensemble de Fibonacci.

On rappelle que un graphe non orienté est un arbre connexe et acyclique.

On dit que un ensemble  $F$  satisfait la *condition d'acyclicité* (resp. *condition de connexité*) ou, de façon équivalente, qu'il est *acyclique* (resp. *connexe*) s'il est biessentiel et pour tout mot biextensible  $w \in F$ , le graphe  $G(w)$  est acyclique (resp. connexe). On dit qu'un ensemble  $F$  satisfait la *condition de l'arbre* s'il est à la fois acyclique et connexe.

On remarque que dans un ensemble biessentiel  $F$ , pour tout mot ordinaire  $w$  le graphe  $G(w)$  est un arbre. L'inverse n'est pas vrai, c'est-à-dire  $G(w)$  peut être un arbre même si  $w$  n'est pas ordinaire.

Si  $F$  est un ensemble biessentiel, alors  $F$  satisfait la condition de l'arbre si et seulement si  $G(w)$  est un arbre pour tout mot bispécial. En effet, si  $w$  n'est pas bispécial alors  $G(w)$  est trivialement un arbre.

**Exemple 3.2.** Un ensemble Sturmien  $F$  satisfait la condition de l'arbre. En effet,  $F$  est biessentiel et tout mot bispécial est ordinaire.

Un ensemble satisfaisant la condition de l'arbre est clairement neutre. L'inverse n'est pas vrai, comme on montre dans l'exemple suivant.

**Exemple 3.3.** Soient  $A = \{a, b, c\}$  et  $F$  l'ensemble des facteurs de  $a^* \{bc, bcbc\} a^*$ . L'ensemble  $F$  est biessentiel. De plus,  $F$  est neutre. En effet les seuls mots bispéciaux sont  $\varepsilon$ ,  $bc$  et  $a^n$  pour  $n \geq 1$ . Le mot vide est neutre car  $F \cap A^2 = \{aa, ab, bc, ca, cb\}$  et donc

$$e(\varepsilon) = \text{Card}(F \cap A^2) = 5 = \ell(\varepsilon) + r(\varepsilon) - 1,$$

tandis que l'on a

$$e(bc) = 3 = \ell(bc) + r(bc) - 1 \text{ et } e(a^n) = 3 = \ell(a^n) + r(a^n) - 1.$$

Cependant  $F$  n'est ni acyclique ni connexe, car le graphe  $G(\varepsilon)$  contient un cycle et a deux composantes connexes (voir Figure 3.2).

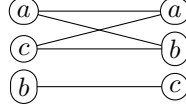


FIGURE 3.2 – Le graphe  $G(\varepsilon)$  pour l'ensemble  $F$ .

Ils existent aussi des ensembles uniformément récurrent qui sont neutres mais qui satisfont la condition d'acyclicité mais pas celle de connexité (voir [5] et [3]).

L'exemple suivant montre un ensemble qui est uniformément récurrent et neutre mais qui ne satisfait pas la condition de l'arbre (il n'est pas ni acyclique ni connexe).

**Exemple 3.4.** Sient  $B = \{1, 2, 3\}$  un alphabet et  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  défini par

$$\tau(a) = 12, \quad \tau(b) = 2, \quad \tau(c) = 3, \quad \tau(d) = 13.$$

Soit  $G$  l'ensemble des facteurs du mot infini  $\tau(\sigma^\omega(a))$  (voir Figure 3.3).

L'ensemble  $Y = \tau(A)$  est un code préfixe. Il n'est pas un code suffixe mais il est faiblement suffixe (voir la Section 1.1).

Soit  $g : \{a, c\}A^* \cap A^*\{a, c\} \rightarrow B^*$  la fonction définie par

$$g(w) = \begin{cases} 3\tau(w) & \text{si } w \text{ commence et finit avec } a \\ 3\tau(w)1 & \text{si } w \text{ commence avec } a \text{ et finit avec } c \\ 2\tau(w) & \text{si } w \text{ commence avec } c \text{ et finit avec } a \\ 2\tau(w)1 & \text{si } w \text{ commence avec } c \text{ et finit avec } c \end{cases}$$

On peut vérifier, en utilisant le fait que  $Y$  est un code préfixe et faiblement suffixe, que l'ensemble des mots bispéciaux non vides de  $G$  is  $\{2, 31\} \cup g(S)$  où  $S$  est l'ensemble des mots bispéciaux de  $F$ . De plus, on peut vérifier que l'ensemble  $g(S)$  est neutre. Comme les mots 2, 31 sont aussi neutres, l'ensemble  $G$  est neutre. Il est uniformément récurrent car  $F$  est uniformément récurrent. L'ensemble  $G$  ne satisfait pas la condition de l'arbre car le graphe  $G(\varepsilon)$  n'est ni acyclique ni connexe (voir la Figure 3.4).

On remarque que un ensemble  $F$  acyclique est faible, c'est à dire que pour tout  $w \in F$  on a  $e(w) \leq r(w) + \ell(w) - 1$ .



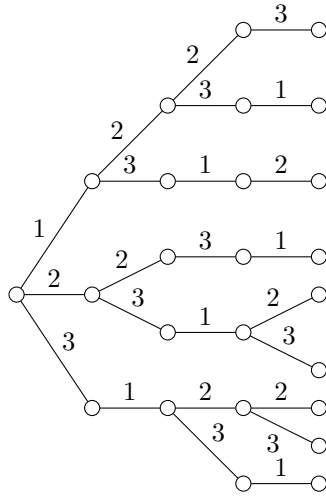


FIGURE 3.3 – L'ensemble  $G$ .

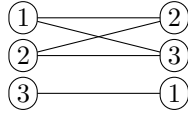


FIGURE 3.4 – Le graphe  $G(\varepsilon)$  pour l'ensemble  $G$ .

## 3.2 Acyclicité forte et connexité forte

Soient  $F$  un ensemble et  $w \in F$  un mot. Soient  $U \subseteq A^*$  un code suffixe fini et  $V \subseteq A^*$  un code préfixe fini. On définit

$$U(w) = \{\ell \in U \mid \ell w \in F\} \quad \text{et} \quad V(w) = \{r \in V \mid wr \in F\}.$$

Soit  $G_{U,V}(w)$  le graphe non orienté avec ensemble de sommets deux copies disjointes de  $U(w)$  et  $V(w)$  et comme arêtes les paires  $(\ell, r)$  pour  $\ell \in U(w)$  et  $r \in V(w)$  tels que  $\ell wr \in F$ .

On remarque que dans le cas où  $U = V = A$  on retrouve le graphe  $G(w)$  défini précédemment.

**Exemple 3.5.** Soit  $F$  l'ensemble de Fibonacci vu dans l'Exemple 1.6. Soient  $w = a$ ,  $U = \{aa, ba, b\}$  et  $V = \{aa, ab, b\}$ . Le graphe  $G_{U,V}(w)$  est représenté en Figure 3.5

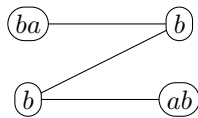


FIGURE 3.5 – Le graphe  $G_{U,V}(w)$ .

Un ensemble  $F$  est dit *fortement acyclique* (resp. *fortement connexe*) s'il est biessentiel et pour tout triplet  $w, U, V$  avec  $w \in F$ ,  $U \subseteq A^*$  un code suffixe fini (resp. suffixe maximal fini) et  $V \subseteq A^*$  un code préfixe fini (resp. suffixe maximal fini), le graphe  $G_{U,V}(w)$  est acyclique (resp. connexe).

On dit que  $F$  satisfait la *condition de l'arbre forte* s'il est fortement acyclique et fortement connexe. On remarque que l'on peut utiliser aussi dans la définition  $U$  un code suffixe  $F$ -maximal fini et  $V$  un code préfixe  $F$ -maximal fini.

Il est évident que l'acyclicité forte (resp. connexité forte) implique l'acyclicité (resp. connexité). Les deux notions sont en fait équivalentes. Pour démontrer ce résultat on utilise le lemme suivante.

**Lemme 3.6.** *Soient  $F$  un ensemble biessentiel et  $w \in F$  un mot. Soient  $U$  un code suffixe fini et  $V$  un code préfixe fini. On suppose qu'il existe un  $\ell \in F$  tel que  $\ell w \in F$ . On pose  $U' = (U \setminus A\ell) \cup \ell$ . Si les graphes  $G_{U',V}(w)$  et  $G_{A,V}(\ell w)$  sont acycliques (resp. connexes) alors  $G_{U,V}(w)$  est acyclique (resp. connexe).*

*Démonstration.* On commence avec la preuve pour l'acyclicité. On suppose que  $G_{U,V}$  contient un cycle. Si ce cycle n'utilise pas des sommets en  $U'$ , alors il définit un cycle dans le graphe  $G_{A,V}(\ell w)$  obtenu en remplaçant chaque sommet  $a\ell$  (s'il y en a) par un sommet  $a$ , mais cela est impossible car  $G_{A,V}(\ell w)$  est acyclique pour hypothèse. Si le cycle utilise un sommet de  $U'$  alors il définit un cycle dans le graphe  $G_{U',V}(w)$  obtenu en remplaçant chaque sommet  $a\ell$  par  $\ell$ , mais cela est impossible car  $G_{U',V}(w)$  est acyclique pour hypothèse. Ainsi,  $G_{U,V}(w)$  est-il acyclique.

On démontre maintenant que pour tout  $m \in U(w)$  et  $r \in V(w)$  il existe un chemin de  $m$  à  $r$  dans  $G_{U,V}(w)$ . Comme  $F$  est essentiel à gauche, il existe une lettre  $a \in A$  telle que  $alw \in F$  et donc  $a\ell \in U(w)$ . De plus, comme  $G_{A,V}$  est connexe, pour tout  $r \in V(\ell w)$  il existe un chemin de  $a\ell$  à  $r$  dans  $G_{U,V}(w)$ . Aussi, d'après la connexité de  $G_{U',V}$ , pour tout  $m \in U'(w) \setminus \ell$  et  $r \in V(w)$  existe-t-il un chemin de  $m$  à  $r$  dans  $G_{U',V}(w)$ . En effet, d'après les hypothèses il existe un chemin de  $m$  à  $r$  dans  $G_{U',V}(w)$  et, de plus, on a vu que pour chaque arête de ce chemin de la forme  $(\ell, s)$  il existe un chemin de  $a\ell$  à  $s$  dans le graphe  $G_{U,V}(w)$ , d'où la notre assertion.

Pour démontrer le cas où  $m = b\ell$  avec  $b \in A$ , on remarque d'abord que, avec le même raisonnement que ci-dessus, pour tout  $r \in V(w)$  il existe un chemin de  $a\ell$  à  $r$  dans  $G_{U,V}(w)$ . Depuis la connexité de  $G_{A,V}(w)$ , on a qu'il existe un chemin de  $b$  à  $a$  dans ce graphe et donc il existe un chemin de  $m$  à  $a\ell$  dans  $G_{U,V}(w)$ . Ainsi, existe-t-il un chemin de  $m = b\ell$  à  $r$  dans  $G_{U,V}(w)$ .  $\square$

On utilise le Lemme 3.6 pour démontrer l'équivalence entre la condition d'acyclicité et celle d'acyclicité forte. De manière équivalente on montre l'équivalence entre la connexité et la connexité forte et entre la condition de l'arbre et la condition de l'arbre forte.

**Proposition 3.7.** *Si un ensemble satisfait la condition d'acyclicité (resp. de connexité, resp. de l'arbre) alors il satisfait la condition de forte acyclicité (resp. de forte connexité, resp. de l'arbre forte).*

*Démonstration.* Soient  $F$  un ensemble connexe,  $U$  un code suffixe fini et  $V$  un code préfixe fini. On peut supposer sans perte de généralité que  $U$  et  $V$  soient respectivement suffixe maximal et préfixe maximal. En effet, ils existent  $U' \supseteq U$  et  $V' \supseteq V$  respectivement maximal suffixe et maximal préfixe, et l'on voit que le graphe  $G_{U,V}(w)$  est un sous-graphe de  $G_{U',V'}(w)$  pour tout  $w$ . Donc l'acyclicité du premier implique l'acyclicité du deuxième.

On raisonne par récurrence sur la somme des longueurs de mots en  $U, V$  et l'on montre que pour tout  $w \in F$ , le graphe  $G_{U,V}(w)$  est acyclique. Soit  $w \in F$ .

Si  $U = V = A$ , la propriété est vraie parce que  $F$  est acyclique pour hypothèse.

On suppose que  $U$  contient des mots de longueur au moins 2. Comme  $U$  est un code suffixe maximal fini, il existe un mot  $\ell \in A^*$  tel que  $A\ell \subseteq U$ . Soit  $U' = (U \setminus A\ell) \cup \ell$ . Si  $\ell w \notin F$  alors  $G_{U,V}(w) = G_{U',V}(w)$  et le résultat est vérifié par l'hypothèse de récurrence. Dans l'autre cas, on a par l'hypothèse de récurrence que les graphes  $G_{U',V}(w)$  et  $G_{A,V}(\ell w)$  sont acycliques. Par le Lemme 3.6 le résultat est donc vrai.

La preuve concernant la connexité est démontrée de la même manière.  $\square$

### 3.3 La condition de l'arbre planaire

Soient  $<_1$  et  $<_2$  deux ordres sur  $A$ . Soient  $F$  un ensemble et  $w \in F$  un mot. On dit que le graphe  $G(w)$  est *compatible* avec les ordres  $<_1$  et  $<_2$  si pour toutes les arêtes  $(a, b), (c, d) \in E(w)$ , on a

$$a <_1 c \Rightarrow b \leq_2 d.$$

En plaçant les sommets de  $L(w)$  ordonnés par  $<_1$  sur une ligne et ceux de  $R(w)$  ordonnés par  $<_2$  sur une ligne parallèle, la condition de compatibilité implique que l'on peut dessiner les arêtes du graphe comme des segments qui ne se croisent pas (en particulier  $G(w)$  est un graphe planaire).

On dit qu'un ensemble biessentiel  $F$  satisfait la *condition de l'arbre planaire* s'ils existent deux ordres  $<_1$  et  $<_2$  sur  $A$  tels que pour tout  $w \in F$ , le graphe  $G(w)$  est un arbre compatible avec  $<_1$  et  $<_2$ .

Il est clair que la condition de l'arbre planaire implique la condition de l'arbre.

L'exemple suivant montre que l'ensemble de Tribonacci ne satisfait pas la condition de l'arbre planaire.

**Exemple 3.8.** Soit  $F$  l'ensemble de Tribonacci vu dans l'Exemple 1.7. Les mots  $a, aba$  et  $abacaba$  sont bispéciaux. Ainsi, les mots  $ba, caba$  sont-ils spéciaux à droite et les mots  $ab, abac$  spéciaux à gauche. Les graphes  $G(\varepsilon), G(a)$  et  $G(aba)$  sont montrés en Figure 3.6. On voit facilement qu'il n'est pas possible de trouver deux ordres sur  $A$  qui rendent les trois graphes planaires.

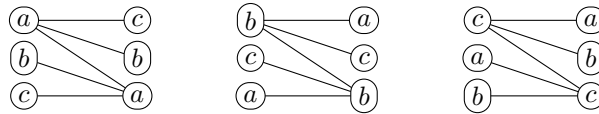


FIGURE 3.6 – Les graphes  $G(\varepsilon), G(a)$  et  $G(aba)$  dans l'ensemble de Tribonacci.

On étend maintenant la notion de l'arbre planaire de la même manière que pour la condition de l'arbre.

Soit  $<$  un ordre sur l'alphabet  $A$ . L'*ordre lexicographique* correspondant sur  $A^*$  est défini par  $u < v$  si  $u$  est un préfixe propre de  $v$  ou si  $u = paq, v = pbr$  avec  $p, q, r \in A^*$  et  $a, b \in A$  tels que  $a < b$ . Un *ordre lexicographique inverse* est défini symétriquement par  $u < b$  si  $u$  est un suffixe propre de  $v$  ou  $u = gas, v = rbs$  avec  $q, r, s \in A^*$  et  $a, b \in A$  tels que  $a < b$ .

Soient  $<_1$  un ordre lexicographique inverse et  $<_2$  un ordre lexicographique définis sur  $A$ . Soient  $F$  un ensemble biessentiel et  $w \in F$ . Soient  $U \subseteq A^*$  un

code suffixe fini et  $V \subseteq A^*$  un code préfixe fini. On dit que le graphe  $G_{U,V}(w)$  est *compatible* avec les ordres  $<_1$  et  $<_2$  si pour toutes les arêtes  $(u, v), (u', v')$  de  $G_{U,V}(w)$ , on a

$$u <_1 u' \Rightarrow v \leq_2 v'.$$

En plaçant les sommets de  $U(w)$  ordonnés par  $<_1$  sur une ligne et ceux de  $R(w)$  ordonnés par  $<_2$  sur une ligne parallèle, la condition de compatibilité implique que l'on peut dessiner les arêtes du graphe comme des segments qui ne se croisent pas (en particulier  $G_{U,V}(w)$  est un graphe planaire).

On dit que un ensemble biessentiel  $F$  satisfait la condition de l'*arbre planaire forte* s'ils existent un ordre lexicographique inverse  $<_1$  et un ordre lexicographique  $<_2$  tels que pour tout triplet  $w, U, V$  avec  $w \in F$ ,  $U \subseteq A^*$  un code suffixe maximal fini,  $V \subseteq A^*$  un code préfixe maximal fini, le graphe  $G_{U,V}(w)$  est compatible avec  $<_1$  et  $<_2$ .

Il est évident que la condition de l'arbre planaire forte implique la condition de l'arbre planaire. La proposition suivante montre que les deux conditions sont en fait équivalentes. On suppose  $<_1$  un ordre lexicographique inverse et  $<_2$  un ordre lexicographique.

**Proposition 3.9.** *Si un ensemble satisfait la condition de l'arbre planaire par rapport à  $<_1$  et  $<_2$  alors il satisfait la condition de l'arbre planaire forte par rapport aux mêmes ordres.*

*Démonstration.* Soit  $F$  un ensemble satisfaisant la condition de l'arbre planaire par rapport à  $<_1$  et  $<_2$ . Soient  $U \subseteq A^*$  un code suffixe maximal fini et  $V \subseteq A^*$  un code préfixe maximal fini. On montre par induction sur la somme des longueurs des mots dans  $U, V$  que pour tout  $w \in F$  le graphe  $G_{U,V}(w)$  est compatible avec les ordres  $<_1$  et  $<_2$ .

Si  $U = V = A$ , la propriété est vraie parce que  $F$  satisfait la condition de l'arbre planaire par hypothèse.

On suppose que  $U$  contient des mots de longueur au moins 2. Comme  $U$  est un code suffixe maximal fini, il existe un mot  $\ell \in A^*$  tel que  $A\ell \subseteq U$ . Soit  $U' = (U \setminus A\ell) \cup \ell$ . Si  $\ell w \notin F$  alors  $G_{U,V}(w) = G_{U',V}(w)$  et le résultat est vérifié par l'hypothèse de récurrence. Dans l'autre cas, on a par l'hypothèse de récurrence que les graphes  $G_{U',V}(w)$  et  $G_{A,V}(w)$  satisfont la condition de l'arbre planaire et donc, en particulier, la condition de l'arbre. Par le Lemme 3.6 on a que même le graphe  $G_{U,V}(w)$  satisfait la condition de l'arbre.

On considère deux arêtes  $(u, v), (u', v')$  de  $G_{U,V}(w)$  et l'on suppose que  $u <_1 u'$ . On a trois cas.

- Si  $u, u' \in A\ell$ , alors  $u, u' \in U'$  et donc  $v \leq_2 v'$  car  $G_{U',V}$  est compatible avec les deux ordres par l'hypothèse de récurrence.
- Si  $u \in A\ell$  et  $u' \notin A\ell$ , on a  $\ell <_1 u$  par définition d'ordre inverse et donc  $\ell <_1 u'$ . Comme  $(\ell, v)$  est une arête de  $G_{U',V}(w)$  et comme ce dernier est compatible avec  $<_1, <_2$  par hypothèse de récurrence, on a que  $v \leq_2 v'$ .
- Si  $u \notin A\ell$  et  $u \in A\ell$ , on montre le résultat de manière symétrique au cas précédent.

