Vektorový prostor

Předem připomeneme dva pojmy.

Kartézský součin množin A a B je množina uspořádaných dvojic (a, b), kde a ∈A a b ∈B. Značíme ji A×B, tj. A×B=$\{(a, b)$ $|a$ ∈A∧b ∈B$\}$.

Zobrazení f:A→B je taková podmnožina A×B, že pro každý prvek a ∈A existuje právě jeden prvek b ∈B tak, že $(a, b) \in f$. Tento prvek značíme $b = f(a)$. A se nazývá **definiční obor** zobrazení f.

Když $(a, b) \in f$, říkáme, že b je **obraz** a a a je **vzor** b.

Definice: Číselným tělesem nazveme každou podmnožinu $\mathbf{T} \subset \mathbf{C}$, která má alespoň 2 prvky a ve které platí:

1) $\alpha \in \mathbf{T}$, $\beta \in \mathbf{T} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbf{T}$,
2) $\alpha \in \mathbf{T}$, $\beta \in \mathbf{T} \Rightarrow \alpha.\beta \in \mathbf{T}$,
3) $\alpha \in \mathbf{T} \Rightarrow -\alpha \in \mathbf{T}$,
4) $\alpha \in \mathbf{T}$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow 1/\alpha \in \mathbf{T}$.

Poznámky:
1) Pojem **tělesa** se v algebře zavádí mnohem obecněji. Pro nás ovšem tato definice postačí.
2) Vlastnostem uvedeným v definici říkáme uzavřenost vůči sčítání, resp. násobení, resp. opačnému číslu, resp. převrácené hodnotě.
3) V každém tělese je číslo 0, neboť je tam alespoň jedno číslo α, tudíž podle 3) i $-\alpha$ a tudíž podle 1) i číslo $\alpha + (-\alpha) = 0$.
4) Množina celých čísel **Z** netvoří těleso, např. $3 \in \mathbf{Z}$, ale $\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$. Rovněž množina **N** netvoří těleso.
Množiny **R** a **C** tělesa tvoří. Rovněž množina racionálních čísel **Q** tvoří těleso, a to dokonce těleso **nejmenší** v tom smyslu, že je podmnožinou kteréhokoliv jiného tělesa.

V příkladech na cvičeních se budeme setkávat téměř výhradně s tělesy **C** nebo **R**. Je třeba ovšem mít stále na mysli, že pojmy a tvrzení, se kterými se setkáváme na přednášce, jsou téměř vždy formulovány obecně.

Prvky tělesa, tj. čísla, budeme většinou značit řeckými písmeny.

Definice: Nechť jsou dány
(1) číselné těleso **T** (*jeho prvky nazýváme* **čísla**),
(2) neprázdná množina **V** (*její prvky nazýváme* **vektory**),
(3) zobrazení $\oplus$:**V**×**V**→**V** (*tzv.* **sčítání vektorů**),
(4) zobrazení $\odot$:**T**×**V**→**V** (*tzv.* **násobení vektoru číslem**).

Řekneme, že **V** je **vektorový prostor nad tělesem T s operacemi** $\oplus$ **a** $\odot$, právě když platí: (*tzv. axiomy vektorového prostoru*)

1) $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{V} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \oplus \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \oplus \vec{\mathbf{a}}$,
2) $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}, \vec{\mathbf{c}} \in \mathbf{V} \Rightarrow \vec{\mathbf{a}} \oplus (\vec{\mathbf{b}} \oplus \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \oplus \vec{\mathbf{b}}) \oplus \vec{\mathbf{c}}$,