Dans tous les cas on a  $v \leq_2 v'$ , c'est-à-dire que le graphe  $G_{U,V}(w)$  est compatible avec  $<_1$  et  $<_2$ , d'où le résultat.  $\square$

On termine le chapitre en démontrant que les classes d'ensembles vues sont fermées par décodage bifixé.

Soient  $F$  un ensemble récurrent et  $f$  le morphisme de codage pour un code bifixé fini. L'ensemble  $f^{-1}(F)$  est appelé *décodage bifixé* de  $F$ .

**Théorème 3.10.** *Soient  $F$  un ensemble récurrent et  $G = f^{-1}(F)$ . Si  $G$  est biessentiel et  $F$  satisfait la condition d'acyclicité (resp. de connexité, resp. de l'arbre, resp. de l'arbre planaire), alors  $G$  satisfait la condition d'acyclicité (resp. de connexité, resp. de l'arbre, resp. de l'arbre planaire).*

*Démonstration.* Soient  $u \in f^{-1}(F)$  et  $v = f(u)$ . Comme  $F$  est acyclique, il est fortement acyclique par la Proposition 3.7. Comme  $X$  est un code bifixé fini, il est à la fois un code suffixé et un code préfixé. Ainsi, le graphe  $G_{X,X}(v)$  est-il acyclique. Comme  $G(u)$  est isomorphe à  $G_{X,X}(v)$  il est aussi acyclique. Donc  $f^{-1}(F)$  est acyclique.

On utilise la même preuve pour la connexité, la condition de l'arbre et la condition de l'arbre planaire.  $\square$

**Exemple 3.11.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 1.6) et  $X = A^2 \cap F = \{aa, ab, ba\}$ . Soient  $B = \{u, v, w\}$  et  $f$  le morphisme de codage pour  $X$  défini par  $f(u) = aa$ ,  $f(v) = ab$  et  $f(w) = ba$ . L'ensemble  $f^{-1}(F)$  est acyclique (une partie de l'ensemble  $f^{-1}(F)$  est représentée après dans la Figure 5.7).



## Chapitre 4

# Ensemble d'échanges d'intervalles

Dans ce chapitre on donne la définition et les propriétés de base des transformations d'échange d'intervalles. On discute de la relation avec les codes bifixes et l'on montre que la classe des ensembles de facteurs d'échanges d'intervalles réguliers est fermé par des images inverses de morphismes de codage pour des codes bifixes maximaux.

### 4.1 Échanges d'intervalles

On introduit la notion d'échanges d'intervalles (voir [4]). Un *semi-intervalle* est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[\alpha, \beta[ = \{z \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq z < \beta\}$ . Donc un semi-intervalle est un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite. Soient  $\Delta, \Gamma$  deux semi-intervalles. On dénote  $\Delta < \Gamma$  si pour tout  $x \in \Delta$  et tout  $y \in \Gamma$  on a  $x < y$ .

Soit  $(A, <)$  un ensemble ordonné. Une partition  $(I_a)_{a \in A}$  de  $[0, 1[$  en semi-intervalles est dite *ordonnée* si  $a < b$  implique  $I_a < I_b$ .

Soit  $A$  un ensemble fini ordonné par deux ordres totaux  $<_1$  et  $<_2$ . Soit  $(I_a)_{a \in A}$  une partition de  $[0, 1[$  en semi-intervalles ordonnée par  $<_1$ . Soient  $\lambda_a = |I_a|$  la longueur correspondante à l'intervalle,  $\mu_a = \sum_{b \leq_1 a} \lambda_a$  et  $\nu_a = \sum_{b \leq_2 a} \lambda_b$ . Soit  $\alpha_a = \nu_a - \mu_a$ .

La *transformation d'échange d'intervalles* par rapport à  $(I_a)_{a \in A}$  est la fonction  $T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  définie par

$$T(z) = z + \alpha_a \quad \text{si } z \in I_a.$$

La restriction de  $T$  à chaque  $I_a$  est une translation sur  $J_a = T(I_a)$ . Les points  $\mu_a$  et  $\nu_a$  sont respectivement la frontière droite de  $I_a$  et la frontière droite de  $J_a$ . De plus, on dénote  $\gamma_a$  et  $\delta_a$  respectivement la frontière gauche de  $I_a$  et la frontière gauche de  $J_a$ . Ainsi, a-t-on

$$I_a = [\gamma_a, \mu_a], \quad J_a = [\delta_a, \nu_a[.$$

Comme  $a <_2 b$  implique  $J_a <_2 J_b$ , la famille  $(J_a)_{a \in A}$  est une partition de  $[0, 1[$  ordonnée par  $<_2$ . En particulier, on remarque que la transformation  $T$  définit une bijection de  $[0, 1[$  sur lui-même.

On dit qu'une transformation d'échange d'intervalles  $T$  est sur un alphabet  $A$  s'il existe une partition  $(I_a)_{a \in A}$  telle que  $T$  est une transformation d'échange d'intervalles par rapport à cette partition. Les valeurs  $(\alpha_a)_{a \in A}$  sont appelées les *valeurs de translation* de la transformation.

**Exemple 4.1.** Soient  $\alpha \in [0, 1[$  et  $R$  la transformation d'échange d'intervalles correspondante à la partition  $I_a = [0, 1 - \alpha[$  et  $I_b = [1 - \alpha, 1[$  de l'alphabet  $A = \{a, b\}$  avec  $a <_1 b, b <_2 a$  (voir Figure 4.1. La transformation  $R$  est la rotation d'angle  $\alpha$  du semi-intervalle  $[0, 1[$  définie par  $R(z) = z + \alpha \text{ mod } 1$ .

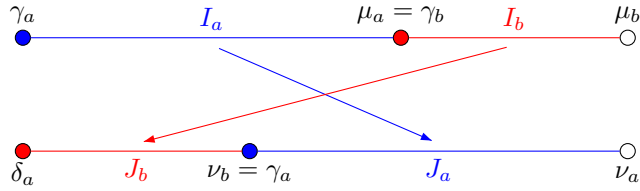


FIGURE 4.1 – Rotation d'un angle  $\alpha$ .

Comme  $<_1$  et  $<_2$  sont deux ordres totaux, il existe une permutation  $\pi$  de  $A$  telle que

$$a <_1 b \iff \pi(a) <_2 \pi(b).$$

Clairement,  $<_2$  est déterminé par  $<_1$  et  $\pi$  et  $<_1$  est déterminé par  $<_2$  et  $\pi$ . La permutation  $\pi$  est appelé la permutation *associée* à  $T$ .

Soient  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$  et  $\lambda = (\lambda_a)_{a \in A}$ . La paire  $(\lambda, \pi)$  détermine la fonctionne  $T$ . Ainsi, peut-on dénoter  $T$  comme  $T_{\lambda, \pi}$ . La transformation  $T$  est aussi dite être une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles.

Il est facile de démontrer que la famille des  $s$ -transformations d'échange d'intervalles est fermée par composition et par inverse.

**Exemple 4.2.** Dans la Figure 4.2 est représenté une 3-transformation d'échange d'intervalles. On a  $A = \{a, b, c\}$  avec  $a <_1 b <_1 c$  et  $b <_2 c <_2 a$ . La permutation associée est le cycle  $\pi = (abc)$ .

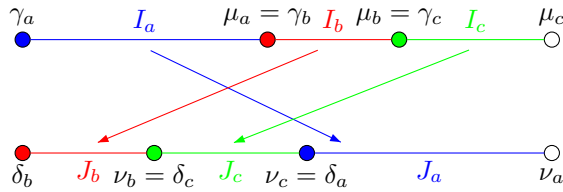


FIGURE 4.2 – Une 3-transformation d'échange d'intervalles

## 4.2 Transformations d'échange d'intervalles régulières

Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles. On définit l'*orbite* d'un point  $z \in [0, 1[$  l'ensemble  $\{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Une transformation est dite *minimale*



si pour tout  $z \in [0, 1[$  l'orbite de  $z$  est dense dans  $[0, 1[$ .

Soit  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$ . Pour simplifier on dénotera  $\gamma_i = \gamma_{a_i}, \mu_i = \mu_{a_i}, \delta_i = \delta_{a_i}$  et  $\nu_i = \nu_{a_i}$ .

Les points de l'ensemble

$$\text{Sep}(T) = \{0, \mu_1, \dots, \mu_{s-1}\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\}$$

sont dits *points de séparation* de  $T$ .

Une transformation d'échange d'intervalles  $T_{\lambda, \pi}$  est dite *régulière* si les orbites des points de séparation différents de zéro, c'est-à-dire  $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$  (ou de façon équivalente  $\gamma_2, \dots, \gamma_s$ ) sont infinies et disjointes. On remarque que l'orbite de 0 ne peut pas être disjointe des autres car on a  $T(\mu_i) = 0$  pour un certain  $1 \leq i \leq s$ .

On dit aussi que une transformation d'échanges d'intervalles régulière satisfait la condition *idoc* (acronyme de *infinite disjoint orbit condition*).

Comme  $\delta_2 = T(\mu_1), \dots, \delta_s = T(\mu_{s-1})$ , on peut donner une définition équivalente de régularité aussi en utilisant les  $\delta_i$  ou les  $\nu_i$ .

**Exemple 4.3.** La rotation  $R$  d'angle  $\alpha$  définie dans l'Exemple 4.1 est une 2-transformation d'échange d'intervalles régulière si et seulement si  $\alpha$  est irrationnel.

Le résultat suivant a été démontré par Keane (voir [10]).

**Théorème 4.4** (Keane, 1975). *Une transformation d'échange d'intervalles régulière est minimale.*

L'inverse n'est pas vrai, comme montré dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.5.** Soient  $\alpha$  un irrationnel et  $R$  une rotation d'angle  $\alpha$  vue comme 3-transformation d'échange d'intervalles avec  $\lambda = (1 - 2\alpha, \alpha, \alpha)$  et  $\pi = (132)$ . Cette transformation est minimale car toutes les rotations d'angle irrationnel le sont, mais elle n'est pas régulière car  $\mu_1 = 1 - 2\alpha, T(\mu_1) = 1 - \alpha = \mu_2$ .

Une permutation  $\pi$  d'un ensemble ordonné  $A$  est dite *décomposable* s'il existe un élément  $b \in A$  tel que l'ensemble  $B$  des éléments strictement inférieures à  $b$  est non vide et tel que  $\pi(B) = B$ . Sinon, elle est dite *indécomposable*.

Si une transformation d'échange d'intervalles  $T = T_{\lambda, \pi}$  est minimale, alors la permutation associée  $\pi$  est indécomposable. En effet, si  $B$  était un ensemble comme ci-dessus, l'ensemble des orbites des points dans l'ensemble  $S = \cup_{a \in B} I_a$  serait fermé et strictement inclus dans  $[0, 1[$ , ce qui contredirait l'hypothèse de minimalité.

L'exemple suivant montre que l'indécomposabilité de  $\pi$  n'est pas suffisant pour que  $T$  soit minimale.

**Exemple 4.6.** Soient  $A = \{a, b, c\}$  et  $\lambda$  tel que  $\lambda_a = \lambda_c$ . Soit  $\pi$  la transposition  $(ac)$ . Bien que  $\pi$  est indécomposable, la transformation  $T_{\lambda, \pi}$  n'est pas minimale car sa restriction à  $I_b$  est l'identité.

### 4.3 Codage naturel

Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles par rapport à  $(I_a)_{a \in A}$  et  $z \in [0, 1[$ . Le *codage naturel* de  $T$  par rapport à  $z$  est le mot infini  $\Sigma_T(z) =$

$a_0a_1 \cdots \in A^\omega$  défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

**Exemple 4.7.** Le mot de Fibonacci défini dans l'Exemple 1.6 est le codage naturel d'une rotation d'angle  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$  par rapport au point  $\alpha$  (voir [11]).

Pour un mot fini  $w = b_0b_1 \cdots b_{m-1}$ , on définit  $I_w$  l'ensemble

$$I_w = I_{b_0} \cap T^{-1}(I_{b_1}) \cap \dots \cap T^{-m+1}(I_{b_{m-1}}). \quad (4.1)$$

**Observation 4.8.** Chaque  $I_w$  est un semi-intervalle. En effet, on peut le démontrer par récurrence. L'assertion est vrai, par définition, quand  $w \in A$  est une lettre.

On suppose que  $I_w$  soit un semi-intervalle. Pour tout  $a \in A$ , on a que  $T(I_{aw}) = T(I_a) \cap I_w$  est un semi-intervalle car  $T(I_a)$  et  $I_w$  sont semi-intervalles par hypothèse et l'intersection de deux semi-intervalles est encore un semi-intervalle. Comme  $I_{aw} \subseteq I_a$ , alors  $T(I_{aw})$  est un translaté de  $I_{aw}$ , et donc il est aussi un semi-intervalle.

Soit  $J_w = T^m(I_w)$ . Alors on a

$$J_w = T^m(I_{b_0}) \cap T^{m-1}(I_{b_1}) \cap \dots \cap T(I_{b_{m-1}}). \quad (4.2)$$

En particulier, pour  $a \in A$ , on retrouve  $J_a = T(I_a)$ .

**Observation 4.9.** Chaque  $J_w$  est un semi-intervalle. En effet, on peut le démontrer par récurrence. L'assertion est vrai quand  $w \in A$  est une lettre.

On suppose que  $J_w$  soit un semi-intervalle. Pour tout  $a \in A$ , on a que  $T^{-1}(J_{wa}) = J_w \cap I_a$ . Cela implique, comme dans l'observation ci-dessus, que  $J_{wa}$  est un semi-intervalle.

On pose par convention  $I_\varepsilon = J_\varepsilon = [0, 1[$ . Il est facile à montrer que pour tout  $n \geq 0$  on a

$$a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1} = w \iff T^n(z) \in I_w \quad (4.3)$$

et

$$a_{n-m} a_{n-m+1} \cdots a_{n-1} = w \iff T^n(z) \in J_w. \quad (4.4)$$

Soit  $(\alpha_a)_{a \in A}$  la suite des valeurs de translation de  $T$ . Pour tout mot  $w$  on a

$$J_w = I_w + \alpha_w \quad \text{où } \alpha_w = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{b_j}. \quad (4.5)$$

En effet, on peut le démontrer par récurrence. L'assertion est vrai pour  $m = 1$  est une lettre. Pour  $m \geq 2$ , soit  $w = ua$  avec  $a = b_{m-1}$ . On a, par l'hypothèse de récurrence et par le fait que  $I_w \subseteq I_u$ ,  $T^m(I_w) = T^{m-1}(I_1) + \alpha_a$  et  $T^{m-1}(I_w) = I_w + \alpha_u$ . Ainsi, a-t-on

$$J_w = T^m(I_w) = I_w + \alpha_u + \alpha_a = I_w + \alpha_w.$$

L'équation 4.5 montre, en particulier, que la restriction de  $T^{|w|}$  à  $I_w$  est une translation.

Si  $T$  est minimale, on a  $w \in F(\Sigma_T(z))$  si et seulement si  $I_w \neq \emptyset$ . Donc, dans ce cas, l'ensemble des facteurs de  $\Sigma_T(z)$  ne dépend pas du point  $z$  (comme pour les mots Sturmien, voir [11]). Comme  $F(\Sigma_T(z))$  dépend seulement de  $T$ , on peut le dénoter  $F(T)$ . Quand  $T$  est régulière (resp. minimale) on appelle cet ensemble un *ensemble d'échange d'intervalles régulier* (resp. *ensemble d'échange d'intervalles minimale*).

Soient  $X = \{\Sigma_T(z) \mid z \in [0, 1[ \}$  et  $S$  le *shift* sur  $X$ , c'est-à-dire la fonction définie par

$$S(a_0 a_1 \dots) = a_1 a_2 \dots.$$

On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1[ & \xrightarrow{T} & [0, 1[ \\ \downarrow \Sigma_T & & \downarrow \Sigma_T \\ X & \xrightarrow{S} & X \end{array}$$

Le couple  $(X, S)$  est un *système dynamique symbolique*, formé d'un espace topologique  $X$  et d'une transformation continue  $S$ . Un système dynamique symbolique est dit *minimal* si les seuls sous-ensembles fermés invariants par  $S$  sont  $\emptyset$  et  $X$ .

$(X, S)$  est minimale si et seulement si  $F(S)$  est uniformément récurrent (voir [11, Théorème 17]). Ainsi, obtient-on le résultat suivant.

**Proposition 4.10.** *Soit  $T$  une transformation d'échange intervalles minimale. L'ensemble  $F(T)$  est uniformément récurrent.*

On remarque que quand  $T$  est minimale, la fonction  $\Sigma_T$  est injective (voir [10]).

On donne maintenant des résultats concernant l'ordre des intervalles  $I_u$  et  $J_u$ .

**Observation 4.11.** Pour un mot  $u$  est une lettre  $a$ , on a, d'après l'Equation 4.1,  $I_{ua} = I_u \cap T^{-|u|}(I_a)$ . Comme  $(I_a)_{a \in A}$  est une partition ordonnée de  $[0, 1[$ , on a que  $(T^{|u|}(I_u) \cap I_a)_{a \in A}$  est une partition ordonnée de  $T^{|u|}(I_u)$ . De plus, comme la restriction de  $T^{|u|}$  à  $I_u$  est une translation, la suite  $(I_{ua})_{a \in A}$  est une partition ordonnée de  $I_u$ .

Soit  $<_1$  l'ordre lexicographique induit par l'ordre  $<_1$ .

**Proposition 4.12.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles. On a  $I_u <_1 I_v$  si et seulement si  $u <_1 v$  et  $u$  n'est pas un préfixe de  $v$ .*

*Démonstration.* Si  $u$  est un préfixe de  $v$  alors il existe un mot  $t$  tel que  $v = ut$ . Par l'Equation 4.1 on a  $I_v = I_{ut} = I_u \cap T^{-|u|}(I_t)$  et donc  $I_v \subseteq I_u$ .

On suppose maintenant que  $u <_1 v$  et que  $u$  n'est pas un préfixe de  $v$ . Donc, on a  $u = \ell a s$  et  $v = \ell b t$  avec  $\ell, s, t \in A^*$  et  $a, b \in A$  deux lettres telles que  $a <_1 b$ . D'après l'Observation 4.11 et la première partie de la preuve, on a  $I_{\ell a} <_1 I_{\ell b}$  avec  $I_u \subseteq I_{\ell a}$  et  $I_v \subseteq I_{\ell b}$ , d'où  $I_u <_1 I_v$ .

Inversement, on suppose que  $I_u <_1 I_v$ . Comme  $I_u \cap I_v = \emptyset$ , les mots  $u, v$  ne peuvent pas être comparables par préfixes. Soit  $u = \ell a s$  et  $v = \ell b t$  avec  $\ell, s, t \in A^*$  et  $a, b \in A$  deux lettres différentes. On ne peut pas avoir  $b <_1 a$  car

cela impliquerait  $I_v <_1 I_u$ , comme vu ci-dessus. Ainsi, a-t-on  $a <_1 b$  et donc  $u <_1 v$ .  $\square$

Soient  $<_2$  l'ordre lexicographique inverse induit par l'ordre  $<_2$  et  $\pi$  le morphisme de  $A^*$  à lui même qui étend à  $A^*$  la permutation  $\pi$  sur  $A$ . Ainsi, a-t-on

$$u <_2 v \iff \pi^{-1}(\tilde{u}) <_1 \pi^{-1}(\tilde{v}).$$

Le résultat suivant est l'analogie de la Proposition 4.12 pour les semi-intervalles  $J_u$ .

**Proposition 4.13.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles. On a  $J_u <_2 J_v$  si et seulement si  $u <_2 v$  et  $u$  n'est pas un suffixe de  $v$ .*

*Démonstration.* Soit  $T = T_{\lambda, \pi}$ . Soit  $(I'_a)_{a \in A}$  la famille de semi-intervalles définis par  $I'_a = J_{\pi(a)}$ . La transformation d'échange d'intervalles  $T'$  par rapport à  $(I'_a)$  avec valeurs de translation  $-\alpha_a$  est l'inverse de la transformation  $T$ . Les semi-intervalles  $I'_w$  définis par l'Equation 4.1 par rapport à  $T'$  sont tels que  $I'_w = J_{\pi(\tilde{w})}$  ou, de façon équivalente,  $J_w = I'_{\pi^{-1}(\tilde{w})}$ . Ainsi, d'après cela et la Proposition 4.12, a-t-on

$$J_u <_2 J_v \iff I'_{\pi^{-1}(\tilde{u})} <_1 I'_{\pi^{-1}(\tilde{v})} \iff \pi^{-1}(\tilde{u}) <_1 \pi^{-1}(\tilde{v}) \iff u <_2 v.$$

$\square$

Les résultats suivants relient les échanges d'intervalles avec la condition de l'arbre planaire définie dans le Chapitre 3

**Lemme 4.14.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles minimale. Pour tout mot  $w$  on a*

- (i)  $b \in R(w)$  si et seulement si  $I_w \cap T^{-|w|}(I_b) \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $a \in L(w)$  si et seulement si  $J_a \cap I_w \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* Comme  $T$  est minimale, on a que  $w \in F$  si et seulement si  $I_w \neq \emptyset$ .

La condition (i) est vérifiée car  $I_{wb} = I_w \cap T^{-|w|}(I_b)$ . La condition (ii) est vérifiée car  $I_{aw} = I_a \cap T^{-1}(I_w)$  et cela implique  $T(I_{aw}) = J_a \cap I_w$ .  $\square$

**Proposition 4.15.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles sur  $A$  ordonnée par  $<_1$  et  $<_2$ . Si  $T$  est régulière alors  $F(T)$  satisfait la condition de l'arbre planaire par rapport à  $<_2$  et  $<_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $F = F(T)$ . D'après le Lemme 4.14 on a que pour tout  $w \in F$ ,  $(I_{wb})_{b \in R(w)}$  est une partition ordonnée par l'ordre  $<_1$  de  $I_w$  et  $(J_a \cap I_w)_{a \in L(w)}$  est une partition ordonné per l'ordre  $<_2$  de  $I_w$ .

Soient  $a, a' \in L(w)$  avec  $a \neq a'$ . Dans le graphe  $G(w)$  le seul chemin réduit (c'est-à-dire tel que chaque arête est utilisé qu'une seule fois) de  $a$  à  $a'$  est la séquence  $a_1, b_1, a_2, \dots, b_{n-1}, a_n$  où  $a_1 = a$ ,  $a_n = a'$ ,  $a_1 <_2 a_2 <_2 \dots <_2 a_n$ ,  $b_1 <_1 b_2 <_1 \dots <_1 b_{n-1}$  et pour  $1 \leq i \leq n-1$  on a  $J_{a_i} \cap I_{wb_i} \neq \emptyset$  et  $J_{a_{i+1}} \cap I_{wb_i} \neq \emptyset$  (voir Figure 4.3).

On remarque que les intersections considérées ci-dessus sont non vides car, par l'hypothèse de régularité, la frontière droite de  $J_{a_i}$  ne peut pas coïncider

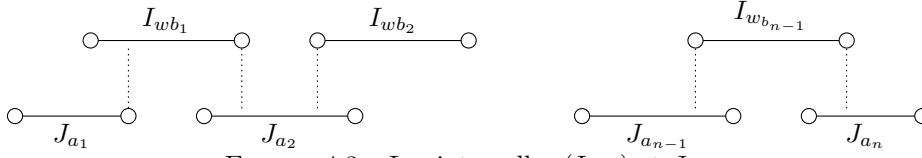


FIGURE 4.3 – Les intervalles  $(I_{wb_i})$  et  $J_{a_i}$ .

avec la frontière gauche de  $I_{wb_i}$ . De plus, le chemin est unique car les inégalités  $a_i <_2 a_{i+1}$  et  $b_i <_1 b_{i+1}$  sont strictes.

Ainsi,  $G(w)$  est-il un arbre. Il est compatible avec les ordres  $<_2$  et  $<_1$  car, comme on vient de voir,  $a <_2 a'$  implique que  $b_1 \leq_1 b_{n-1}$  où  $b_1$  et  $b_{n-1}$  sont les sommets (pas nécessairement distincts) tels que  $(a, b_1), (a', b_{n-1}) \in E(w)$ .  $\square$

Ferenczi et Zamboni ont donné une caractérisation des ensembles d'échange d'intervalles qu'extende la Proposition 4.15 (voir [6]).

Dans leur article, Ferenczi et Zamboni disent que un ensemble uniformément récurrent  $F$  sur un alphabet  $A$  est un ensemble d'échange d'intervalles régulier si et seulement si  $F \supseteq A$  et ils existent deux ordres  $<_1$  et  $<_2$  tels que pour tout mot  $w \in F$  les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) pour  $(a, b), (c, d) \in E(w)$ , si  $a <_2 c$  alors  $b \leq_1 d$ ;
  - (ii) si  $a, b \in L(w)$  sont deux éléments consécutifs pour l'ordre  $<_2$ , alors  $\text{Card}(R(aw) \cap R(bw)) = 1$ ;
1. l'ensemble  $L(w)$  (resp.  $R(w)$ ) est formé d'éléments consécutifs pour l'ordre  $<_2$  (resp.  $<_1$ ).

Il est facile de montrer que si  $F$  est un ensemble biessentiel tel que  $F \supseteq A$ , alors il satisfait les conditions (i) et (ii) si et seulement si  $F$  satisfait la condition de l'arbre planaire. De plus, dans ce cas, la condition (i) est satisfaite automatiquement. En effet, on considère un mot  $w$  et trois lettres  $a, b, c \in A$  avec  $a <_1 b <_1 c$  tels que  $wa, wc \in F$  mais  $wb \notin F$ . Comme  $b \in F$ , il existe un mot  $v$  (peut être vide) suffixe de  $w$  tel que  $vb \in F$ . On choisit  $v$  de longueur maximale. Ainsi, a-t-on  $w = uv$  avec  $u \neq \varepsilon$ . Soit  $d$  la lettre finale de  $u$ . Aussi, a-t-on  $dva, dvc \in F$  et  $dvb \notin F$ . Comme  $G(v)$  est un arbre par hypothèse et que  $b \in R(v)$ , il existe une lettre  $e \in L(v)$  telle que  $evb \in F$ . Mais à la fois  $e <_2 d$  et  $d <_2 e$  conduisent à une contradiction car  $G(v)$  est compatible avec  $<_2$  et  $<_1$ . Donc, une telle lettre  $b$  ne peut pas exister.

On peut reformuler le résultat principal de [6] dans le théorème suivant.

**Théorème 4.16** (Ferenczi, Zamboni). *Un ensemble  $F$  est un ensemble d'échange d'intervalles régulier sur un alphabet  $A$  si et seulement si il est uniformément récurrent,  $F \supseteq A$  et il satisfait la condition de l'arbre planaire.*

L'exemple suivant montre qu'il existe un ensemble uniformément récurrent qui satisfait la condition de l'arbre mais qui n'est ni Sturmien ni un ensemble d'échange d'intervalles régulier.

**Exemple 4.17.** Soient  $F$  l'ensemble de Tribonacci vu dans l'Exemple 1.7 et  $f : \{x, y, z, t, u\} \rightarrow A^*$  le morphisme de codage pour  $X = F \cap A^2$  défini par  $f(x) = aa, f(y) = ab, f(z) = ac, f(t) = ba$  et  $f(u) = ca$ . L'ensemble  $G = f^{-1}(F)$  est un arbre.  $G$  n'est pas Sturmien car  $y$  et  $t$  sont deux mots spéciaux à droite.  $G$

n'est pas un ensemble d'échange d'intervalles régulier car pour tout mot  $w$  spécial à droite de  $G$  on a  $r(w) = 3$ . Cela n'est pas possible dans un ensemble d'échange d'intervalles régulier car, comme le codage naturel  $\Sigma_T$  de la transformation  $T$  est injective, la longueur des intervalles  $J_w$  tend vers 0 quand  $|w|$  tend vers l'infini.

Comme un ensemble satisfaisant la condition de l'arbre est neutre, on a le Corollaire suivant.

**Corollaire 4.18.** *Soit  $F$  un ensemble d'échange d'intervalles régulier. Pour tout  $n \geq 0$  on a  $\text{Card}(F \cap A^n) = n(\text{Card}(A) - 1)$ .*

## 4.4 Codes bifixes et échanges d'intervalles

On définit *distribution de probabilité invariante* sur  $A^*$  une fonction  $\pi : A^* \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\pi(\varepsilon) = 1$  et pour tout  $w \in A^*$  on a

$$\sum_{a \in A} \pi(aw) = \sum_{a \in A} \pi(wa) = \pi(w).$$

Soit  $T_{\lambda, \pi}$  une transformation d'échange d'intervalles. Pour tout  $w \in A^*$  on dénote  $|I_w|$  la longueur du semi-intervalle  $I_w$  défini dans l'Equation 4.1. Soit  $\lambda$  la fonction définie par  $\lambda(w) = |I_w|$ . On a  $\lambda(\varepsilon) = 1$  et pour tout mot  $w$

$$\sum_{a \in A} \lambda(aw) = \sum_{a \in A} \lambda(wa) = \lambda(w).$$

Ainsi,  $\lambda$  est-elle une distribution de probabilité invariante.

**Exemple 4.19.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci et  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$  (voir Exemple 1.6 et 4.7). Les valeurs de la fonction  $\lambda$  pour les mots de longueur au plus 4 de  $F$  sont montrées dans la Figure 4.4

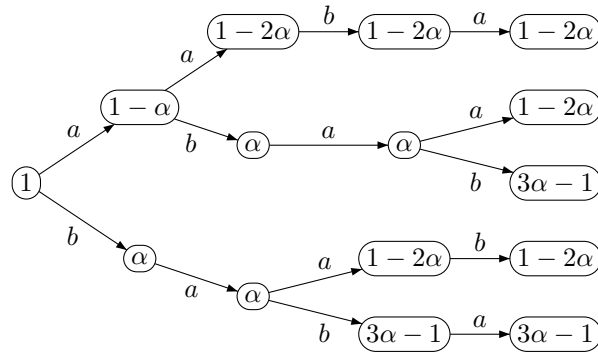


FIGURE 4.4 – Une distribution de probabilité invariante sur l'ensemble de Fibonacci.

La proposition suivante est un cas particulier de [1, Proposition 3.3.4].

**Proposition 4.20.** *Soient  $F$  un ensemble récurrent et  $\lambda$  une distribution de probabilité invariante sur  $F$ . Pour tout code préfixe  $F$ -maximal fini  $X$  on a  $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 1$ .*

On utilise ce dernier résultat pour montrer que les  $(I_w)_{w \in X}$  et les  $(J_w)_{w \in X}$  sont des partitions ordonnées de  $[0, 1[$  sous certaines hypothèses sur  $X$ .

**Proposition 4.21.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles minimale par rapport à  $(I_a)_{a \in A}$  et  $F = F(T)$ . Soit  $X$  un code préfixe  $F$ -maximal fini ordonné par  $<_1$ . La famille  $(I_u)_{u \in X}$  est une partition ordonnée de  $[0, 1[$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.12, les ensembles  $I_u$  pour  $u \in X$  sont disjoints deux à deux. Soit  $\lambda$  la distribution de probabilité invariante sur  $F$  défini par  $\lambda(u) = |I_u|$ . D'après la Proposition 4.20 on a  $\sum_{u \in X} \lambda(u) = 1$ . Donc, la famille  $(I_u)_{u \in X}$  est une partition de  $[0, 1[$ . De plus, elle est une partition ordonnée par la Proposition 4.12.  $\square$

**Exemple 4.22.** Soient  $T$  la rotation d'angle  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$  définie dans l'Exemple 4.7 et  $F = F(T)$  l'ensemble de Fibonacci. L'ensemble  $X = \{aa, ab, b\}$  est un code préfixe  $F$ -maximal. Les valeurs des longueurs des semi-intervalles sont montrées dans la Figure 4.5. La partition de  $[0, 1[$  correspondante à  $X$  est

$$I_{aa} = [0, 1 - 2\alpha[, \quad I_{ab} = [1 - 2\alpha, 1 - \alpha[, \quad I_b = [1 - \alpha, 1[.$$

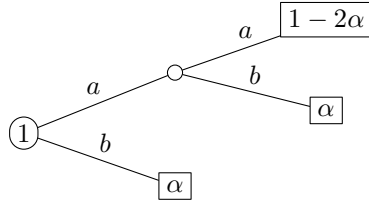


FIGURE 4.5 – Le code préfixe  $X$ .

Avec la même technique on peut démontrer un résultat symétrique pour le cas où  $X$  est un code  $F$ -maximal suffixe.

**Proposition 4.23.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles minimale par rapport à  $(I_a)_{a \in A}$ ,  $J_a = T(I_a)$  pour  $a \in A$  et  $F = F(T)$ . Soit  $X$  un code suffixe  $F$ -maximal fini ordonné par  $<_2$ . La famille  $(J_u)_{u \in X}$  est une partition ordonnée de  $[0, 1[$ .*

En utilisant les deux propositions ci-dessus on arrive au résultat suivant.

**Proposition 4.24.** *Soit  $X$  un code bifixé  $F$ -maximal fini. Les familles  $(I_u)_{u \in X}$  et  $(J_u)_{u \in X}$  sont des partitions ordonnées de  $[0, 1[$ , relativement aux ordres  $<_1$  et  $<_2$ .*

*Démonstration.* Le résultat découle des Propositions 4.21 et 4.23 et du fait que un code bifixé  $F$ -maximal fini est contenu à la fois dans un code préfixe  $F$ -maximal et dans un code suffixe  $F$ -maximal fini.  $\square$

Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles minimale relative à  $(I_a)_{a \in A}$  et  $(\alpha_a)_{a \in A}$  ses valeurs de translation. Soit  $x \in A^\omega$  un mot infinis qui est le un codage naturel de  $T$  par rapport à un point de  $[0, 1[$ . Soit  $X$  un code bifixé  $F$ -maximal sur l'alphabet  $A$ . On définit  $T_X$  la transformation sur  $[0, 1[$  comme

$$T_X(z) = T^{|u|}(z) \quad \text{si } z \in I_u$$

avec  $u \in X$ . La transformation est bien définie car, d'après la Proposition 4.24, la famille  $(I_u)_{u \in X}$  est une partition de  $[0, 1[$ .

Soient  $f : B^* \rightarrow A^*$  le morphisme de codage pour  $X$  et  $(K_b)_{b \in B}$  la famille de semi-intervalles indexés par l'alphabet  $B$  avec  $K_b = I_{f(b)}$ . On ordonne  $B$  par les ordres  $<_1$  et  $<_2$  induites par  $f$ . La *transformation associée* à  $f$  est la transformation d'échange d'intervalles  $T_f$  relative à  $(K_b)_{b \in B}$  avec valeurs de translation  $\beta_b = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{a_j}$ , où  $f(b) = a_0 a_1 \cdots a_{m-1}$ .

**Proposition 4.25.** *On a  $T_f = T_X$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.24, la famille  $(K_b)_{b \in B}$  est une partition de  $[0, 1[$  ordonnée par  $<_1$ . Comme pour tout  $u \in X$  on a  $J_u = I_u + \alpha_u$  par l'Equation 4.5, on a que  $T_X$  est la transformation d'échange d'intervalles relative à  $(K_b)_{b \in B}$  avec valeurs de translation  $\beta_b$ .  $\square$

Comme par la dernière proposition  $T_f$  est une transformation d'échange d'intervalles bien définie, on peut aussi considérer le codage naturel de  $T_f$  par rapport à un point  $z \in [0, 1[$ .

**Exemple 4.26.** Soit  $F$  l'ensemble de Fibonacci. Comme vu dans l'Exemple 4.7,  $F$  est l'ensemble des facteurs du mot de Fibonacci, qui est le codage naturel de la rotation d'angle  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$  par rapport au point  $\alpha$ . Soient  $X = \{aa, ab, ba\}$  et  $f : \{u, v, w\} \rightarrow A^*$  le morphisme de codage défini par  $f(u) = aa$ ,  $f(v) = ab$  et  $f(w) = ba$ . Les deux partitions de  $[0, 1[$  correspondantes à  $T_f$  sont

$$I_u = [0, 1 - 2\alpha], \quad I_v = [1 - 2\alpha, 1 - \alpha], \quad I_w = [1 - \alpha, 1[$$

et

$$J_v = [0, \alpha], \quad J_w = [\alpha, 2\alpha], \quad J_u = [2\alpha, 1[.$$

On remarque que l'on a  $aa <_1 ab <_1 ba$  et  $ab <_2 ba <_2 aa$ .

Soient  $A, B$  deux alphabets,  $T$  une transformation d'échange d'intervalles sur  $A$  et  $x$  le codage naturel de  $T$  par rapport à un point  $z \in [0, 1[$ . On pose  $F = F(X)$ . Soient  $X$  un code bifixé  $F$ -maximal fini et  $f : B^* \rightarrow A^*$  un morphisme qui envoie bijectivement  $B$  dans  $X$ . Le *décodage* du mot infini  $x$  par rapport à  $f$  est le mot infini  $y \in B^\omega$  tel que  $x = f(y)$ .

**Proposition 4.27.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles,  $x$  le codage naturel de  $T$  relatif à un point  $z \in [0, 1[$ ,  $X$  un code bifixé  $F(x)$ -maximal fini et  $f$  un morphisme de codage.*

*Le décodage de  $x$  par rapport à  $f$  est le codage naturel de la transformation associée à  $f$  par rapport au même point  $z$ , c'est-à-dire :*

$$\Sigma_T(z) = f(\Sigma_{T_f}(z)).$$

*Démonstration.* Soit  $y = b_0 b_1 \cdots$  le décodage de  $x$  par rapport à  $f$ . On pose  $x_i = f(b_i)$  pour  $i \geq 0$ . Donc, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$T_f^n(z) = T^{|u_n|}(z) \tag{4.6}$$

avec  $u_n = x_0 \cdots x_{n-1}$ . En effet, cela est vrai pour  $n = 0$ . Ensuite, on a  $T_f^{n+1}(z) = T_f(T_f^n(z))$  où  $t = T_f^n(z)$ . Par récurrence, on a  $t = T^{|u_n|}(z)$ . Comme  $x = u_n x_n x_{n+1} \cdots$ ,



on a, d'après l'Equation 4.3,  $t \in I_{x_n}$ . Ainsi, d'après la définition de  $T_f$ , a-t-on  $T_f(t) = T^{|x_n|}(t)$  et donc  $T_f^{n+1}(z) = T^{|x_n|}(T^{|u_n|}(z)) = T^{|u_{n+1}|}(z)$ , ce qui implique l'Equation 4.6. Enfin, pour tout  $u = f(b)$  avec  $b \in B$  on a

$$b_n = b \iff x_n = u \iff T^{|u_n|}(z) \in I_u \iff T_f^n(z) \in I_u = K_b$$

ce qui montre que  $y$  est le codage naturel de  $T_f$  par rapport à  $z$ .  $\square$

**Exemple 4.28.** Soient  $T, \alpha, X$  et  $f$  comme dans l'Exemple 4.26. Soit  $x = \Sigma_T(\alpha) = abaababa \dots$  le mot de Fibonacci. Le décodage de  $x$  par rapport à  $f$  est le mot  $y = vuwwvv \dots$ .

## 4.5 Codes bifixes et transformations régulières

Dans cette section on utilisera les outils présentés dans la section précédente et on les développera dans le cas particulier où  $T$  est une transformation d'échange d'intervalles régulière.

Le résultat suivant montre que, quand  $f$  est un morphisme de codage d'un code bifixé  $F$ -maximal, la fonction  $T \rightarrow T_f$  conserve la régularité de la transformation.

**Théorème 4.29.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière et  $F = F(T)$ . Pour tout code bifixé  $F$ -maximal fini  $X$  avec morphisme de codage  $f$ , la transformation  $T_f$  est régulière.*

*Démonstration.* Soient  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$  et  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  avec  $x_1 <_1 x_2 <_1 \dots <_1 x_t$ .

Comme vu dans la section 4.4,  $T_f$  est une transformation d'échange d'intervalles par rapport à la partition  $(I_{x_i})_{1 \leq i \leq t}$ .