3) existuje vektor $\vec{\mathbf{o}} \in\mathbf{V}$ tak, že pro libovolný vektor $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ platí $\vec{\mathbf{a}} \oplus \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{a}}$. Vektor $\vec{\mathbf{o}}$ s touto vlastností nazýváme **nulový vektor**.
4) Pro libovolný vektor $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ existuje vektor $\vec{\mathbf{b}} \in\mathbf{V}$ takový, že $\vec{\mathbf{a}}\oplus\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$. Tento vektor nazýváme **vektor opačný k vektoru** $\vec{\mathbf{a}}$ a značíme ho $\vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{a}}$. 5) $\alpha \in\mathbf{T}$, $\beta \in\mathbf{T}$, $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V} \Rightarrow \alpha \odot (\beta \odot \vec{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta) \odot \vec{\mathbf{a}}$,
6) pro libovolný vektor $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ platí $1 \odot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$.
7) $\alpha \in\mathbf{T}$, $\beta \in\mathbf{T}$, $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V} \Rightarrow (\alpha + \beta) \odot \vec{\mathbf{a}} = (\alpha \odot \vec{\mathbf{a}}) \oplus (\beta \odot \vec{\mathbf{a}})$.
8) $\alpha \in\mathbf{T}$, $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$, $\vec{\mathbf{b}} \in\mathbf{V} \Rightarrow \alpha \odot (\vec{\mathbf{a}} \oplus \vec{\mathbf{b}}) = (\alpha \odot \vec{\mathbf{a}}) \oplus (\alpha \odot \vec{\mathbf{b}})$.

Poznámky:
1) Znovu zdůrazníme, že vektorový prostor je řádně definován, jsou-li dány čtyři věci:

- množina vektorů $\mathbf{V}$,
- číselné těleso $\mathbf{T}$,
- operace $\oplus, \odot$.

Někdy vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ s operacemi $\oplus, \odot$ značíme podrobněji $(\mathbf{V}, \mathbf{T}, \oplus, \odot)$.
Pojmem **reálný vektorový prostor** někdy nazýváme vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ a podobně **komplexní vektorový prostor** nazveme prostor nad $\mathbf{C}$.
2) Axiom 1) je komutativní zákon, axiom 2) je asociativní zákon a axiomy 7) a 8) jsou zákony distributivní. 3) V definici jsme pečlivě rozlišovali označení $\oplus$ a $+$, resp. $\odot$ a $\cdot$, tj. označení pro vektorové a číselné operace. Protože ze souvislosti bude vždy jasné, o jaký typ operace se jedná, budeme kroužky vynechávat, takže například i opačný vektor k vektoru $\vec{\mathbf{a}}$ značíme $-\vec{\mathbf{a}}$. Znak $\odot$ budeme vynechávat a budeme psát např. $\alpha\vec{\mathbf{a}}$.
4) Zdůrazníme, že z definice zobrazení $\oplus$ a $\odot$ plyne uzavřenost prostoru $\mathbf{V}$ vůči sčítání vektorů a násobení vektoru číslem.
5) Vektory značíme obvykle šipkou, např. $\vec{\mathbf{a}}$. Pokud ovšem bude ze souvislostí zcela zřejmé, co je písmenem $\mathbf{a}$ označeno, můžeme šipku vynechat.

Věta 1: Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom platí
1) ve $\mathbf{V}$ existuje právě jeden nulový vektor $\vec{\mathbf{o}}$,
2) ke každému vektoru z $\mathbf{V}$ existuje právě jeden opačný vektor,
3) pro každé dva vektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in\mathbf{V}$ existuje právě jedno řešení rovnice $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{x}}$ a to $\vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$,
4) pro každé číslo $\alpha \in\mathbf{T}$ je $\alpha\vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}}$ a pro každý vektor $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ je $0\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$,
5) když $\alpha \in\mathbf{T}$, $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ a $\alpha\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{o}}$, pak buď $\alpha = 0$, nebo $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$,
6) je-li $\alpha \in\mathbf{T}$ a $\vec{\mathbf{a}} \in\mathbf{V}$ pak $(-\alpha)\vec{\mathbf{a}} = -(\alpha\vec{\mathbf{a}}) = \alpha(-\vec{\mathbf{a}})$.

Důkaz:
1)(sporem) Z definice víme, že jeden nulový vektor existuje. Předpokládejme, že ve $\mathbf{V}$ existují dva nulové vektory $\vec{\mathbf{o}}_1$ a $\vec{\mathbf{o}}_2$, vzájemně různé.
Z tohoto předpokladu odvodíme spor.
Protože $\vec{\mathbf{o}}_2$ je **nulový** vektor a $\vec{\mathbf{o}}_1$ je jiný vektor téhož prostoru, plyne

z třetího axiomu definice rovnost $\vec{\mathbf{o}}_1+\vec{\mathbf{o}}_2=\vec{\mathbf{o}}_1$.
Uděláme analogickou úvahu pro $\vec{\mathbf{o}}_1$:
Protože $\vec{\mathbf{o}}_1$ je **nulový** vektor a $\vec{\mathbf{o}}_2$ je jiný vektor téhož prostoru, plyne z třetího axiomu definice rovnost $\vec{\mathbf{o}}_2+\vec{\mathbf{o}}_1=\vec{\mathbf{o}}_2$.
Vyšly nám tedy dvě rovnosti:
$\vec{\mathbf{o}}_1= \vec{\mathbf{o}}_1+\vec{\mathbf{o}}_2$ (Z první úvahy),
$\vec{\mathbf{o}}_2= \vec{\mathbf{o}}_2+\vec{\mathbf{o}}_1$ (Z druhé úvahy).
Nyní už si stačí uvědomit, že z prvního axiomu definice plyne, že $\vec{\mathbf{o}}_1= \vec{\mathbf{o}}_2$, což je spor.

2)(sporem) Předpokládejme, že v prostoru $\mathbf{V}$ existuje vektor $\vec{\mathbf{a}}$, ke kterému existují dva různé opačné vektory $\vec{\mathbf{b}}_1$ a $\vec{\mathbf{b}}_2$. Platí tedy dvě rovnosti

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}_1 = \vec{\mathbf{o}} \text{ a } \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{o}}.$$

Z axiomů vektorového prostoru a těchto dvou rovností je zřejmé, že platí následující řada vztahů: (sledujte zleva doprava)

$$\vec{\mathbf{b}}_1 = \vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{b}}_1 + (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}_2) = (\vec{\mathbf{b}}_1 + \vec{\mathbf{a}}) + \vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{b}}_2.$$

Je tedy $\vec{\mathbf{b}}_2 = \vec{\mathbf{b}}_2$, což je spor s předpokladem.

3)(sporem) O tom, že vektor $\vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ rovnici řeší se snadno přesvědčíme dosazením a použitím prvních čtyř axiomů. Předpokládejme, že existuje vektor $\vec{\mathbf{y}} \neq \vec{\mathbf{x}}$, který také splňuje vztah $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{y}}$. Sledujme opět následující posloupnost vztahů:

$$\vec{\mathbf{x}} = -\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{b}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{y}}) = (-\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}.$$

Což je hledaný spor.

4) Podle již dokázaného třetího tvrzení naší věty má rovnice

$$\alpha\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{a}}$$

jediné řešení $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Dosazením se na následujících řádcích přesvědčíme, že rovnici vyhovují i řešení $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{o}}$ a $\vec{\mathbf{x}} = 0\vec{\mathbf{a}}$.

$$\alpha\vec{\mathbf{a}} + 0\vec{\mathbf{a}} = (\alpha + 0)\vec{\mathbf{a}} = \alpha\vec{\mathbf{a}}$$
$$\alpha\vec{\mathbf{a}} + \alpha\vec{\mathbf{o}} = \alpha(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{o}}) = \alpha\vec{\mathbf{a}}$$

Protože víme, že rovnice má řešení jediné, musí se všechny tři vektory rovnat, tj.

$$\vec{\mathbf{o}} = \alpha\vec{\mathbf{o}} = 0\vec{\mathbf{a}}.$$

5)(sporem) Předpokládejme, že $\alpha \neq 0$ a $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a přesto platí rovnost $\alpha\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{o}}$.