On dénote  $\delta_i = \delta_{a_i}$  et  $d_x$  la frontière gauche du semi-intervalle  $J_x$ . Pour prouver la régularité de  $T_f$  il faut montrer que les orbites de  $\delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_t}$  sont infinies et disjointes.

On suppose que  $\delta_{x_p} = T_f^n(\delta_{x_q})$  pour certains  $p, q \in \{2, \dots, t\}$  et  $n \in \mathbb{N}$  (si  $n < 0$  il suffit d'interchanger  $p$  et  $q$ ). Soient  $i, j \in \{2, \dots, s\}$  tels que  $\delta_{x_p} = T^k(\delta_i)$  avec  $0 \leq k < |x_p|$  et  $\delta_{x_q} = T^\ell(\delta_j)$  avec  $0 \leq \ell < |x_q|$ .

Comme  $T^k(\delta_i) = T_f^n(T^\ell(\delta_j)) = T^{m+\ell}(\delta_j)$  pour un certain  $m \geq 0$ , d'après l'hypothèse de régularité de  $T$  on a  $i = j$ , car sinon les orbites se croiseraient.

Comme  $\delta_{x_p} = T^k(\delta_i)$  on a  $\Sigma_T(\delta_i) = u\Sigma_T(\delta_{x_p})$  avec  $|u| = k$ . De plus, d'après l'Equation 4.4,  $u$  est un suffixes propre de  $x_p$ .

De même, comme  $\delta_{x_p} = T_f^n(\delta_{x_q})$ , on a  $\Sigma_T(\delta_{x_p}) = x\Sigma_T(\delta_{x_q})$ , avec  $x \in X^*$ . D'autre part, comme  $\delta_{x_q} = T^\ell(\delta_i)$ , on a  $\Sigma_T(\delta_i) = v\Sigma_T(\delta_{x_q})$  avec  $|v| = \ell$  et  $v$  un suffixes propre de  $x_q$ .

Or,  $v$  ne peut pas avoir de suffixes dans  $X$ , donc  $v = ux$  implique  $x = 1$  et donc  $n = 0$  et  $p = q$ .  $\square$

Le corollaire suivant montre que la classe des ensembles d'échanges d'intervalles réguliers est fermée par images inverses de morphismes de codage pour des codes bifixes maximaux.

**Corollaire 4.30.** *Soient  $F$  l'ensemble des facteurs d'un échange d'intervalles régulier et  $f$  un morphisme de codage pour un code bifixé  $F$ -maximal fini. L'ensemble  $f^{-1}(F)$  est un ensemble d'échange intervalles régulier.*

*Démonstration.* Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière telle que  $F = F(T)$ . D'après le Théorème 4.29,  $T_f$  est une transformation d'échange d'intervalles régulière. Soient  $x = \Sigma_T(z)$  pour un  $z \in [0, 1[$  et  $y = f^{-1}(x)$ . Ainsi, a-t-on  $F = F(x)$  et  $F(T_f) = F(y)$ .

On a

$$w \in F(y) \iff f(w) \in F(x) \iff w \in f^{-1}(F),$$

ce qui implique  $F(T_f) \subseteq f^{-1}(F)$ .

Inversement, soient  $w \in f^{-1}(F)$  et  $v = f(w)$ . Comme  $F = F(x)$ , il existe un mot  $u$  tel que  $uv$  est un préfixe de  $x$ . Soient  $z' = T^{|u|}(z)$  et  $x' = \Sigma_T(z')$ . Ainsi,  $v$  est-il un préfixe de  $x'$  et  $w$  est-il un préfixe de  $y' = f^{-1}(x')$ . Comme  $T_f$  est régulière et donc minimale, on a  $F(T_f) = F(y')$ , car l'ensemble de ses facteurs ne dépend pas de la choix du point. Ainsi, a-t-on  $w \in F(T_f)$ , d'où  $f^{-1}(F) \subseteq F(T_f)$ .

Cela montre que  $f^{-1}(F) = F(T_f)$ , d'où la conclusion.  $\square$

Comme un ensemble d'échange d'intervalles régulier est uniformément récurrent, le Corollaire 4.30 implique, en particulier, que pour  $F$  un ensemble d'échange d'intervalles régulier et  $f$  un morphisme de codage pour un coïde bifixe  $F$ -maximal fini, l'ensemble  $f^{-1}(F)$  est uniformément récurrent.

Cela n'est pas vrai pour un ensemble uniformément récurrent arbitraire, comme est montré dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.31.** Soient  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{u, v\}$ . Soient  $F$  l'ensemble des facteurs de  $(ab)^*$  et  $f : B^* \rightarrow A^*$  défini par  $f(u) = ab$  et  $f(v) = ba$ . L'ensemble  $f^{-1}(F) = u^* \cup v^*$  n'est pas récurrent.

On illustre la preuve du Théorème 4.29 dans l'exemple suivant.

**Exemple 4.32.** Soient  $T$  la rotation d'angle  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$  et  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 4.7). L'ensemble  $X = \{a, baab, babaaba, babaabaabab\}$  est un code bifixe  $F$ -maximal de  $F$ -degré 3 (voir [1]). Les valeurs de  $\mu_x$  et de  $\delta_{x_i}$  sont représentées dans la Figure 4.6

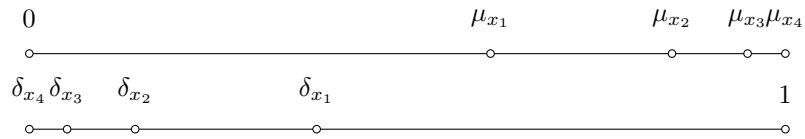


FIGURE 4.6 – La transformation associée au code bifixe de  $F$ -degré 3.

Le mot infini  $\Sigma_T(0)$  est représenté dans la Figure 4.7 avec les valeurs  $T^{|u|}(0)$  au dessus des premières préfixes  $u$  de  $\Sigma_T(0)$ . En particulier, les trois valeurs correspondent aux trois préfixes de  $\Sigma_T(0)$  qui sont des suffixes propres de  $X$ .

**Exemple 4.33.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 1.6) et  $X = \{a, baabaab, baabab, babaab\}$  un code bifixe  $F$ -maximal de  $F$ -degré 3. Soient  $B = \{x, y, z, t\}$  un alphabet et  $f : B^* \rightarrow A^*$  le morphisme défini par  $f(x) = a, f(y) = baabaab, f(z) = baabab$  et  $f(t) = babaab$ . L'ensemble  $G = f^{-1}(F)$ , déjà défini dans l'Exemple 2.9, est un ensemble d'échange d'intervalles régulier et donc à la fois uniformément récurrent et neutre.

$$\Sigma_T(0) = \begin{array}{cccccccccc} & \delta_{x_4} & & \delta_{x_2} & & & & \delta_{x_3} & & & \\ & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \Sigma_T(0) = & a & a & b & a & a & b & a & b & a & \dots \end{array}$$

FIGURE 4.7 – Le mot infini  $\Sigma_T(0)$ .



# Chapitre 5

## Induction de Rauzy

On décrit dans ce chapitre la transformation appelée induction de Rauzy, définie dans [13], laquelle opère sur les transformations d'échange d'intervalles régulières. On rappelle des résultats concernant cette transformation (Théorèmes 5.3 et 5.5). On introduit une version bilatère de cette transformation et l'on généralise les résultats de Rauzy au cas bilatère (Théorèmes 5.12 et 5.15). On utilise l'induction bilatère pour prouver que dans un ensemble d'échange d'intervalles régulier, l'ensemble des mots de premier retour par rapport à un mot est une base du groupe libre (Théorème 5.20).

### 5.1 Induction de Rauzy à droite

Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles relative à  $(I_a)_{a \in A}$ . Dans ce chapitre on supposera que la famille  $(I_a)_{a \in A}$  est une partition du semi-intervalle  $[\ell, r[$  au lieu de  $[0, 1[$ . On rappelle que l'on note  $I_a = [\gamma_a, \mu_a[$  et  $J_a = [\delta_a, \nu_a[$ .

On dit que le semi-intervalle  $[\ell, t[$ , avec  $\ell < t < r$ , est *admissible à droite* pour  $T$  s'ils existent un  $k \in \mathbb{Z}$  et un  $a \in A$  tels que  $t = T^k(\gamma_a)$  et

- (i) si  $k > 0$  alors  $t < T^h(\gamma_a)$  pour tout  $h$  tel que  $0 < h < k$ ,
- (ii) si  $k \leq 0$  alors  $t < T^h(\gamma_a)$  pour tout  $h$  tel que  $k < h \leq 0$ .

On dit aussi que  $t$  est lui-même admissible à droite. On remarque que pour tout  $\ell < \gamma_a$  les semi-intervalles  $[\ell, \gamma_a[$  sont admissibles à droite.

**Exemple 5.1.** Soient  $A = \{u, v, w\}$  et  $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ . Soit  $T$  la 3-transformation d'échange d'intervalles sur  $[0, 1[$  montrée dans la Figure 5.1. Elle est la rotation d'angle  $2\alpha \bmod 1$  sur les trois intervalles

$$I_u = [0, 1 - 2\alpha[, \quad I_v = [1 - 2\alpha, 1 - \alpha[, \quad I_w = [1\alpha, 1[$$

Les semi-intervalles  $[0, t[$  avec  $t = 1 - 2\alpha$  et  $t = 1 - \alpha$  sont admissibles à droite car  $1 - 2\alpha = \gamma_v$  et  $1 - \alpha = \gamma_w$ . Par contre, pour  $t = 2 - 3\alpha$ ,  $t$  n'est pas admissible à droite car  $t = T^{-1}(\gamma_w)$  mais  $\gamma_w < t$ , ce qui contredit la condition (ii).

On suppose maintenant que  $T$  est minimale. Soit  $I \subseteq [\ell, r[$  un semi-intervalle. Comme  $T$  est minimale, pour tout  $z \in [\ell, r[$  il existe un entier  $n > 0$  tel que  $T^n(z) \in I$ .

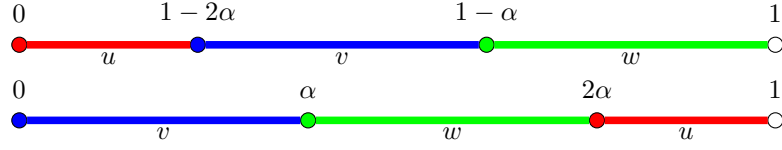


FIGURE 5.1 – Une 3-transformation d'échange d'intervalles.

On appelle *transformation induite* (ou *transformation de premier retour à droite*) par  $T$  sur  $I$  la transformation  $S : I \rightarrow I$  définie pour tout  $z \in I$  par  $S(z) = T^n(z)$  avec  $n = \rho(z) = \min\{n > 0 \mid T^n(z) \in I\}$ . Le semi-intervalle  $I$  est appelé le *domaine* de  $S$  et est dénoté  $D(S)$ .

**Exemple 5.2.** Soient  $T$  la transformation de l'Exemple 5.1 et  $I = [0, 2\alpha[$ . Les valeurs de  $\rho(z) = \min\{n > 0 \mid T^n(z) \in I\}$  sur  $[0, 1[$  sont données dans le Tableau 5.1.

$z$	$\rho(z)$
$0 \leq z < 1 - 2\alpha$	2
$1 - 2\alpha \leq z < 1$	1

TABLE 5.1 – Les valeurs de  $\rho$ .

La transformation induite par  $T$  sur  $I$  est

$$S(z) = \begin{cases} T^2(z) & \text{if } 0 \leq z < 1 - 2\alpha \\ T(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat suivant a été démontré par Rauzy (voir [13, Théorème 14]).

**Théorème 5.3** (Rauzy, 1979). *Soient  $T$  une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles et  $I$  un intervalle admissible à droite pour  $T$ . La transformation induite par  $T$  sur  $I$  est une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles.*

**Exemple 5.4.** On considère à nouveau la transformation de l'Exemple 5.1. La transformation induite par  $T$  sur le semi-intervalle  $I = [0, 2\alpha[$  est la 3-transformation d'échange d'intervalles représentée dans la Figure 5.2.

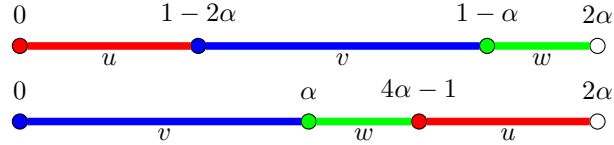


FIGURE 5.2 – La transformation induite sur  $I$ .

Soit  $T = T_{\lambda, \pi}$  une transformation d'échange intervalles régulière sur  $[\ell, r[$ . On pose  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$ . Si on dénote  $\gamma_i = \gamma_{a_i}$  et  $\delta_{\pi(i)} = \delta_{\pi(a_i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq s$ , on a  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_s$  et  $\delta_{\pi(1)} < \delta_{\pi(2)} < \dots < \delta_{\pi(s)}$ . Soit

$$Z(T) = [\ell, \max\{\gamma_s, \delta_{\pi s}\}].$$

L'intervalle  $Z(T)$  est le plus grand semi-intervalle admissible à droite pour  $T$ . On remarque que  $Z(T) = [\ell, \max\{\mu_{s-1}, \nu_{\pi(s-1)}\}[$ .

On dénote avec  $\psi(T)$  la transformation induite par  $T$  sur  $Z(T)$ .

Le résultat suivant a été démontré par Rauzy (voir [13, Théorème 23]).

**Théorème 5.5** (Rauzy, 1979). *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière. Un semi-intervalle  $I$  est admissible à droite par  $T$  si et seulement si il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $I = Z(\psi^n(T))$ . De plus, dans ce cas, la transformation induite par  $T$  sur  $I$  est  $\psi^{n+1}(T)$ .*

On appelle *induction de Rauzy à droite* la fonction  $T \mapsto \psi(T)$ . Cette fonction est définie de deux manières différentes selon que  $\gamma_s < \delta_{\pi(s)}$  ou  $\delta_{\pi(s)} < \gamma_s$ . On remarque que, comme  $T$  est régulière, on ne peut pas avoir  $\gamma_s = \delta_{\pi(s)}$ .

- Si  $\gamma_s < \delta_{\pi(s)}$ , alors on a  $Z(T) = [\ell, \delta_{\pi(s}[$  et pour tout  $z \in Z(T)$

$$S(z) = \begin{cases} T^2(z) & \text{si } z \in I_{a_{\pi(s)}} \\ T(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformation  $S$  est la transformation d'échange d'intervalles relative à la famille  $(K_a)_{a \in A}$  avec  $K_a = I_a \cap Z(T)$  pour tout  $a \in A$ . On note que  $K_a = I_a$  pour tout  $a \neq a_s$ . Les valeurs de translation  $\beta_a$  sont données par

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_{\pi(s)} + \alpha_s & \text{si } i = \pi(s) \\ \alpha_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on note, pour plus de simplicité,  $\alpha_i = \alpha_{a_i}$  et  $\beta_i = \beta_{a_i}$ . En résumé, dans ce cas le semi-intervalle  $J_{a_{\pi(s)}}$  est supprimé et le semi-intervalle  $J_{a_s}$  est découpé en  $S(K_{a_s})$  et  $S(K_{a_{\pi(s)}})$ . Les frontières gauches des semi-intervalles  $K_a$  sont les frontières gauches des semi-intervalles  $I_a$ . La transformation est représentée dans la Figure 5.3 avec la frontière gauche du semi-intervalle  $S(K_{a_{\pi(s)}})$  dénotée  $\delta'_{\pi(s)}$ .

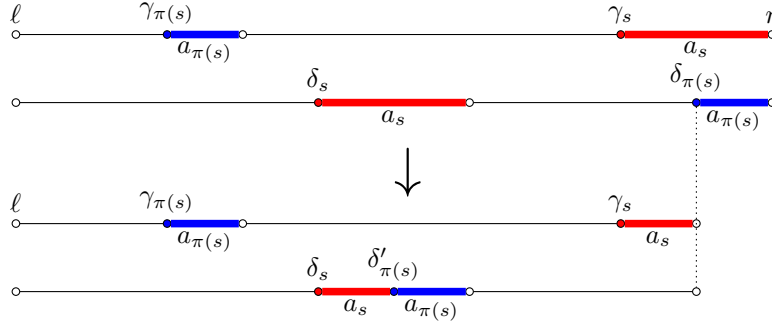


FIGURE 5.3 – Induction de Rauzy à droite dans le cas  $\gamma_s < \delta_{\pi(s)}$ .

- Si  $\delta_{\pi(s)} < \gamma_s$ , alors on a  $Z(T) = [\ell, \gamma_s[$  et pour tout  $z \in Z(T)$

$$S(z) = \begin{cases} T^2(z) & \text{si } z \in T^{-1}(I_{a_s}) \\ T(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformation  $S$  est la transformation d'échange d'intervalles relative à la famille  $(K_a)_{a \in A}$  avec

$$K_a = \begin{cases} T^{-1}(I_a) & \text{si } a = a_s \\ T^{-1}(T(I_a) \cap Z(T)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que  $K_a = I_a$  pour tout  $a \neq a_s, a_{\pi(s)}$ . De plus,  $K_a = S^{-1}(T(I_a) \cap Z(T))$  dans tous les cas. Les valeurs de translation  $\beta_a$  sont données par

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_{\pi(i)} + \alpha_s & \text{si } i = s \\ \alpha_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou, comme dans le cas précédent,  $\alpha_i = \alpha_{a_i}$  et  $\beta_i = \beta_{a_i}$ . En résumé, dans ce cas le semi-intervalle  $I_{a_{\pi(s)}}$  est découpé en  $K_{a_{\pi(s)}}$  et  $K_{a_s}$ . Les frontières gauches des semi-intervalles  $S(K_a)$  sont les frontières gauches des semi-intervalles  $J_a$ . La transformation est représentée dans la Figure 5.4 avec la frontière gauche du semi-intervalle  $K_{a_s}$  dénotée  $\gamma'_s$ .

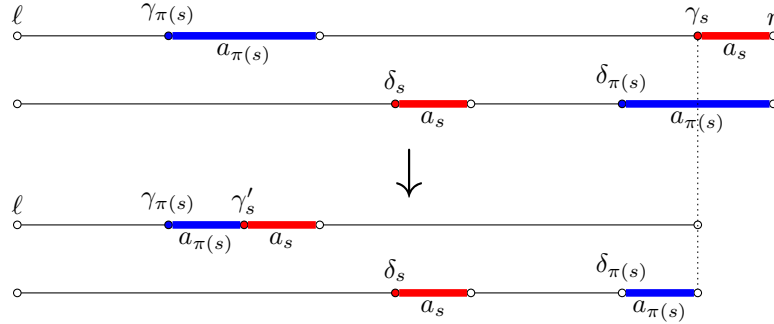


FIGURE 5.4 – Induction de Rauzy à droite dans le cas  $\delta_{\pi(s)} < \gamma_s$ .

**Exemple 5.6.** Soit  $T$  la transformation de l'Exemple 5.2. Comme  $Z(T) = [0, 2\alpha[$ , la transformation  $\psi(T)$  est celle représentée en Figure 5.2. La transformation  $\psi^2(T)$  est représentée dans la Figure 5.5.

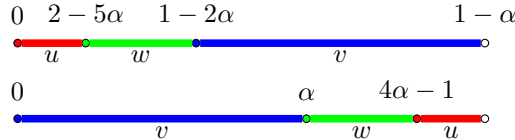


FIGURE 5.5 – La transformation  $\psi^2(T)$ .

## 5.2 Induction de Rauzy à gauche

On peut définir l'*induction de Rauzy à gauche* de façon symétrique que dans la Section 5.1.

Soit  $T = T_{\lambda, \pi}$  une transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $[\ell, r[$ . On pose  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$ . Si on dénote  $\mu_i = \mu_{a_i}$  et  $\nu_{\pi(i)} = \nu_{\pi(a_i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq s$ , on a  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_s$  et  $\nu_{\pi(1)} < \nu_{\pi(2)} < \dots < \nu_{\pi(s)}$ . Soit

$$Y(T) = [\min\{\mu_1, \nu_{\pi(1)}\}, r[.$$

On remarque que  $Y(T) = [\min\{\gamma_2, \delta_{\pi(2)}, r\}$ . On dénote avec  $\varphi(T)$  la transformation induite par  $T$  sur  $Y(T)$ .

On dit que le semi-intervalle  $[t, r[$ , avec  $\ell < t < r[$ , est *admissible à gauche* pour  $T$  s'ils existent un  $k \in \mathbb{Z}$  et un  $a \in A$  tels que  $t = T^k(\gamma_a)$  et



- (i) si  $k > 0$  alors  $T^h(\gamma_a) < t$  pour tout  $h$  tel que  $0 < h < k$ ,
- (ii) si  $k \leq 0$  alors  $T^h(\gamma_a) < t$  pour tout  $h$  tel que  $k < h \leq 0$ .

On dit aussi que  $t$  est lui-même admissible à gauche.

Le résultat symétrique du Théorème 5.5 vaut aussi pour les intervalles admissibles à gauche.

**Théorème 5.7.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière. Un semi-intervalle  $I$  est admissible à gauche par  $T$  si et seulement si il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $I = Y(\varphi^n(T))$ . De plus, dans ce cas, la transformation induite par  $T$  sur  $I$  est  $\varphi^{n+1}(T)$ .*

### 5.3 Induction et automorphismes

On rappelle que pour tout  $z \in [ell, r[$ , le codage naturel de  $T$  par rapport à  $z$  est le mot infini  $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$  défini par  $a_n = a$  si  $T^n(z) \in I_a$ .

On dénote avec  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les deux morphismes de  $A^*$  dans lui-même définis par

$$\theta_1(a) = \begin{cases} a_{pi(s)} a_s & \text{si } a = a_{\pi(s)} \\ a & \text{sinon,} \end{cases} \quad \theta_2(a) = \begin{cases} a_{\pi(s)} a_s & \text{si } a = a_s \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut étendre les morphismes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à des automorphismes du groupe libre  $A^\circ$ , appelés *automorphismes élémentaires* (voir [12]).

Le résultat suivant a été démontré, avec une preuve différente, par Jullian dans [8].

**Proposition 5.8.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $A$ ,  $S = \psi(T)$  et  $I = Z(T)$ . Il existe un automorphisme  $\theta$  du groupe libre  $A^\circ$  tel que  $\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z))$  pour tout  $z \in I$ .*

*Démonstration.* On a deux cas différents, selon que  $\gamma_s < \delta_{\pi(s)}$  ou vice versa.

- Si  $\gamma_s < \delta_{\pi(s)}$ , on a  $Z(T) = [\ell, \delta_{pi(s)}[$  et pour tout  $z \in Z(T)$

$$S(z) = \begin{cases} T^2(z) & \text{si } z \in K_{a_{pi(s)}} = I_{a_{\pi(s)}} \\ T(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prouve par récurrence sur la longueur de  $w$  que pour tout  $z \in I$ ,  $\Sigma_S(z) \in wA^*$  si et seulement si  $\Sigma_T(z) \in \theta_1(w)A^*$ .

La propriété est vraie quand  $w$  est le mot vide. On suppose maintenant que  $w = av$  avec  $a \in A$ . Si  $a \neq a_{\pi(s)}$ , alors  $\theta_1(a) = a$ ,  $S(z) = T(z)$  et, d'après l'hypothèse inductive, on a

$$\Sigma_S(z) \in avA^* \Leftrightarrow \Sigma_S(S(z)) \in vA^* \Leftrightarrow \Sigma_T(T(z)) \in \theta_1(v)A^* \Leftrightarrow \Sigma_T(z) \in \theta_1(w)A^*.$$

Autrement, si  $a = a_{\pi(s)}$ , on a  $\theta_1(a) = a_{\pi(s)} a_s$  et  $S(z) = T^2(z)$ . De plus,  $\Sigma_T(z) = a_{\pi(s)} a_s \Sigma_T(T^2(z))$  et donc

$$\Sigma_S(z) \in avA^* \Leftrightarrow \Sigma_S(S(z)) \in vA^* \Leftrightarrow \Sigma_T(T^2(z)) \in \theta_1(v)A^* \Leftrightarrow \Sigma_T(z) \in \theta_1(w)A^*.$$

Cela montre que  $\Sigma_T(z) = \theta_2(\Sigma_S(z))$ .

- Si  $\delta_{\pi(s)} < \gamma_s$ , on a  $Z(T) = [\ell, \gamma_s[$  et pour tout  $z \in Z(T)$

$$S(z) = \begin{cases} T^2(z) & \text{si } z \in K_{a_s} = T^{-1}(I_{a_s}) \\ T(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'une manière similaire au cas précédent, on prouve par récurrence sur la longueur de  $w$  que pour tout  $z \in I$ ,  $\text{Sigma}_S(z) \in wA^*$  si et seulement si  $\Sigma_T(z) \in \theta_2(w)A^*$ .

La propriété est vraie quand  $w$  est le mot vide. On suppose maintenant que  $w = av$  avec  $a \in A$ . Si  $a \neq a_s$ , alors  $\theta_2(a) = a$ ,  $S(z) = T(z)$ ,  $z \in K_a \subseteq I_a$  et, d'après l'hypothèse inductive, on a

$$\Sigma_S(z) \in avA^* \Leftrightarrow \Sigma_S(S(z)) \in vA^* \Leftrightarrow \Sigma_T(T(z)) \in \theta_2(v)A^* \Leftrightarrow \Sigma_T(z) \in \theta_2(w)A^*.$$

Autrement, si  $a = a_s$ , on a  $\theta_2(a) = a_{\pi(s)}a_s$ ,  $S(z) = T^2(z)$  et  $z \in K_{a_s} = T^{-1}(I_{a_s}) \subseteq I_{a_{\pi(s)}}$ . Donc

$$\Sigma_S(z) \in avA^* \Leftrightarrow \Sigma_S(S(z)) \in vA^* \Leftrightarrow \Sigma_T(T^2(z)) \in \theta_2(v)A^* \Leftrightarrow \Sigma_T(z) \in \theta_2(w)A^*,$$

où la dernière équivalence provient du fait que  $\Sigma_T(z) \in a_{\pi(s)}a_sA^*$ . Cela montre que  $\Sigma_T(z) = \theta_2(\Sigma_S(z))$ . □

**Exemple 5.9.** Soit  $T$  la transformation d'échange d'intervalles vue dans l'Exemple 5.1. L'automorphisme  $\theta_1$  est défini par

$$\theta_1(u) = uw, \quad \theta_1(v) = v, \quad \theta_1(w) = w.$$

L'induction de Rauzy à droite de  $T$  est calculée dans l'Exemple 5.4. On a  $\Sigma_S(\alpha) = vuwvu \dots$  et  $\Sigma_T(\alpha) = vuwvuw \dots = \theta_1(\Sigma_S(\alpha))$ .

On énonce une version symétrique de la Proposition 5.8 pour l'induction de Rauzy à gauche. La preuve est similaire.

**Proposition 5.10.** Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $A$ ,  $S = \phi(T)$  et  $I = Y(T)$ . Il existe un automorphisme  $\theta$  du groupe libre  $A^\circ$  tel que  $\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z))$  pour tout  $z \in I$ .

En combinant les Propositions 5.8 et 5.10, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 5.11.** Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $A$  et  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$ . Soient  $S = \chi(T)$  et  $I$  le domaine de  $S$ . Il existe un automorphisme  $\theta$  du groupe libre  $A^\circ$  tel que  $\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z))$  pour tout  $z \in I$ .

*Démonstration.* On peut démontrer facilement le résultat en raisonnant par récurrence sur la longueur de  $\chi$  à l'aide des Propositions 5.8 et 5.8. □

## 5.4 Induction de Rauzy bilatère

Dans cette section, on généralise l'induction de Rauzy à droite et celle à gauche et l'on définit l'induction bilatère.

Soit  $T$   $s$ -transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $[\ell, r[$  relative à  $(I_a)_{a \in A}$ , où  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  avec  $a_1 <_1 a_2 <_1 \dots <_1 a_s$ . Comme d'habitude, on pose  $\gamma_i = \gamma_{a_i}$  et  $\mu_i = \mu_{a_i}$ .

Pour un semi-intervalle  $I = [u, v[ \subseteq [\ell, r[$ , on définit les fonctions suivants sur  $[\ell, r[$ , définis pour tout  $z \in I$

$$\rho_{I,T}^+(z) = \min\{n > 0 \mid T^n(z) \in ]u, v]\}, \quad \rho_{I,T}^-(z) = \min\{n \geq 0 \mid T^{-n}(z) \in ]u, v]\}.$$

Pour tout  $z \in I$ , soit  $E_{I,T}(z)$  l'ensemble

$$E_{I,T}(z) = \{k \in \mathbb{Z} \mid -\rho_{I,T}^-(z) \leq k < \rho_{I,T}^+(z)\}.$$

On définit l'ensemble des *voisins* d'un pint  $z \in I$  par rapport à  $T$  comme

$$N_{I,T}(z) = \{T^k(z) \mid k \in E_{I,T}(z)\}.$$

Enfin, l'ensemble des *points de séparation* de  $I$  par rapport à  $T$  est l'ensemble fini

$$\text{Div}(I, T) = \cup_{i=1}^s N_{I,T}(\gamma_i).$$

Pour  $\ell \leq u < v \leq r$  on dit que le semi-intervalle  $I = [u, v[$  est *admissible* pour  $T$  si  $u, v \in \text{Div}(I, T) \cup \{r\}$ .

On remarque que un semi-intervalle  $[\ell, v[$  est admissible à droit si et seulement si il est admissible et que le semi-intervalle  $[u, r[$  est admissible à gauche si et seulement si il est admissible. De plus, le semi-intervalle  $[\ell, r[$  est aussi admissible.

Le résultat suivant est une généralisation du Théorème 5.3. On rappelle que  $\text{Sep}(T)$  est d'ensemble des points de séparation de  $T$ , c'est-à-dire les points  $0, \mu_1, \dots, \mu_{s-1}$ .

**Théorème 5.12.** *Soit  $T$  une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $[\ell, r[$ . Pour tout semi-intervalle admissible  $[u, v[$ , la transformation  $S$  induite par  $T$  sur  $I$  est une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles. De plus,  $\text{Sep}(S) = \text{Div}(I, T) \cap I$ .*

*Démonstration.* Comme  $T$  est régulière, elle est minimale. Donc, pour tout  $i \in \{2, \dots, s\}$  ils existent des points  $x_i, y_i \in ]u, v[$  tels que il existe un chemin de  $x_i$  à  $y_i$  passant par  $\gamma_i$  qui ne contient aucune point de  $I$  sauf à son origine et à sa fin. Comme  $T$  est régulière, les  $x_i$  sont tous distincts entre eux et les  $y_i$  sont tous distincts entre eux.

Comme  $I$  est admissible, ils existentst  $g, d \in \{1, \dots, s\}$  tels que  $u \in N_{I,T}(\gamma_g)$  et  $v \in N_{I,T}(\gamma_d)$ . De plus, comme  $u$  est un voisin de  $\gamma_g$  par rapport à  $I$ ,  $u$  est sur le chemin de  $x_g$  à  $y_g$  (il peut être soit avant soit après  $\gamma_g$ ). De la même manière,  $v$  est sur le chemin de  $x_d$  à  $y_d$  (voir Figure 5.6 où  $u$  est avant  $\gamma_g$  et  $v$  est après  $\gamma_d$ ).

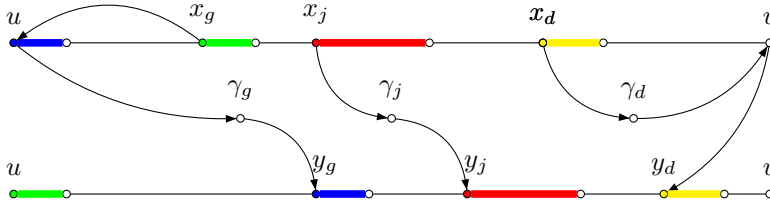


FIGURE 5.6 – la transformation induite sur  $[u, v[$

On pose  $x_1 = y_1 = u$ . Soit  $(I_j)_{1 \leq j \leq s}$  la partition de  $I$  en semi-intervalles telle que  $x_j$  soit la frontière gauche de  $I_j$  pour  $1 \leq j \leq s$ . Soit  $J_j$  la partition de  $I$  telle que  $y_j$  soit la frontière droite de  $J_j$  pour  $1 \leq j \leq s$ .

On va prouver que

$$S(I_j) = \begin{cases} J_j & \text{si } j \neq 1, g \\ J_1 & \text{si } j = g \\ J_g & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

et que la restriction de  $S$  à  $I_j$  est une translation.

- On suppose d'abord que  $j \neq 1, g$ . Donc  $S(x_j) = y_j$ . Soit  $k$  tel que  $y_j = T^k(x_j)$ . On pose  $I'_j = I_j \setminus x_j$ . En raisonnant par récurrence sur  $h$ , on montre que pour  $0 \leq h \leq k-1$ , l'ensemble  $T^h(I'_j)$  ne contient pas  $u, v$  ou tout  $x_i$ .

Cela est vrai pour  $h = 0$ . On suppose que cela soit vrai pour  $h$  avec  $h < k-1$ .

Pour tout  $h'$  avec  $0 \leq h' \leq h$ , l'ensemble  $T^{h'}(I'_j)$  ne contient aucune  $\gamma_i$ . En effet, dans le cas contraire, il existerait un  $h''$  avec  $0 \leq h'' \leq h' \leq h$  tel que  $x_i \in T^{h''}(I'_j)$ , mais cela serait une contradiction. Ainsi,  $T$  est-elle une translation sur  $T^{h'}(I_j)$  (car elle est clairement une translation sur le point  $x_j$ ). Cela implique que  $T^h$  est une translation sur  $I_j$ .

On note aussi que  $T^h(I'_j) \cap I = \emptyset$ . En effet, supposons le contraire. On observe d'abord que l'on ne peut pas avoir  $T^h(x_j) \in I$ , car  $h < k$  impliquerait que  $T^h(x_j) \notin ]u, v[$ , et l'on ne peut pas avoir  $T^h(x_j) = u$  car  $j \neq g$ . Donc  $T^h(I'_j) \cap I \neq \emptyset$  impliquerait que  $u \in T^h(I'_j)$ , mais cela serait une contradiction.

Supposons que  $u = T^{h+1}(z)$  pour un certain  $z \in I'_j$ . Comme  $u$  est dans le chemin de  $x_g$  à  $y_g$ , il existe un  $h'$  avec  $0 \leq h' \leq h$  tel que  $x_g = T^{h'}(z)$ , ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

De manière similaire, en utilisant le fait que  $v$  est sur le chemin de  $x_d$  à  $y_d$ , on peut montrer que  $T^{h+1}(I'_j)$  ne contient pas  $v$ .

Enfin, supposons qu'il existe un  $x_i$  tel que  $x_i \in T^{h+1}(I'_j)$ . Comme la restriction de  $T^h$  à  $I_j$  est une translation,  $T^h(I_j)$  est un semi-intervalle. Comme  $T^{h+1}(x_j)$  n'est pas dans  $I$ , le fait que  $T^{h+1}(I'_j) \cap I \neq \emptyset$  impliquerait que  $u \in T^h(I_j)$ , mais cela serait une contradiction.

Cela implique que  $T^k$  est continue pour tout point de  $I'_j$  et que  $S = T^k(x)$  pour tout  $x \in I_j$ . Ainsi, la restriction de  $S$  à  $I_j$  est-elle une translation sur  $J_j$ .

- Si  $j = 1$ , alors  $S(x_1) = S(u) = y_g$ . Le même argument que ci-dessus prouve que la restriction de  $S$  à  $I_1$  est une translation de  $I_1$  à  $J_g$ .
- Enfin, si  $j = g$ , alors  $S(x_g) = x_1 = u$  et, de façon similaire, on obtient que la restriction de  $S$  à  $I_g$  est une translation de  $I_1$  à  $J_1$ .

Comme  $T$  est une bijection et  $S$  est la transformation induite par  $T$ ,  $S$  est aussi une bijection. Cela implique que la restriction de  $S$  à chacun des semi-intervalles  $I_j$  est une bijection dans le semi-intervalle correspondant. Ainsi,  $S$  est-elle une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles. De plus elle est régulière car les orbites des points  $x_2, \dots, x_s$  par rapport à  $S$  sont incluses dans les orbites de  $\gamma_2, \dots, \gamma_s$ , par rapport à  $T$ , lesquels sont, par hypothèse, infinies et disjointes.

Enfin, on montre que  $\text{Sep}(S) = \text{Div}(I, T) \cap I$ . On a  $\text{Sep}(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  avec  $x_i \in N_{I, T}(\gamma_i)$ . Donc  $\text{Sep}(S) \subseteq \text{Div}(I, T) \cap I$ . Inversement, soit  $x \in \text{Div}(I, T) \cap I$

$I$ . Donc  $x \in N_{I,T}(\gamma_i) \cap I$  pour quelque  $1 \leq i \leq s$ . Si  $i \neq 1, g$ , alors  $x = x_i$ . Si  $i = 1$ , alors soit  $x = u$  (si  $u = \ell$ ) soit  $x = x_{\pi(1)}$  car  $\gamma_1 = T(\gamma_{\pi(1)})$ . Enfin, si  $i = g$  alors soit  $x = u$  soit  $x = x_g$ . Ainsi, dans tous les cas a-t-on  $x \in \text{Sep}(S)$ .  $\square$

On va donner une généralisation du Théorème 5.7 au cas bilatère. Pour faire cela on a besoin de quelques résultats préliminaires. On rappelle que  $Y(T)$  et  $Z(T)$  sont respectivement les domaines de  $\varphi(T)$  et de  $\psi(T)$ .

**Lemme 5.13.** *Soit  $I$  un semi-intervalle inclus strictement dans  $[\ell, r$  et admissible pour  $T$ . Alors soit  $I \subset Y(T)$  soit  $I \subset Z(T)$ .*

*Démonstration.* Soient  $I = [u, v[$ ,  $Y(T) = [y, r[$  et  $Z(T) = [\ell, z[$ .

Comme  $I$  est inclus strictement dans  $[\ell, r[$ , on a soit  $\ell < u$  soit  $v < r$ .

Supposons que  $v < r$ . Si  $y \leq u$ , alors  $I \subseteq Y(T)$ . Sinon, on montre que  $v \leq z$ . En effet, supposons le contraire. Comme  $I$  est admissible, on a  $v = T^k(\gamma_i)$  avec  $k \in E_{I,T}(\gamma_i)$  pour quelque  $i$  avec  $1 \leq i \leq s$ . On ne peut pas avoir  $k > 0$  car  $u < T(\gamma_i) < v$  implique  $T(\gamma_i) \in ]u, v[$ , et cela serait en contradiction avec le fait que  $k < \rho_I^+(\gamma_i)$ . De même, on ne peut pas avoir  $k \leq 0$  car  $u < \gamma_i < v$  implique  $\gamma_i \in ]u, v[$ . Donc  $I \subseteq Z(T)$ .

La preuve pour le cas où  $\ell < u$  est symétrique.  $\square$

Le lemme suivant est la version bilatère de [13, Lemme 22].

**Lemme 5.14.** *Soit  $T$  une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles sur  $[\ell, r[$ . Soient  $J$  un semi-intervalle admissible pour  $T$  et  $S$  la transformation induite par  $T$  sur  $J$ . Un semi-intervalle  $I \subseteq J$  est admissible pour  $T$  si et seulement si il est admissible pour  $S$ . De plus  $\text{Div}(J, T) \subseteq \text{Div}(I, T)$ .*

*Démonstration.* Soient  $J = [t, w[$  et  $I = [u, v[$ . Comme  $J$  est admissible pour  $T$ , la transformation  $S$  est une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles régulière pour le Théorème 5.12.

( $\Rightarrow$ ) Supposons d'abord que  $I$  soit admissible pour  $T$ . Alors,  $u = T^g(\gamma_i)$  avec  $g \in E_{I,T}(\gamma_i)$  pour quelque  $1 \leq i \leq s$ , tandis que  $v = T^d(\gamma_j)$  avec  $d \in E_{I,T}(\gamma_j)$  pour quelque  $1 \leq j \leq s$  ou  $v = r$ .