Spor plyne z následující řady rovností

$$\vec{\mathbf{a}} = 1 \cdot \vec{\mathbf{a}} = (\tfrac{1}{\alpha} \cdot \alpha)\vec{\mathbf{a}} = \tfrac{1}{\alpha} \cdot (\alpha\vec{\mathbf{a}}) = \tfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}}.$$

6) Vektory $(-\alpha)\vec{\mathbf{a}}$, $-\alpha\vec{\mathbf{a}}$ a $\alpha(-\vec{\mathbf{a}})$ vyhovují všechny tři rovnici $\alpha\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Protože tato rovnice má právě jedno řešení, musí si tyto vektory být rovny.

Příklady vektorových prostorů

V následujících příkladech je písmenem **T** označeno číselné těleso.

A) Nechť $n \in\mathbf{N}$. Vektorový prostor $\mathbf{T}^n$ nad tělesem **T** je prostor, kde vektory jsou **uspořádané** n-tice čísel z tělesa **T** zapsané v podobě sloupce, tj. např.

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_i \in\mathbf{T}$ pro $i \in \hat{n}$. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme **složky** vektoru $\vec{\mathbf{a}}$.

Operace v prostoru $\mathbf{T}^n$. Sčítání vektorů a násobení vektorů číslem se zavádí po složkách, což znamená podle následujících pravidel.

Když $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in\mathbf{T}^n$, $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in\mathbf{T}^n$ a $\alpha \in\mathbf{T}$,

definujeme $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ a $\alpha\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$.

Tímto je vektorový prostor $\mathbf{T}^n$ definován. Je to zřejmě vektorový prostor nad tělesem **T**, kde nulový vektor je vektor $\vec{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a vektor opačný např.

k výše uvedenému vektoru $\vec{\mathbf{a}}$ je vektor $-\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$.

Poznámky:
1) Rozlišujme pečlivě **množinu $\mathbf{T}^n$** a **vektorový prostor $\mathbf{T}^n$**, tj. množinu se dvěma operacemi.
2) Snadno si rozmyslíme, že pokud to budeme potřebovat, lze při obvyklých operacích ztotožnit vektorový prostor $\mathbf{T}^1$ a těleso **T**.
3) Množina $\mathbf{T}^n$ tvoří s výše zavedenými operacemi vektorový prostor i nad tělesem **R**. Je to však jiný vektorový prostor než $\mathbf{T}^n$.

B) Nechť $m, n \in\mathbf{N}$.
Prostor $\mathbf{T}^{m,n}$ nad tělesem **T** je vektorový prostor, kde vektory jsou tzv. matice o m řádcích a n sloupcích.

Matice $\mathbf{A}\in\mathbf{T}^{m,n}$ je soubor $m \cdot n$ čísel z **T** zapsaný ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Čísla a_{ij}, kde $i \in \hat{m}, j \in \hat{n}$ nazveme **prvky** matice **A**.

Soubor $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ se nazývá ***i*-tý řádek matice A** a soubor $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se nazývá ***j*-tý sloupec matice A**.

Operace v prostoru:
Součet matic z $\mathbf{T}^{m,n}$ a násobek matice číslem z **T** se zavádí po prvcích, to jest následujícím způsobem. Když

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^{m,n},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^{m,n}$$

a $\alpha \in \mathbf{T}$, definujeme

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Roli nulového vektoru hraje **nulová matice** o m řádcích a n sloupcích

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a opačný vektor k matici **A** je -**A** $= \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$

Poznámky:
1) Snadno si rozmyslíme, že prostory $\mathbf{T}^n$ a $\mathbf{T}^{n,1}$ lze ztotožnit.
2) Pojem **matice** je jeden z nejdůležitějších pojmů algebry. Proto se tomuto

pojmu v budoucnu věnujeme velice podrobně. Pokud ovšem hraje roli jen prvku množiny $\mathbf{T}^{m,n}$, vystačíme pouze s předcházející definicí.