Comme  $S$  est la transformation induite par  $T$  sur  $J$ , il existe un point de separation  $x$  de  $S$  de la forme  $x = T^m(\gamma_i)$  avec  $m = -\rho_{J,T}^-(\gamma_i)$  pour un certain  $1 \leq i \leq s$  (donc  $m \in E_{J,T}(\gamma_i)$ ). Ainsi, a-t-on  $u = T^{g-m}(x)$ .

- On étudie d'abord le cas  $g - m > 0$ . Comme  $u, x \in J$ , il existe un entier  $n$  avec  $0 < n \leq g - m$  tel que  $u = S^n(x)$ . On montre que  $n \in E_{I,S}(x)$ . Supposons par l'absurde que  $\rho_{I,S}^+(x) \leq n$ . Ainsi, existe-t-il un  $k$  avec  $0 < k \leq n$  tel que  $S^k(x) \in I$ . On ne peut pas avoir  $k = n$  car  $u \notin I$ . Donc  $k < n$ .

Ensuite, il existe un  $h$  avec  $0 < h < g - m$  tel que  $T^h(x) = S^k(x)$ . En effet, si l'on pose  $y = S^k(x)$ , on a  $u = T^{g-m-h}(y) = S^{n-k}(y)$  et donc  $h < g - m$ . Si  $0 < h \leq -m$ , alors  $T^h(x) = T^{m+h}(\gamma_i) \in J$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $m \in E_{I,T}(\gamma_i)$ . Si  $-m < h < g - m$ , alors  $T^h(x) = T^{m+h}(\gamma_i) \in J$ , ce qui contredit le fait que  $g \in E_{I,T}(\gamma_i)$ . Cela montre que  $n \in E_{I,S}(x)$  et donc que  $u \in \text{Div}(I, S)$ .

- Supposons ensuite que  $g - m \leq 0$ . Il existe un entier  $n$  avec  $g - m \leq n \leq 0$  tel que  $u = S^n(x)$ . On montre que  $n \in E_{I,S}(x)$ . Supposons par l'absurde que  $n < -\rho_{I,S}^-(x)$ . Ainsi, existe-t-il un  $k$  avec  $n < k < 0$  tel

que  $S^k(x) = T^h(x)$ . Donc  $T^h(x) = T^{h+m}(\gamma_i)$  avec  $g < h + m < m$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $m \in E_{I,T}(\gamma_i)$ .

La preuve que  $v \in \text{Div}(I, S)$  est similaire.

( $\Leftarrow$ ) Supposons maintenant que  $I$  soit admissible pour  $S$ . Ils existent  $x \in \text{Sep}(S)$  et  $g \in E_{I,S}(x)$  tels que  $u = S^g(x)$ . Mais  $x = T^m(\gamma_i)$  et comme  $u, x \in J$ , il existe un certain  $n$  tel que  $u = T^n(\gamma_i)$ .

Supposons, par exemple, que  $n > 0$  et qu'il existe un  $k$  avec  $0 < k < n$  tel que  $T^k(\gamma_i) \in I$ . Comme  $I \subseteq J$ , on a que  $T^k(\gamma_i)$  est de la forme  $S^h(x)$  avec  $0 < h < g$ , ce qui contredit le fait que  $g \in E_{I,S}(x)$ . Donc  $n \in E_{I,T}(\gamma_i)$  et  $u \in \text{Div}(I, T)$ . De façon similaire on prouve le cas  $n \leq 0$ .

La preuve que  $v \in \text{Div}(I, T)$  est similaire.

Enfin, considérons le cas où  $I$  soit admissible pour  $T$ , et donc pour  $S$ .

Pour tout  $\gamma_i \in \text{Sep}(T)$ , on a

$$\min\{n \geq 0 \mid T^{-n}(\gamma_i) \in ]u, v[\} \geq \min\{n \geq 0 \mid T^{-n}(\gamma_i) \in ]t, w[\}$$

et

$$\min\{n > 0 \mid T^n(\gamma_i) \in ]u, v[\} \geq \min\{n > 0 \mid T^n(\gamma_i) \in ]t, w[\},$$

ce qui montre que  $\text{Div}(J, T) \subseteq \text{Div}(I, T)$ .  $\square$

On peut maintenant donner le résultat principal de cette section.

**Théorème 5.15.** *Soit  $T$  une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $[\ell, r[$ . Un semi-intervalle  $I$  est admissible pour  $T$  si et seulement si il existe une séquence  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$  tel que  $I$  est le domaine de  $\chi(T)$ .*

*Démonstration.* On montre d'abord par récurrence sur la longueur de  $\chi$  que le domaine de  $\chi(T)$  est admissible. Cela est vrai pour  $|\chi| = 0$  car  $[\ell, r[$  est admissible. Ensuite, supposons que  $J = D(\chi(T))$  soit admissible.  $D(\varphi\chi(T))$  est admissible pour  $\chi(T)$  car  $D(\varphi\chi(T)) = Y(\chi(T))$ . D'après le Lemme 5.14,  $D(\varphi\chi(T))$  est admissible aussi pour  $T$ . La démonstration de l'admissibilité de  $D(\psi\chi(T))$  pour  $T$  est la même.

Inversement, supposons que  $I$  soit admissible. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des séquences  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$  tels que  $I \subseteq D(\chi(T))$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  est fermé par suffixes. En effet il contient le mot vide  $\varepsilon$ , car  $[\ell, r[$  est admissible, et pour tout  $\xi, \chi \in \{\varphi, \psi\}^*$  on a  $D(\xi\chi(T)) \subseteq D(\chi(T))$ . Ainsi,  $\xi\chi \in \mathcal{F}$  implique-t-il  $\chi \in \mathcal{F}$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  est fini. En effet, d'après le Lemme 5.14 appliqué à  $J = D(\chi(T))$ , on a pour tout  $\chi \in \mathcal{F}$ ,  $\text{Div}(\chi(T), T) \subseteq \text{Div}(I, T)$ . En particulier, les frontières de  $D(\chi(T))$  appartient à  $\text{Div}(I, T)$ . Comme  $\text{Div}(I, T)$  est un ensemble fini, il existe un nombre fini de semi-intervalles possibles  $D(\chi(T))$ . Donc  $\mathcal{F}$  est fini. De plus il n'existe pas un mot infini avec tous ses suffixes dans  $\mathcal{F}$ . Ainsi, existe-t-il un  $\chi \in \mathcal{F}$  tel que  $\varphi\chi, \psi\chi \notin \mathcal{F}$  Si  $I$  était inclus strictement dans  $D(\chi(T))$ , on aurait, d'après le Lemme 5.13 appliqué à  $\chi(T)$ , soit  $I \subseteq Y(\chi(T)) = D(\varphi\chi(T))$  soit  $I \subseteq Z(\chi(T)) = D(\psi\chi(T))$ . Dans les deux cas on a une contradiction. Ainsi, a-t-on  $I = D(\chi(T))$ .  $\square$

## 5.5 Mots de premier retour

Soit  $F$  un ensemble factoriel. Pour un mot  $w \in F$  on définit

$$\Gamma_F(w) = \{z \in F \mid wz \in A^+w \cap F\}, \quad \Gamma'_F(w) = \{z \in F \mid zw \in wA^+ \cap F\}$$

et

$$R_F(w) = \Gamma_F(w) \setminus \Gamma_F(w)A^+, \quad R'_F(w) = \Gamma'_F(w) \setminus A^+\Gamma'_F(w).$$

Les ensembles  $\Gamma_F(w)$  et  $R_F(w)$  (resp.  $\Gamma'_F(w)$  et  $R'_F(w)$ ) sont appelés respectivement ensemble des *mots de retour à droite* et *mots de premier retour à droite* (resp. ensemble des *mots de retour à gauche* et *mots de premier retour à gauche*).

La relation entre  $R_F(w)$  et  $R'_F(w)$  est

$$wR_F(w) = R'_F(w)w.$$

Les mots de l'ensemble  $wR_F(w) = R'_F(w)w$  sont appelés *mots de retour complets* (voir [9]).

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on appellera les mots de (premier) retour à droite simplement les mots de (premier) retour, en omettant la spécification «droite».

On remarque qu'un ensemble récurrent  $F$  est uniformément récurrent si et seulement si l'ensemble  $R_F(w)$  est fini pour tout  $w \in F$ . En effet, soit  $N$  la longueur maximale des mots de  $R_F(w)$  pour un mot  $w$  de longueur  $n$ , alors tout mot de longueur  $N + n$  contient  $w$  comme facteur. La réciproque est évidente.

On rappelle de la Section 4.3 que si  $T$  est une transformation d'échange d'intervalles régulière sur  $[\ell, r[$ , pour tout  $z \in [\ell, r[$ , un mot  $w$  est dans  $F(\Sigma_T(z))$  si et seulement si  $I_w \neq \emptyset$ . Donc, dans ce cas, l'ensemble des facteurs de  $\Sigma_T(z)$  ne dépende pas du point  $z$  et on peut le dénoter  $F(T)$ .

**Proposition 5.16.** *Soient  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière,  $F = F(T)$  et  $w \in F$ . Soit  $S$  la transformation induite par  $T$  sur  $J_w$ . On a  $x \in R_F(w)$  si et seulement si*

$$\Sigma_T(z) = x\Sigma_T(S(z))$$

pour quelque  $z \in J_w$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $x \in R_F(w)$ . Pour tout  $z \in J_w \cap I_x$  on a  $|x| = \rho_{J_w, T}^+(z)$  et

$$\Sigma_T(z) = x\Sigma_T(T^{|x|}(z)) = x\Sigma_T(S(z)).$$

Inversement, supposons que  $\Sigma_T(z) = x\Sigma_T(S(z))$  pour quelque  $z \in J_w$ . On a  $T^{|x|}(z) \in J_w$  et donc  $wx \in A^*w$ . De plus,  $|x| = \rho_{J_w, T}^+(z)$  et donc  $x \in R_F(w)$ .  $\square$

On montrera que pour tout semi-intervalle  $J_x$  il existe une transformation obtenue par une séquence d'inductions de Rauzy à gauche et à droite telle que son domaine est  $J_x$ . Pour le prouver on a besoin des lemmes suivantes, dans lesquels on suppose que  $T$  est une  $s$ -transformation d'échange d'intervalles régulière sur le semi-intervalle  $[\ell, r[$ .

Dans la preuve du premier lemme, on utilisera le fait que si  $T$  est une transformation d'échange d'intervalles minimale alors  $F(T)$  est neutre et donc on a  $\text{Card}(F(T) \cap A^n) = (s-1)n + 1$

**Lemme 5.17.** *Pour tout  $k \geq$ , l'ensemble*

$$P_k = \{T^h(\gamma_i) \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq h \leq k\}$$

*est l'ensemble des  $(s-1)k + 1$  frontières gauches des semi-intervalles  $J_y$  pour tous les mots  $y$  avec  $|y| = k$ .*

*Démonstration.* Soit  $Q_k$  l'ensemble des frontières gauches des semi-intervalles  $J_y$  avec  $|y| = k$ . Comme  $\text{Card}((F(T) \cap A^k) = (s-1)k+1$ , on a  $\text{Card}((Q_k) = (s-1)k+1$ . Comme  $T$  est régulière, dans l'ensemble

$$R_k = \{T^h(\gamma_i) \mid 2 \leq i \leq s, 1 \leq h \leq k\}$$

il y a  $(s-1)k$  points distinct. De plus, comme

$$\gamma_1 = T(\gamma_{\pi(1)}), T(\gamma_1) = T^2(\gamma_{\pi(1)}), \dots, T^{k-1}(\gamma_1) = T^k(\gamma_{\pi(1)}),$$

on a  $P_k = R_k \cup \{T^k(\gamma_1)\}$ . Cela implique que  $\text{Card}((P_k) \leq (s-1)k+1$ .

D'autre part, si  $y = b_0 \cdots b_{k-1}$ , alors  $J_y = \bigcap_{i=0}^{k-1} T^{k-i}(I_{b_i})$ . Ainsi, la frontière gauche de chaque  $J_y$  est-elle la frontière gauche de quelque  $T^h(I_a)$  pour un certain  $h$  avec  $1 \leq h \leq k$  et  $a \in A$ . Par conséquent,  $Q_k \subseteq P_k$ . Cela prouve que  $\text{Card}((P_k) = (s-1)k+1$  et donc  $P_k = Q_k$ .  $\square$

**Lemme 5.18.** *Pour tout  $w \in F(T)$ , le semi-intervalle  $J_w$  est admissible.*

*Démonstration.* Soient  $w \in F(T)$ ,  $|w| = k$  et  $J_w = [u, v[$ . D'après le Lemme 5.17, ils existent  $1 \leq i \leq s$  et  $1 \leq g \leq k$  tels que  $u = T^g(\gamma_i)$ .

De même on a soit  $v = r$  soit  $v = T^d(\gamma_j)$  avec  $1 \leq j \leq s$  et  $1 \leq d \leq k$ .

Pour tout  $h$  avec  $1 < h < g$ , le point  $T^h(\gamma_i)$  est la frontière gauche d'un semi-intervalle  $J_y$  avec  $y \neq w$  et  $|y| = k$ . Donc  $T^h(\gamma_i) \notin J_w$ . Cela montre que  $g \in E_{J_w, T}(\gamma_i)$  et donc que  $u \in \text{Div}(J_w, T)$ .

Si  $v = r$ , alors  $v \in \text{Div}(J_w, T)$ . Sinon, on montre de la même manière que ci-dessus que  $v \in \text{Div}(J_w, T)$ .

Ainsi,  $J_w$  est-il admissible.  $\square$

**Théorème 5.19.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles. Pour tout  $w \in F(T)$  il existe un  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$  tel que  $J_w$  est le domaine de  $\chi(T)$ .*

*Démonstration.* Soit  $w \in F(T)$ . D'après le Lemme 5.18 le semi-intervalle  $J_w$  est admissible. D'après le Théorème 5.15 il existe une séquence  $\chi(T) \in \{\varphi, \psi\}^*$  telle que  $D(\chi(T)) = J_w$ , d'où le résultat.  $\square$

Le résultat principal de cette section est le Théorème suivant.

**Théorème 5.20.** *Soit  $T$  une transformation d'échange d'intervalles régulière sur l'alphabet  $A$ . Pour tout mot  $w \in F(T)$ , l'ensemble des mots de premier retour sur  $w$  est une base du groupe libre  $A^\circ$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 5.19, il existe une séquence  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$  tel que  $J_w$  est le domaine de  $S = \chi(T)$ . D'après le Théorème 5.11, il existe un automorphisme  $\theta$  du groupe libre  $A^\circ$  tel que  $\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z))$  pour tout  $z \in J_w$ . D'après la Proposition 5.16, on a que  $x \in R_F(w)$  si et seulement si  $\Sigma_T(z) = x\Sigma_T(S(z))$  pour quelque  $x \in J_w$ . Cela implique que  $R_F(w) = \theta(A)$ . En effet, pour tout  $z \in J_w$ , soit  $a$  la première lettre de  $\Sigma_S(z)$ . Donc

$$\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z)) = \theta(a\Sigma_S(S(z))) = \theta(a)\theta(\Sigma_S(S(z))) = \theta(a)\Sigma_T(S(z)).$$

Ainsi, a-t-on  $x \in R_F(w)$  si et seulement si il existe un  $a \in A$  tel que  $x = \theta(a)$ .  $\square$



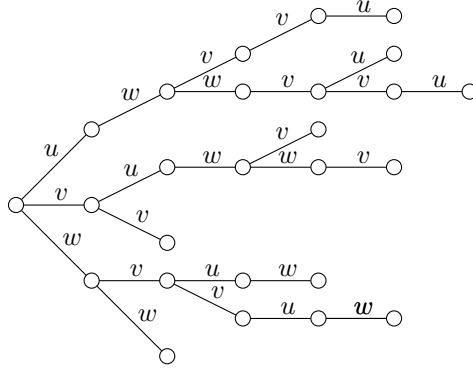


FIGURE 5.7 – L'ensemble  $F$

**Exemple 5.21.** Soit  $T$  la transformation d'échange d'intervalles de l'Exemple 5.1. L'ensemble  $F = F(T)$  est représenté en Figure 5.7 (sont représentés seulement les nœuds qui sont préfixes de  $R_F(u) \cup R_F(v) \cup R_F(w)$ ).

On a

$$\begin{aligned} R_F(u) &= \{wvuv, wvuw, wvuv\}, \\ R_F(v) &= \{uvw, uvw, v\}, \\ R_F(w) &= \{vuw, vuv, w\}. \end{aligned}$$

Chacun de ces ensembles est une base du groupe libre sur  $A = \{u, v, w\}$ . En effet, par exemple, on a

$$u = (vuw)(vuv)^{-1}(vuw)w^{-1}, \quad v = (vuv)(vuw)^{-1},$$

ce qui montre que le groupe engendré par  $R_F(w)$  contient  $u, v$ . Comme  $R_F(w)$  contient  $w$ , il engendre le groupe libre  $A^\circ$ . Donc il est une base du groupe libre  $A^\circ$ .

Le Théorème 5.20 est vrai même pour les ensembles Sturmien (voir [1]).

On illustre la preuve du Théorème 5.20 avec l'exemple suivant.

**Exemple 5.22.** Soit  $T$  la transformation de l'Exemple 5.1. On a  $R_F(w) = \{vuw, vuv, w\}$  (voir l'Exemple 5.21). On représente dans la Figure 5.8 la séquence  $\chi$  des inductions de Rauzy  $\chi$  telle que  $J_w$  est le domaine de  $\chi(T)$ .

La séquence est composée d'une induction à droite suivie par deux inductions à gauche. On a indiqué sur chaque arête l'automorphisme associé (indiquant seulement l'image de la lettre qui est modifiée). On a  $\chi = \varphi^2\psi$  et le morphisme  $\theta$  est défini par

$$\theta(u) = vuv, \quad \theta(v) = vuv, \quad \theta(w) = w.$$

Donc  $R_F(w) = \theta(A)$ .

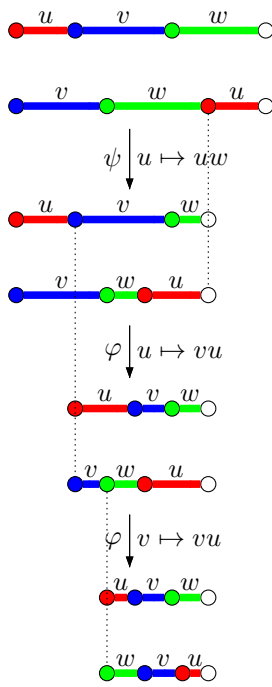


FIGURE 5.8 – La séquence  $\chi \in \{\varphi, \psi\}^*$

## Chapitre 6

# Propriété de la base d'indice fini

Dans ce chapitre on donnera une propriété pour un ensemble, dit de la base d'indice fini, et on prouvera que sous certaines conditions, un ensemble uniformément récurrent satisfait cette propriété. Pour démontrer cela on utilisera plusieurs outils, notamment les graphes d'incidence (Section 6.1) et les automates de classes latérales (Section 6.2).

Dans la Section 6.3 on prouvera que, dans un ensemble acyclique  $F$ , tout code bifixé  $X \subseteq F$  est une base du sous-groupe  $\langle X \rangle$  (Théorème 6.7).

### 6.1 Graphe d'incidence

Soient  $X$  un ensemble,  $P$  l'ensemble de ses préfixes propres et  $S$  l'ensemble de ses suffixes propres. On pose  $P' = P \setminus 1$  et  $S' = S \setminus 1$ .

Le *graphe d'incidence* de  $X$  est le graphe non orienté  $G$  avec comme sommets l'union disjointe de  $P'$  et  $S'$  et comme arêtes les paires  $(p, s)$  où  $p \in P'$ ,  $s \in S'$  sont tels que  $ps \in X$ .

Comme pour les graphes, on appellera *composante connexe* un ensemble maximal de sommets reliés par des chemins. La *trace* d'une composante connexe sur  $P'$  (resp.  $S'$ ) est l'ensemble des  $p \in P'$  (resp.  $s \in S'$ ) qui appartient à la composante.

**Exemple 6.1.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 1.6) et  $X = \{a, baab, babaabaabab, babaabab\}$  un code bifixé  $F$ -maximal de  $F$ -degré 3. Le graphe d'incidence de  $X$  est donné en Figure 6.1. Il a deux composantes connexes, colorées rouge et bleu.

Le résultat suivant a été déjà démontré pour les ensembles Sturmien (voir [1, Lemma 6.3.3]).

**Proposition 6.2.** Soient  $F$  un ensemble acyclique et  $X \subseteq F$  un code bifixé. Soit  $G$  le graphe d'incidence de  $X$ .

Pour tout chemin  $(v_1, u_1, \dots, u_n, v_{n+1})$  dans  $G$ , avec  $u_1, \dots, u_n \in P'$  et  $v_1, \dots, v_{n+1} \in S'$ , le plus long préfixe commune de  $v_1$  et  $v_{n+1}$  est un préfixe propre de tous les  $v_i$  pour  $1 \leq i \leq n + 1$ .

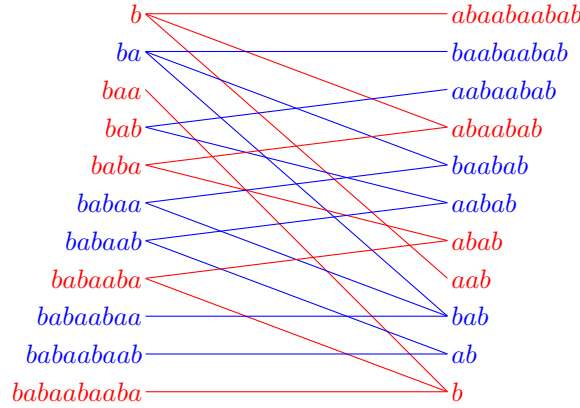


FIGURE 6.1 – Le graphe d'incidence de  $X$ .

Symétriquement, pour tout chemin  $(u_1, v_1, \dots, v_n, u_{n+1})$  dans  $G$ , avec  $u_1, \dots, u_{n+1} \in P'$  et  $v_1, \dots, v_n \in S'$ , le plus long suffixe commun de  $u_1$  et  $u_{n+1}$  est un suffixe propre de tous les  $u_i$  pour  $1 \leq i \leq n+1$ .

De plus, le graphe  $G$  est acyclique et sa trace sur  $P$  (resp. la trace sur  $S$ ) est un code suffixe (resp. préfixe).

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n \geq 1$ .

La propriété est vraie pour  $n = 1$ . En effet, si  $u_1v_1, u_1v_2 \in X$  et le plus long préfixe de  $v_1, v_2$  était  $v_1$ , alors  $u_1v_1$  serait un préfixe de  $u_1v_2$ , ce qui contredirait l'hypothèse que  $X$  est un code préfixe. Le même si  $v_2$  était un préfixe de  $v_1$ . Symétriquement on le démontre pour le cas  $u_1v_1, u_2v_1 \in X$ , car  $X$  est suffixe.

Soit  $n \geq 2$  et supposons que la propriété est vraie pour tout chemin de longueur au plus  $2n-2$ . On considère un chemin de la forme  $(v_1, u_1, \dots, u_n, v_{n+1})$  dans  $G$  avec  $u_1, \dots, u_n \in P'$  et  $v_1, \dots, v_{n+1} \in S'$ .

Soit  $p$  le plus long préfixe commun de  $v_1$  et  $v_{n+1}$ . Tous les deux éléments de l'ensemble  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  sont connectés par un chemin de longueur au plus  $2n-2$  en utilisant des éléments de  $\{v_2, \dots, v_n\}$ . Ainsi, par l'hypothèse de récurrence,  $U$  est-il un code suffixe. De même, tous les deux éléments de l'ensemble  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  sont connectés par un chemin de longueur  $2n-2$  en utilisant des éléments de  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ . Ainsi, par l'hypothèse de récurrence,  $V$  est-il un code préfixe.

On a que  $v_1 \neq p$ . En effet, si c'était pas le cas, comme  $u_n p$  est un préfixe de  $u_n v_{n+1}$  et donc un élément de  $F$ , le graphe  $G_{U,V}(\varepsilon)$  aurait un cycle, mais cela est une contradiction car, par la Proposition 3.7, l'ensemble  $F$  est fortement acyclique. De façon symilaire, on a que  $v_{n+1} \neq p$ .

Soient  $W = p^{-1}V = \{w \mid pw \in V\}$  et  $V' = (V \setminus pW) \cup p$ . L'ensemble  $V'$  est un code préfixe. Le graphe  $G_{U,V'}(\varepsilon)$  contient le cycle  $(p, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n, p)$ . Comme  $F$  est fortement acyclique ce cycle est trivial, ce qui implique que  $V'$  a un seul élément. Ainsi,  $p$  est-il un préfixe propre de  $v_i$  pour tout  $2 \leq i \leq n$  et donc pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Le cas d'un chemin de la forme  $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_{n+1})$  est symétrique.  $\square$

Soient  $X$  un code bifixé et  $P$  l'ensemble des ses préfixes propres. On définit l'équivalence  $\theta_X$  sur  $P$  comme la fermeture transitive de la relation formée par les paires  $p, q \in P$  telles que  $ps, qs \in X$  pour quelque  $s \in A^*$ . Une telle paire

correspond, lorsque  $p, q \in P' = P \setminus 1$ , à un chemin  $(p, s, q)$  dans le graphe d'incidence de  $X$ . Ainsi, une classe de  $\theta_X$  est-elle soit réduit au mot vide soit est la trace d'une composante connexe sur  $P'$ .

La propriété suivante, démontre dans [1, Proposition 6.3.5], relie l'équivalence  $\theta_X$  avec les classes latérales de  $H = \langle X \rangle$ .

**Proposition 6.3.** *Soient  $X$  un code bifixé,  $P$  l'ensemble de ses préfixes propres et  $H = \langle X \rangle$  le sous-groupe engendré par  $X$ . Pour tout  $p, q \in P$ ,  $p \equiv q \pmod{\theta_X}$  implique  $Hp = Hq$ .*

Soit  $A = (P, 1, 1)$  l'automate literal de  $X^*$ . On montre que l'équivalence  $\theta_X$  est compatible avec les transitions de l'automate  $A$ . Le résultat suivant a été déjà démontré pour le cas d'un ensemble Sturmien (voir [1, Lemma 6.6.3 et Lemma 6.4.2]).

**Proposition 6.4.** *Soient  $F$  un ensemble acyclique,  $X \subseteq F$  un code bifixé fini et  $P$  l'ensemble des préfixes propres de  $X$ . Soient  $p, q \in P$  et  $a \in A$  tels que  $pa, qa \in P \cup X$ . Alors dans l'automate literal de  $X^*$  on a*

$$p \equiv q \pmod{\theta_X} \iff p \cdot a \equiv q \cdot a \pmod{\theta_X}.$$

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Supposons d'abord que  $p \equiv q \pmod{\theta_X}$ . Soit  $(u_0, v_1, u_1, \dots, v_n, u_n)$  un chemin dans le graphe d'incidence  $G$  de  $X$  avec  $u_0 = p$  et  $u_n = q$ . Les mots correspondants dans  $X$  sont  $u_0v_1, u_1v_1, u_1v_2, \dots, u_nv_n$ . On peut supposer que les mots  $u_i$  sont deux à deux distincts et que les mots  $v_i$  sont deux à deux distincts. De plus, comme  $pa, qa \in P \cup X$ , ils existent deux mots  $v, w$  tels que  $pav, qav \in X$ . On pose  $v_0 = av$  et  $v_{n+1} = aw$ . D'après la Proposition 6.2,  $a$  est un préfixe propre des tous  $v_i$  avec  $0 \leq i \leq n+1$ . On a deux cas.

- Si  $pa, qa \in P$ , alors  $(u_0a, v'_1, u_1a, \dots, v_n0, u_na)$  est un chemin de  $pa$  à  $qa$  dans  $G$ , où  $v_i = av'_i$  pour tout  $i$ . Ainsi, a-t-on  $pa \equiv qa \pmod{\theta_X}$ .
- Si  $pa \in X$ , alors  $v_0 = a$ . D'après la Proposition 6.2, l'ensemble  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+1}\}$  est un code préfixe. Ainsi, a-t-on  $w = \varepsilon$ , d'où  $qa \in X$ . Cela implique que  $p \cdot a = q \cdot a$ .

( $\Leftarrow$ ) Inversement, supposons  $p \cdot a \equiv q \cdot a \pmod{\theta_X}$ . On a deux cas possibles.

- Si  $pa, qa \in P$ , il existe un chemin  $(u_0, v_1, \dots, v_n, u_n)$  dans  $G$  avec  $u_0 = pa$  et  $u_n = qa$ . D'après la Proposition 6.2, l'ensemble  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  est un code préfixe. D'après la Proposition 6.2,  $a$  est un suffixe propre des tous  $u_i$  avec  $0 \leq i \leq n$ .  
Donc  $(p, av_1, u'_1, \dots, av_n, q)$  est un chemin de  $p$  à  $q$  dans  $G$ , où  $u_i = u'_i a$  pour tout  $i$ . Ainsi, a-t-on  $pa \equiv qa \pmod{\theta_X}$ .
- Si  $pa, qa \in X$  alors  $(p, a, q)$  est un chemin dans  $G$  et donc  $p \equiv q \pmod{\theta_X}$ .  $\square$

## 6.2 Automate des classes latérales

Soient  $F$  un ensemble acyclique et  $X \subseteq F$  un code bifixé fini. On introduit un nouvel automate appelé l'*automate des classes latérales* de  $X$ . Soit  $R$  l'ensemble des classes de  $\theta_X$ , avec la classe 1 dénoté 1. L'automate des classes latérales de  $X$  est l'automate  $\mathcal{B}_X = (R, 1, 1)$  avec ensemble d'états  $R$  et transitions induites par les transitions de l'automate literal  $\mathcal{A} = (P, 1, 1)$  de  $X^*$ . Formellement, pour

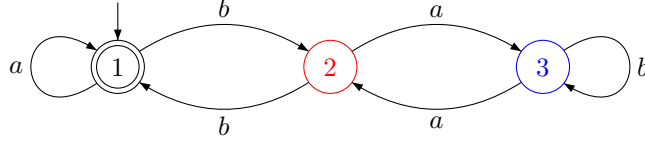


FIGURE 6.2 – L'automate  $\mathcal{B}_X$ .

$r, s \in R$  et  $a \in A$ , on a  $r \cdot a = s$  dans  $\mathcal{B}_X$  s'ils existent  $p$  dans la classe  $r$  et  $q$  dans la classe  $s$  tels que  $p \cdot a = q$  dans  $\mathcal{A}$ .

La définition est cohérente car, d'après la Proposition 6.4, si  $p \cdot a$  et  $p' \cdot a$  sont non vides et  $p, p'$  sont dans la même classe  $r$  alors  $p \cdot a$  et  $p' \cdot a$  sont dans la même classe. Comme la classe  $p \cdot a$  est uniquement défini, l'automate  $\mathcal{B}_X$  est déterministe.

On note que s'il existe un chemin dans  $\mathcal{A}$  de  $p$  à  $p'$  étiqueté  $w$  alors il existe un chemin dans  $\mathcal{B}_X$  étiqueté  $w$  de la classe  $r$  de  $p$  à la classe  $r'$  de  $p'$ .

**Exemple 6.5.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 1.6) et  $X = \{a, baab, babaabab, babaabaabab\}$  un code bifixe  $F$ -maximal de  $F$ -degré 3 (voir Exemples 4.32 et 6.1). L'automate  $\mathcal{B}_X$ , représenté dans la Figure 6.2 a trois états : l'état 1 correspondant à la classe 1, l'état 2 correspondant à la classe contenant  $b$  (la composante rouge dans la Figure 6.1) et l'état 3 correspondant à la classe contenant  $ba$  (la composante bleu dans la Figure 6.1).

Le code bifixe qui engendre le sous-monoïde reconnu par cet automate est  $Z = a \cup b(ab^*a)^*b$ . On note que le mot  $bb$  est dans  $Z^*$  mais pas dans  $X^*$ .

Le résultat suivant montre que l'automate des classes latérales de  $X$  est l'automate de Stallings du sous-groupe engendré par  $X$ .

**Proposition 6.6.** Soient  $F$  un ensemble acyclique et  $X \subseteq F$  un code bifixe fini. L'ensemble des classes latérales  $\mathcal{B}_X$  est réversible et décrit le sous-groupe engendré par  $X$ . De plus,  $X \subseteq Z$ , où  $Z$  est le code bifixe qui engendre le sous-monoïde reconnu par  $\mathcal{B}_X$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{A} = (P, 1, 1)$  l'automate literal de  $X^*$  et  $\mathcal{B}_X = (R, 1, 1)$ . D'après la Proposition 6.4, l'automate  $\mathcal{B}_X$  est réversible.

Soient  $Z$  le code bifixe qui engendre le sous-monoïde reconnu par  $\mathcal{B}_X$  et  $x \in X$ . Comme il existe un chemin de 1 à 1 étiqueté  $x$  dans  $\mathcal{A}$ , il en existe un aussi dans  $\mathcal{B}_X$ . Comme la classe 1 mod  $\theta_X$  est réduit à 1, ce chemin dans  $\mathcal{B}_X$  ne passe pas par 1 sauf à ses extrémités. Donc  $x \in Z$ , ce qui montre que  $X \subseteq Z$ .

Enfin, on montre que l'automate des classes latérales décrit le groupe  $H = \langle X \rangle$ . D'après la Proposition 1.17, le sous-groupe décrit par  $\mathcal{B}_X$  est  $K = \langle Z \rangle$ . Comme  $X \subseteq Z$ , on a  $H \subseteq K$ . Pour montrer l'inclusion inverse, on raisonne par récurrence sur la longueur de  $w \in A^*$  tel que s'il existe un chemin dans  $\mathcal{B}_X$  étiqueté  $w$  de la classe de  $p$  à la classe de  $q$ , avec  $p, q \in P$  alors  $Hpw = Hq$ . Cela est vrai par  $w = 1$  d'après la Proposition 6.3. Supposons que la propriété soit vraie pour  $w$  et considérons  $wa$  avec  $a \in A$ . On considère les états  $p, q, r \in P$  tels que il existe un chemin dans  $\mathcal{B}_X$  de la classe de  $p$  à la classe de  $q$  étiqueté  $w$  et un arête dans  $\mathcal{B}_X$  de la classe de  $q$  à la classe de  $r$  étiqueté  $a$ . Par l'hypothèse de récurrence, on a  $Hpw = Hq$ . D'après la définition de  $\mathcal{B}_X$ , il existe un  $s \equiv q \pmod{\theta_X}$  tel que  $s \cdot a \equiv r \pmod{\theta_X}$ . Si  $sa \in P$ , alors  $s \cdot a = sa$  et, d'après la Proposition 6.3, on a  $Hs = Hq$  et  $Hsq = Hr$ , d'où  $Hpwa = Hqa = Hsq = Hr$ .

Sinon, si  $sa \in X$ , on a  $s \cdot a = r = q$ , car la classe de 1 est un singleton. Dans ce cas on a  $Hsq = H = Hr$ . Cela montre que pour  $z \in Z$  on a  $H z = H$ , c'est-à-dire que  $x \in H$ . Ainsi, a-t-on  $Z \subseteq H$ , ce qui montre l'égalité.  $\square$

### 6.3 Codes bifixes dans des ensembles acycliques

On utilise les Propositions 6.2 et 6.6 pour montrer la caractérisation suivante des ensembles acycliques.

**Théorème 6.7.** *Un ensemble  $F$  est acyclique si et seulement si tout code bifixé fini  $X \subseteq F$  est une base du sous-groupe  $\langle X \rangle$  du groupe libre. De plus, dans ce cas, pour tout code bifixé fini  $X$  on a  $X^* \cap F = \langle X \rangle \cap F$ .*

*Démonstration.* On prouve d'abord la première assertion.

( $\Leftarrow$ ) Supposons par l'absurde qu'il existe un  $w \in F$  tel que  $G(w)$  contient un cycle  $(a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)$  avec  $p \geq 2$ ,  $a_i \in L(w)$  et  $b_i \in R(w)$  pour tout  $1 \leq i \leq p$ . Alors,  $a_1 w b_1, a_2 w b_1, \dots, a_p w b_p, a_1 w b_p \in X$ . Mais

$$a_1 w b_1 (a_2 w b_1)^{-1} a_2 w b_2 \cdots a_p w b_p (a_1 w b_p)^{-1} = 1$$

ce qui contredit le fait que  $X$  est une base.

( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $F$  est acyclique. Soient  $Y = X \cup X^{-1}$  et  $y_1, \dots, y_n \in Y$ . On montrera que, si  $y_i y_{i+1} \neq 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a  $y_1 \cdots y_n \neq 1$ . On peut supposer  $n \geq 3$ .

On dit qu'une séquence  $(u_i, v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'éléments de  $\langle A \rangle$  est *admissible* par rapport à  $y_1, \dots, y_n$  si les conditions suivantes sont satisfaites (voire la Figure 6.3).

- (i)  $y_i = u_i v_i w_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ ;
- (ii)  $u_1 = w_n = 1$ ;
- (iii)  $w_i u_{i+1} = 1$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ ;
- (iv) pour  $1 \leq i < j \leq n$ , si  $v_i, v_j \neq 1$  et  $v_k = 1$  pour tout  $i+1 \leq k \leq j-1$ , alors  $v_i v_j$  est réduit autant que mots.

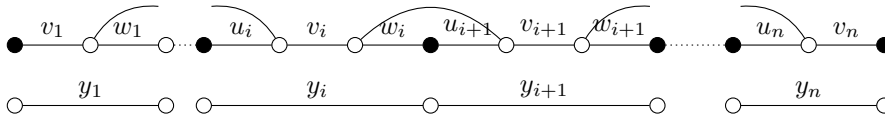


FIGURE 6.3 – Le mot  $y_1 \cdots y_n$ .

On montre par récurrence sur  $n$  que pour tout  $y_1, \dots, y_n$  tels que  $y_1 y_{i+1} \neq 1$  avec  $1 \leq i \leq n-1$ , il existe une séquence admissible par rapport à  $y_1, \dots, y_n$ . La propriété est vraie pour  $n = 3$ . En effet, si  $y_1, y_2, y_3 \in X$ , alors on prend tous les  $u_i, w_i$  vides. Si  $y_1, y_2 \in X$  et  $y_3 \in X^{-1}$ , alors on prend  $w_1 = u_2 = 1$  et  $|w_2| = |u_3|$  maximaux tels que  $w_2 u_3 = 1$ . Comme  $X$  est bifixé, on a  $v_2, v_3 \neq 1$  et donc  $v_2 v_3$  réduit. Les autres cas sont symétriques. Supposons que la propriété soit vraie pour  $n$ . Parmi tous les possibles séquences admissibles par rapport à  $y_1, \dots, y_n$ , on choisit celle telle que  $|v_n|$  est maximale. Posons  $v_n = v'_n w'_n$  et  $y_{n+1} = u_{n+1} v_{n+1}$  avec  $|w'_n| = |u_{n+1}|$  maximaux tels que  $w'_n u_{n+1} = 1$ .

Si  $v'_n \neq 1$ , la séquence  $(u_i, v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (u_n, v'_n, w'_n), (u_{n+1}, v_{n+1}, 1)$  est admissible pour  $y_1, \dots, y_{n+1}$ .

Sinon, soit  $i$  avec  $1 \leq i \leq n-1$  le plus grand entier tel que  $v_i \neq 1$ .

Supposons que  $y_i \in X$  (l'autre cas est symétrique). Si  $y_{n+1} \in X$  (et donc  $n-1$  est impaire), alors  $v_i v_{n+1}$  est réduit et la séquence  $(u_i, v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (u_n, 1, w'_n), (u_{n+1}, v_{n+1}, 1)$  est admissible.