C) Písmenem $\mathcal{P}$ označíme vektorový prostor všech polynomů. Je to vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ s následujícími operacemi.
Operace: Operace sčítání je totožná s běžným sčítáním polynomů a podobně i operace násobení polynomu číslem. Přesněji to znamená:
Jsou-li p a q polynomy v proměnné $t \in \mathbf{C}$ a $\alpha \in \mathbf{C}$, pak polynom $p+q$ a polynom αp jsou definovány tak, že

$$(p+q)(t) = p(t) + q(t), \qquad (\alpha p)(t) = \alpha p(t)$$

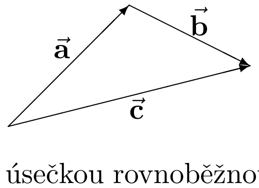
pro každé $t \in \mathbf{C}$.
Je zřejmé, že při takto definovaných operacích hraje roli nulového vektoru polynom nulový a opačný vektor k polynomu $-p$ je polynom definovaný vztahem

$$(-p)(t) = -p(t) \text{ pro každé } t \in \mathbf{C}.$$

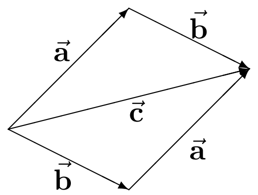
D) Nechť $n \in \mathbf{N}$.
Vektorový prostor $\mathcal{P}_n$ nad tělesem $\mathbf{C}$ je prostor tvořený všemi polynomy stupně nejvýše n a polynomem nulovým, přičemž operace se zavádějí stejně jako v prostoru $\mathcal{P}$.

Poznámka: Je zřejmé, že polynomy stupně nejvýše n bez nulového polynomu vektorový prostor netvoří.

E) Snadno si rozmyslíme, že vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ tvoří rovněž množina fyzikálních vektorů, tj. orientovaných úseček (šipek) buď v rovině, nebo trojrozměrném prostoru. Jsou to úsečky, u kterých je určeno, který hraniční bod je počáteční a který koncový a jsou dány pouze svou velikostí a směrem, a nikoli umístěním v prostoru, tj. dvě úsečky, které mají stejnou velikost, jsou rovnoběžné a mají stejnou orientaci, reprezentují tentýž prvek vektorového prostoru.
Vektory se sčítají tak, že do koncového bodu úsečky, která reprezentuje vektor $\vec{\mathbf{a}}$ se umístí počáteční bod úsečky reprezentující vektor $\vec{\mathbf{b}}$. Úsečka, která má za počáteční bod počátek úsečky $\vec{\mathbf{a}}$ a za konečný bod konec úsečky $\vec{\mathbf{b}}$ reprezentuje vektor $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ (viz obrázek).

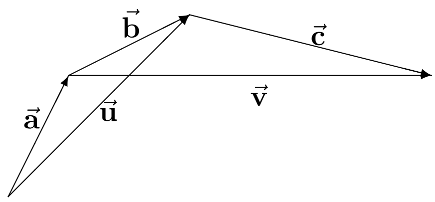


Vektor $\alpha\vec{\mathbf{a}}$ je dán úsečkou rovnoběžnou s úsečkou reprezentující vektor $\vec{\mathbf{a}}$ a jeho délka se dostane tak, že původní délka se násobí absolutní hodnotou α. Pokud je α záporné číslo, změní se orientace vektoru.
Platnost axiomů vektorového prostoru snadno prověříme za pomoci známých pouček z elementární geometrie.
Jako příklad je na obrázku 1. důkaz komutativního zákona (vektor $\vec{\mathbf{c}}$ je totiž zřejmě roven součtu $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ i součtu $\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$).



Obr. 1

Podobně z obrázku 2. je zřejmá platnost asociativního zákona (označili jsme $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ a $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ a zřejmě je $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{c}}$)



Obr. 2

Poznámky:
1) Rozmyslíme si otázku, kolik vektorů má vektorový prostor. Jistě obsahuje alespoň jeden vektor, a to nulový. Může ovšem množina obsahující pouze nulový vektor tvořit vektorový prostor nad nějakým tělesem ?