Sinon, soit  $s$  le plus long suffixe de  $u_i v_i$  et  $v_{n+1}^{-1}$ . Il existe un chemin dans le graphe d'incidence  $G(X)$  de  $u_i v_i$  à  $v_{n+1}^{-1}$  (voir Figure 6.4)

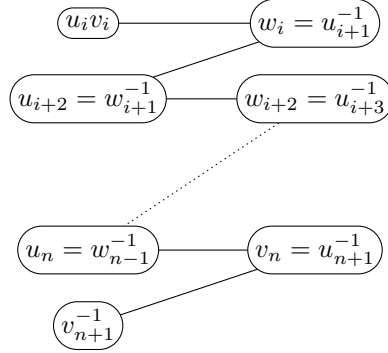


FIGURE 6.4 – Le graphe  $G(X)$ .

D'après la Proposition 6.2,  $s$  est un suffixe propre de  $u_i v_i, w_{i+1}^{-1}, \dots, w_{n-1}^{-1}, v_{n+1}^{-1}$ .

Le mot  $v_i$  ne peut pas être un suffixe de  $s$  car, sinon, on pourrait changer les  $n-i+2$  derniers termes de la séquence avec  $(u_1, 1, v_1 w_i), (u_{i+1} v_i^{-1}, 1, v_i w_{i+1}), \dots, (u_n v_i^{-1}, v_i v_n, 1)$ , ce qui impliquerait qu'il existe une séquence admissible avec un  $v_n$  plus long. Ainsi,  $s$  est-il un suffixe de  $v_i$ . Donc, on peut changer les derniers termes de la séquence avec

$$(u_i, v_i s^{-1}, s w_i), (u_{i+1} s^{-1}, 1, s w_{i+1}), (u_n s^{-1}, 1, s v_n), (u_{n+1} s^{-1}, s v_{n+1}, 1)$$

(voir Figure 6.5). La nouvelle séquence est admissible. En effet, comme  $s$  est le plus long suffixe commun entre  $v_i$  et  $v_{n+1}^{-1}$ , ils n'existent pas de mots non vides  $p, q \in A^*$  tels que  $v_i = ps$  et  $v_{n+1}^{-1} = qs$  avec  $pq^{-1}$  réduit autant que mots.

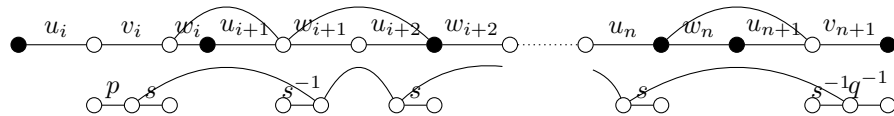


FIGURE 6.5 – Le mot  $y_1 \dots y_n$ .

Enfin, on montre que s'il existe une séquence admissible par rapport à  $y_1, \dots, y_n$ , alors  $y_1 \dots y_n \neq 1$ . En effet, soit  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  une séquence d'indices  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  tel que  $v_i \neq 1$ . D'après la condition (iii) on a  $y_1 y_2 \dots y_n = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$ . D'après la condition (iv) tout produit de facteurs consécutifs de  $y_1 \dots y_n$  est réduit autant que mots, d'où la conclusion.

On prouve maintenant la seconde assertion, c'est-à-dire que  $X^* \cap F = \langle X \rangle \cap F$ . Comme  $X^* \cap F \subseteq \langle X \rangle \cap F$ , on a besoin de démontrer seulement l'inclusion inverse.



Soit  $Z$  le code bifix qui engendre le sous-monoïde reconnu par l'automate des classes latérales  $\mathcal{B}_X$  associé à  $X$ . Soit  $Y = Z \cap F$ . Par la première assertion,  $Y$  est une base de  $\langle Y \rangle$ .

D'après la Proposition 6.6, on a  $X \subseteq Z$ , d'où  $X \subseteq Y$ .

Comme tout automate réversible est minimal et comme l'automate  $\mathcal{B}_X$  est réversible par le Lemme 6.6, il est égal à l'automate minimal de  $Z^*$ . D'après la Proposition 1.14, on a  $\langle Z \rangle \cap A^* = Z^*$ . Cela montre que

$$\langle X \rangle \cap F \subseteq \langle Z \rangle \cap F = \langle Z \rangle \cap A^* \cap F^* = Z^* \cap F = Y^* \cap F.$$

La première inclusion est vraie car  $X \subseteq Z$  implique  $\langle X \rangle \subseteq \langle Z \rangle$ , tandis que la dernière égalité est vraie car si  $z_1 \cdots z_n \in F$ , avec  $z_1, \dots, z_n \in Z$ , alors tout  $z_i$  est dans  $F$ , donc  $Z \cap F = Y$  et  $\langle X \rangle \cap F \subseteq Y^*$ . Soit  $x \in \langle X \rangle \cap F$ . Ils existent  $x_i \in X \cup X^{-1}$  avec  $1 \leq i \leq n$  tels que  $x = x_1 \cdots x_n$ . Comme  $\langle X \rangle \cap F \subseteq Y^*$ , on a aussi  $x = y_1 \cdots y_m$  pour certains  $y_i \in Y$  avec  $1 \leq i \leq m$ .

Comme  $X \subseteq Y$  et comme  $Y$  est une base, on a  $n = m$  et  $x_i = y_i$  pour tout  $i$ . Ainsi, a-t-on  $\langle X \rangle \cap F \subseteq X^*$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On utilise le théorème précédent pour montrer que dans un ensemble acyclique tout code bifix satisfait une condition plus forte.

**Corollaire 6.8.** *Soient  $F$  un ensemble acyclique et  $X \subseteq F$  un code bifix fini. Pour tout  $u, v \in F$  on a*

- (i) *si  $u, uv \in \langle X \rangle \cap F$ , alors  $v \in X^*$ ;*
- (ii) *si  $v, uv \in \langle X \rangle \cap F$ , alors  $u \in X^*$ .*

*Démonstration.* On montre d'abord la propriété (i). Supposons que  $u, uv \in \langle X \rangle \cap F$ . Comme  $v = u^{-1}(uv)$ , on a  $v \in \langle X \rangle$ . D'après le Théorème 6.7, comme  $v \in \langle X \rangle \cap F$ , on a  $v \in X^*$ . La démonstration de la propriété (ii) est symétrique.  $\square$

Dans l'exemple suivant on montre que le Théorème 6.7 si  $X$  est un code préfixe mais pas bifix.

**Exemple 6.9.** Soient  $F$  l'ensemble de Fibonacci (voir Exemple 1.6) et  $X \subseteq F$  le code préfixe  $X = \{aa, ab, b\}$ . La lettre  $a = (ab)b^{-1}$  est dans  $\langle X \rangle$ , ce qui montre que  $X$  engendre le groupe libre  $A^\circ$ . Ainsi,  $X$  n'est-il pas une base et, de plus,  $X^* \cap F$  est inclu strictement dans  $\langle X \rangle \cap F$ .

## 6.4 Le Théorème de la Base

On dit qu'un ensemble  $F$  a la *propriété de la base d'indice fini* si on qu'un code bifix fini  $X \subseteq F$  est  $F$ -maximal bifix de  $F$ -degré  $d$  si et seulement si  $X$  est une base d'un sous-groupe d'indice  $d$  du groupe libre  $A^\circ$ .

On dit qu'un ensemble uniformément récurrent  $F$  sur un alphabet  $A$  est *normal* si

- (i)  $F$  satisfait la condition de l'arbre;
- (ii) pour tout  $w \in F$ , l'ensemble des mots de premier retour  $R_F(w)$  engendre le groupe libre  $A^\circ$ .

Avant de démontrer le résultat principal de la section on donne des résultats préliminaires.

Pour les lemmes suivants on pose  $F$  un ensemble normal,  $X$  un code bifixé  $F$ -maximal de  $F$ -degré  $d$  et  $H = \langle X \rangle$  le sous-groupe engendré par  $X$ . Soient, aussi,  $P$  l'ensemble des préfixes propres de  $X$ ,  $u \in F \setminus I(X)$  un mot qui n'est pas un facteur interne de  $X$  et  $Q$  l'ensemble des suffixes de  $u$  qui sont en  $P$ .

**Lemme 6.10.** *Les classes latérales  $Hq$ , pour  $q \in Q$ , sont disjointes deux à deux.*

*Démonstration.* On sait que  $Hp \cap Hq \neq \emptyset$  implique  $Hp = Hq$ . De plus, tous  $p, q \in Q$  sont comparable par suffixes. Supposons que  $q$  soit plus longue que  $p$ . Ainsi, existe-t-il un mot  $t \in P$  tel que  $q = tp$ . Donc,  $Hp = Hq$  implique  $Ht = H$ , d'où  $t \in H \cap F$ . Comme  $F$  est acyclique, d'après le Théorème 6.7 on a que  $t \in X^*$  et donc  $t = \varepsilon$ . Donc  $p = q$ .  $\square$

Soient  $F, X, d, H, P, u$  et  $Q$  comme ci-dessus. On pose

$$V = \{v \in A^\circ \mid Qv \subseteq HQ\}.$$

**Lemme 6.11.** *Pour tout  $v \in V$ , la fonction de  $Q$  dans lui-même définie par  $p \mapsto q$  avec  $pv \in Hq$  est une permutation de  $Q$ .*

*De plus, l'ensemble  $V$  est un sous-groupe de  $A^\circ$*

*Démonstration.* Soient  $p, q \in Q$ . Il existe un  $r \in Q$  tel que  $pv, qv \in Hr$ . Donc  $rv^{-1}$  est dans  $Hp \cap Hq$  et, d'après le Lemme 6.10, on a  $p = q$ .

On a, clairement,  $1 \in V$ . Soit  $v \in V$ . Pour tout  $q \in Q$ , comme  $v$  définit une permutation sur  $Q$ , il existe un  $p \in Q$  tel que  $pv \in Hq$ . Donc  $qv^{-1} \in Hp$ . Cela montre que  $v^{-1} \in V$ .

Enfin, si  $v, w \in V$ , on a  $Qvw \subseteq HQw \subseteq HQ$ , d'où  $vw \in V$ .  $\square$

**Lemme 6.12.** *L'ensemble de mots de premier retour  $R_F(u)$  est contenu dans  $V$ .*

*Démonstration.* Soient  $q \in Q$  et  $y \in R_F(u)$ . Comme  $q$  est un suffixe de  $u$ ,  $qy$  est un suffixe de  $uy$ . De plus, comme, par définition de  $R_F(u)$ ,  $uy \in F$ , on a aussi  $qyinF$ .

Comme  $X$  est un code bifixé  $F$ -maximal, il est aussi préfixe  $F$ -maximal et donc  $F$ -complet à droite (voir le Chapitre 1). Cela implique que  $qy$  est un préfixe d'un mot dans  $X^*$  et donc qu'il existe un mot  $r \in P$  tel que  $qy \in X^*r$ . On peut vérifier que  $r$  est un suffixe de  $u$ . En effet, comme  $y \in R_F(u)$ , il existe un mot  $y'$  tel que  $uy = y'u$ . Par conséquent,  $r$  est un suffixe de  $y'u$ . De plus, on a  $|r| \leq |u|$  car, sinon,  $u$  serait dans l'ensemble  $I(X)$  des facteurs internes de  $X$ , ce qui contredirait les hypothèses. Donc  $r$  est un suffixe de  $u$ . Ainsi, a-t-on  $r \in Q$  (voir aussi Figure 6.6).

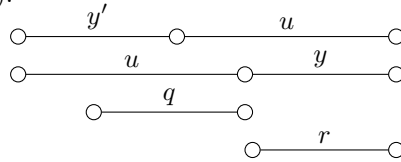


FIGURE 6.6 – Un mot  $y \in R_F(u)$

Comme  $X^* \subseteq H$  et  $r \in Q$ , on a  $qy \in HQ$ , d'où  $y \in V$ .  $\square$

**Proposition 6.13.**  *$V$  est le groupe libre sur  $A$ .*

*Démonstration.* Comme  $F$  est normal, d'après la condition (ii), le groupe engendré par  $R_F(u)$  est le groupe libre  $A^\circ$ .

Comme  $R_F(u) \subseteq V$  par le Lemme 6.12, et comme  $V$  est un sous-groupe de  $A^\circ$  par le Lemme 6.11, on  $V = A^\circ$ .  $\square$

On rappelle que si  $H$  est un sous-groupe de rang  $n$ , d'indice  $d$  d'un groupe libre de rang  $k$ , alors on a la formule suivante, appelée *Formule de Schreier*,

$$n = d(k - 1) + 1.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

**Théorème 6.14.** *Tout ensemble normal  $F$  a la propriété de la base d'indice fini.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $X$  soit un code bifixé  $F$ -maximale de  $F$ -degré  $d$ . Soient  $P$  l'ensemble des préfixes propres de  $X$ ,  $H = \langle X \rangle$  le sous-groupe engendré par  $X$  et  $u \in F \setminus I(X)$  ou, de façon équivalente, tel que  $\delta_X(u) = d$ . Soit  $Q$  l'ensemble des suffixes de  $u$  qui sont en  $P$ . On observe que  $\text{Card}(Q) = d$ .

Soit  $V = \{v \in A^\circ \mid Qv \subseteq HQ\}$ .

D'après la Proposition 6.13, on sait que  $V = A^\circ$ . Donc  $Qw \subseteq QQ$  pour tout  $w \in A^\circ$ . Comme  $1 \in Q$  on a, en particulier,  $w \in HQ$ . Ainsi, a-t-on  $A^\circ = HQ$ . Comme  $\text{Card}(Q) = d$  et comme les classes latérales  $Hq$ , pour  $q \in Q$ , sont disjointes deux à deux,  $H$  est un sous-groupe d'indice  $d$  du groupe libre. D'après le Théorème 2.8 et la Formule de Schreier,  $X$  est une base de  $H$ .

Inversement, supposons que le code bifixé  $X \subseteq F$  soit une base d'un groupe  $H = \langle X \rangle$  et que  $H$  ait indice  $d$ .

Comme  $X$  est une base, d'après la Formule de Schreier, on a  $\text{Card}(X) = (k - 1)d + 1$ , où  $k = \text{Card}(A)$ . Le case  $k = 1$  est simple, donc supposons que  $k \geq 2$ . Comme  $F$  est uniformément récurrent, il existe un code bifixé  $Y$  finite tel que  $X \subseteq Y$  (voir [1, Théorème 4.4.3]). Soit  $e$  le  $F$ -degré de  $Y$ . D'après la première partie de la démonstration, on sait que  $Y$  est une base d'un sous-groupe  $K$  d'indice  $e$  du groupe libre  $A^\circ$ . En particulier,  $Y$  a  $(k - 1)e + 1$  éléments. De l'autre côté, comme  $H$  est inclus dans  $K$ , on a que  $d$  est un multiple de  $e$  et, donc, que  $e \leq d$ . On conclut que  $d = e$  et donc que  $X = Y$ .  $\square$

On remarque que dans le Théorème 6.14 on a utilisé une notion plus faible que la normalité. En effet, on a utilisé seulement le fait que  $F$  est uniformément récurrent et que

- (i)  $F$  est acyclique,
- (ii) pour tout  $w \in F$ , l'ensemble des mots de premier retour  $R_F(u)$  engendre le groupe libre  $A^\circ$ .

En fait, tout ensemble satisfaisant à ces conditions, satisfait aussi la condition de l'arbre. En effet, comme il a la propriété de la base d'indice fini, sa complexité est  $kn + 1$  avec  $k = \text{Card}(A) - 1$  et donc  $F$  est neutre. Cela implique que  $F$  est connexe.

On ne sait pas s'il existe un ensemble uniformément récurrent satisfaisant la condition de l'arbre et la condition (ii) mais qui n'est pas normal.

Le Théorème 6.14 implique d'autres résultats importants. Le premier est le résultat principal de [1].

**Corollaire 6.15.** *Un ensemble Sturmien a la propriété de la base d'indice fini.*

*Démonstration.* Tout ensemble Sturmien est uniformément récurrent. De plus, il satisfait la condition (i) car tous mots sont ordinaires et satisfait la condition (ii) par le [1, Théorème 6.5.2].  $\square$

Le deuxième corollaire concerne les échange d'intervalles.

**Corollaire 6.16.** *Un ensemble d'échange d'intervalles régulier a la propriété de la base d'indice fini.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 4.4, un ensemble d'échange d'intervalles régulier est minimal et donc, d'après la Proposition 4.10, uniformément récurrent. Il satisfait la condition de l'arbre par la Proposition 4.15 et la condition (ii) par le Théorème 5.20.  $\square$

Les exemples suivants montrent que le Corollaire 6.16 n'est pas vrai si certaines des hypothèses ne sont pas satisfaites.

Le premier exemple est un ensemble qui est uniformément récurrent mais pas neutre.

**Exemple 6.17.** Soit  $F$  l'ensemble de Chacon (voir Exemple 2.5).  $F$  n'est pas neutre et il ne satisfait pas la condition de l'arbre. L'ensemble  $F \cap A^2 = \{aa, ab, bc, ca, cb\}$  est un code bifixé  $F$ -maximal de  $F$ -degré 2. Il n'est pas une base car  $cb = ca(aa)^{-1}ab$ . Donc,  $F$  n'a pas la propriété de la base d'indice fini.

Dans l'exemple suivant l'ensemble est neutre mais il n'est pas uniformément récurrent et il ne satisfait pas la condition de l'arbre.

**Exemple 6.18.** Soit  $F$  l'ensemble défini dans l'Exemple 3.3.  $F$  n'est pas uniformément récurrent et il ne satisfait pas la condition de l'arbre. L'ensemble  $F \cap A^2$  est le même que dans l'Exemple 6.17. Donc  $F$  n'a pas la propriété de la base d'indice fini.

Dans le dernier exemple l'ensemble est uniformément récurrent qui est neutre mais ne satisfait pas la condition de l'arbre.

**Exemple 6.19.** Soit  $G$  l'ensemble sur l'alphabet  $B = \{1, 2, 3\}$  défini dans l'Exemple 3.4.  $G$  est neutre mais ne satisfait pas la condition de l'arbre. Donc la condition (i) du Théorème 6.14 n'est pas satisfaite.

On a  $R_G(2) = \{2, 312, 31312\}$ . Le groupe engendré par  $R_G(2)$  a la base  $\{31, 2\}$  qui n'est pas une base du groupe libre  $B^\circ$ . Donc la condition (ii) du Théorème 6.14 n'est pas satisfaite.

Soit  $X = G \cap B^2 = \{12, 13, 22, 23, 31\}$ . L'ensemble  $X$  n'est pas une base car  $13 = 12(22)^{-1}23$ . Donc  $F$  n'a pas la propriété de la base d'indice fini.

On ne dispose pas d'exemple d'ensemble uniformément récurrent qui satisfait la condition de l'arbre mais qui n'a pas la propriété de la base d'indice fini.

# Bibliographie

- [1] Jean Berstel, Clelia De Felice, Dominique Perrin, Christophe Reutenauer, and Giuseppina Rindone. Bifix codes and sturmian words. 2012.
- [2] Jean Berstel, Dominique Perrin, and Christophe Reutenauer. *Codes and Automata*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] Valérie Berthé, Clelia De Felice, Francesco Dolce, Dominique Perrin, Christophe Reutenauer, and Giuseppina Rindone. Bifix codes and the finite index basis property. 2013.
- [4] Valérie Berthé and Michel Rigo. *Combinatorics, automata and number theory*, volume 135 of *Encyclopedia Math. Appl.* Cambridge University Press, 2010.
- [5] Julien Casseigne. Personal communication, 2013.
- [6] Sébastien Ferenczi and Luca Q. Zamboni. Languages of  $k$ -interval exchange transformations. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(4) :705–714, 2008.
- [7] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [8] Yann Jullian. An algorithm to identify automorphisms which arise from self-induced interval exchange transformations. 2012.
- [9] Jacques Justin and Laurent Vuillon. Return words in sturmian and episturmian words. *Theoret. Inform. Appl.*, 34(5) :343–356, 2000.
- [10] Micheal Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 141 :25–31, 1975.
- [11] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*. Cambridge University Press, 2002.
- [12] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. Reprint of the 1977 edition.
- [13] Gérard Rauzy. Échanges d’intervalles et transformations induites. *Acta Arith.*, 34(4) :315–328, 1979.
- [14] Christophe Reutenauer. Une topologie du monoïde libre. *Semigroup Forum*, 18(1) :33–49, 1979.