Jistě ano, definujeme-li operace vztahy

$$\vec{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}}, \qquad \alpha\vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}}.$$

Tento prostor nazveme nulový.

Může mít nenulový vektorový prostor konečný počet prvků ?

Jistě ne, neboť obsahuje nějaký vektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{o}}$ a s ním i všechny vektory tvaru $j \cdot \vec{\mathbf{v}}$, kde $j \in \mathbf{Z}$, neboť celá čísla jsou obsažena v každém tělese. Přitom $j \cdot \vec{\mathbf{v}} \neq i \cdot \vec{\mathbf{v}}$ pro $j \neq i$.

2) Snadno si rozmyslíme, že platí tvrzení:
Když $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ a těleso $\mathbf{T}_1$ je podmnožinou tělesa $\mathbf{T}$, je $\mathbf{V}$ při stejných operacích vektorovým prostorem i nad $\mathbf{T}_1$. Speciálním případem je vektorový prostor $\mathbf{C}^n$ nad tělesem $\mathbf{R}$.

Základní informace o řešení soustav lineárních algebraických rovnic.

Soustavou lineárních algebraických rovnic nazveme každou soustavu tvaru

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2m}x_m = b_2\\
&\dots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nm}x_m = b_n.
\end{aligned}
$$

Jedná se o soustavu n rovnic o m neznámých. Čísla a_{ij} a b_i, kde $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$, jsou komplexní čísla .

Pojmy:

Matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

se nazývá **matice soustavy**,

matice $(\mathbf{A},\vec{\mathbf{b}})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$ se nazývá **rozšířená matice soustavy**,

vektor $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ se nazývá **sloupec pravých stran**

a vektor $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^m$, pro který je soustava splněna, se nazývá **řešení soustavy**.

Soustava, pro kterou je $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$, se nazývá **soustava bez pravé strany** nebo také **homogenní soustava**.

Důležité je si předem uvědomit, že existují soustavy, které nemají **žádné** řešení, např. soustava

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 6\\
3x_1 + 5x_2 &= 1,
\end{aligned}
$$

a naopak existují soustavy, které mají řešení více, např. soustava

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 1\\
6x_1 + 10x_2 &= 2
\end{aligned},
$$

která má řešení $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ a mnoho dalších řešení.

Je zřejmé, že homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, a to řešení

$\vec{\mathbf{o}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Toto řešení se nazývá **triviální řešení**.

V této kapitole se budeme zabývat dvěma otázkami:
Jak zjistit, zda je daná soustava řešitelná ?
a
Jak najít alespoň jedno řešení ?
Budeme postupovat tak, že soustavu ekvivalentními úpravami převedeme do tak jednoduchého tvaru, že z něho bude odpověď na oba problémy zřejmá.
Zbývá odpovědět, co jsou to **ekvivalentní úpravy** a do jakého jednoduchého tvaru lze každou soustavu převést.

Ekvivalentní úpravy jsou takové úpravy, které nemění množinu řešení soustavy.
Jsou to tyto 3 úpravy:
(1) záměna dvou rovnic,
(2) násobení rovnice číslem $\alpha \neq 0$,
(3) přičtení jedné rovnice k druhé.

S jakým cílem budeme takové úpravy provádět ?
Chceme soustavu převést do tvaru, kde rozšířená matice soustavy bude v **horním stupňovitém tvaru**.

Definice:
Matice $\mathbf{A}$ o n řádcích a $m+1$ sloupcích s prvky a_{ij},
$i \in \hat{n}, j \in \widehat{m+1}$ je v **horním stupňovitém tvaru**, právě když existuje přirozené číslo $l \in \hat{n}$ a indexy $k_1, k_2, \ldots, k_l$ tak, že
$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leq m+1$ a platí

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a_{ik_i} \neq 0 \\ 2) & a_{ij} = 0 \text{ pro } \quad j < k_i \end{array}\right\} \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

$$3) \quad a_{ij} = 0 \text{ pro } \quad i > l, j \in \widehat{m+1}.$$

Rozšířená matice soustavy bude tedy mít tyto vlastnosti:
V prvním řádku bude první nenulový prvek na k_1-tém místě,
v druhém řádku bude první nenulový prvek na k_2-tém místě,
atd.
až v l-tém řádku bude první nenulový prvek na k_l-tém místě.
Od $l+1$-ního řádku počínaje budou řádky nulové.

Odpovídající soustava bude mít tedy tvar

$$\begin{array}{rrrl} a_{1k_1}x_{k_1} + \ldots + & a_{1k_2}x_{k_2} + \ldots + & a_{1k_l}x_{k_l} + \ldots + a_{1m}x_m = & a_{1m+1} \\ & a_{2k_2}x_{k_2} + \ldots + & a_{2k_l}x_{k_l} + \ldots + a_{2m}x_m = & a_{2m+1} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_{lk_l}x_{k_l} + \ldots + a_{lm}x_m = & a_{lm+1}. \end{array}$$

Sloupce rozšířené matice s indexy $k_1, k_2, \ldots, k_l$ nazýváme **hlavní sloupce matice**, ostatní sloupce nazýváme **vedlejší sloupce matice**.

Z poslední soustavy snadno vyčteme odpověď na řešené problémy:
(A) Soustava je řešitelná, právě když sloupec pravých stran je vedlejší.
(Je zřejmé, že když je sloupec pravých stran hlavní, tj. $k_l = m + 1$, jsou u všech neznámých v poslední rovnici nuly a na pravé straně rovnice nenulové číslo. Rovnice nemůže tedy být nikdy splněna.
To, že když je sloupec pravých stran vedlejší, je soustava řešitelná, vyplyne z následujícího tvrzení.)
(B) Řešení soustavy nalezneme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbývající neznámé jednoznačně dopočteme.
(Je jasně vidět, že pokud jsou „vedlejší neznámé“ zvoleny, lze z poslední rovnice jednoznačně spočítat neznámou x_{k_l}, po dosazení do předposlední rovnice spočítat $x_{k_{l-1}}$ atd.)

Z „pilnosti“ ještě uvedeme tvrzení:
(C) Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby soustava měla právě jedno řešení, je, že matice soustavy má jen hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší.
Důsledkem je, že homogenní soustava má jen triviální řešení, právě když matice soustavy má jen hlavní sloupce.
(Když neexistují vedlejší sloupce matice soustavy, nelze žádné neznámé volit.)

Zbývá ukázat, že lze každou soustavu ekvivalentními úpravami převést na soustavu s rozšířenou maticí v horním stupňovitém tvaru.
Nejprve si uvědomíme, že úpravy můžeme provádět přímo s řádky rozšířené matice soustavy místo s rovnicemi.
Úpravu na horní stupňovitý tvar lze docílit např. tímto algoritmem:
1) Prohledáme 1. sloupec matice a nalezneme nenulový prvek. Odpovídající řádek dáme na první pozici, ostatní řádky posuneme. Není-li v prvním sloupci nenulový prvek, prohledáme 2. sloupec a počínáme si stejně. První sloupec, ve kterém nalezneme nenulový prvek, je k_1-tý.
Od ostatních řádků odečteme takový násobek nového 1. řádku, aby v k_1-tém sloupci vznikly od 2. místa nuly.
2) Prohledáváme další sloupce, které jsou na řadě, vždy od 2. místa počínaje. Nenulový prvek nalezneme v k_2-tém sloupci, řádek přemístíme na druhou pozici, ostatní řádky posuneme.
Od třetího a dalších řádků odečteme takové násobky 2. řádku, aby vk_2-tém sloupci byly od 3. místa nuly.
3) Takto postupujeme tak dlouho, dokud v prohledávaných sloupcích nalézáme na potřebných místech nenulové prvky.

Lineární závislost a nezávislost.

Definice: Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor (uspořádaná n-tice) vektorů z $\mathbf{V}$. Říkáme, že vektor $\vec{\mathbf{x}}$ je lineární kombinací souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$, právě když existuje n-tice čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ z tělesa $\mathbf{T}$ tak, že

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}.$$

Čísla $\alpha_i, i \in \hat{n}$, nazýváme koeficienty lineární kombinace.
Jestliže $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \hat{n}$, nazýváme takovou kombinaci **triviální**. V opačném případě (tj. když existuje index $i_0 \in \hat{n}$ tak, že $\alpha_{i_0} \neq 0$) jde o **netriviální** lineární kombinaci.

Poznámky:
1) Ujasněte si řádně rozdíl mezi pojmy soubor vektorů $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ a množina vektorů $\{\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\}$.

2) Někdy užijeme slovního spojení „ vektor $\vec{\mathbf{x}}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ “ místo „ vektor $\vec{\mathbf{x}}$ je lineární kombinací souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ “. Obě vyjádření mají stejný význam.

3) Výsledkem triviální lineární kombinace může být jen nulový vektor.

Definice: Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem** souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$
a značíme ji $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

Věta 2: Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom platí:
1) $\vec{\mathbf{o}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
2) $\vec{\mathbf{x}}^{(n+1)} = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda \Longrightarrow$
$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

3) Nechť $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ je permutace množiny $\hat{n}$, potom:
$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(k_1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k_2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(k_n)}]_\lambda$.

4) Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$, $\vec{\mathbf{y}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$, $\alpha \in \mathbf{T}$.
Potom
$\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$, $\alpha\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

Důkaz:
1) Vyplývá z rovnosti $\vec{\mathbf{o}} = 0 \cdot \vec{\mathbf{x}}^{(1)} + 0 \cdot \vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \dots + 0 \cdot \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$.

2) Rovnost dvou množin se v matematice obvykle dokazuje tak, že se dokáží dvě inkluze. Budeme postupovat také tak.
a) Každý vektor $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \dots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$
lze psát ve tvaru
$\vec{\mathbf{x}} = \alpha_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \dots + \alpha_n\vec{\mathbf{x}}^{(n)} + 0\vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}$.

Z toho plyne inkluze

$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}]_\lambda \supset [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda.$

b) Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}]_\lambda$.

Je tedy tvaru
$\vec{\mathbf{x}} = \alpha_1 \vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2 \vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \alpha_n \vec{\mathbf{x}}^{(n)} + \alpha_{n+1} \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}$.

Z předpokladu věty plyne, že $\vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}$ má tvar
$\vec{\mathbf{x}}^{(n+1)} = \beta_1 \vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \beta_2 \vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \beta_n \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$.

Z těchto dvou rovností plyne
$\vec{\mathbf{x}} = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$.

Platí tedy i opačná ikluze
$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)}]_\lambda \subset [(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda.$

3) Tvrzení je přímým důsledkem komutativního zákona, protože platí-li pro nějaký vektor $\vec{\mathbf{x}}$ vztah $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, platí také vztah $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \vec{\mathbf{x}}^{(k_i)}$, ať již je $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ kterákoliv permutace množiny $\hat{n}$.

4) Z předpokladů plyne, že vektory $\vec{\mathbf{x}}$ a $\vec{\mathbf{y}}$ z $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ lze psát ve tvaru $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, resp. $\vec{\mathbf{y}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Platí tedy $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, resp. $\alpha\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$. Z toho vyplývá $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ a také $\alpha\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

Poznámka: Všimněme si, že lineární obal $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ souboru vektorů z prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ je při zachování operací také vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbf{T}$.

Definice: Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Říkáme, že tento soubor je **lineárně nezávislý** (LN), právě když pouze triviální lineární kombinace tohoto souboru je rovna $\vec{\mathbf{o}}$. V opačném případě nazveme tento soubor **lineárně závislý** (LZ).

Poznámky:
1) Ekvivalentní definice:
Soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LZ $\Longleftrightarrow$ existuje n-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z tělesa $\mathbf{T}$, která nejsou všechna rovna nule, tak, že platí $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$ (tj. existuje netriviální lineární kombinace rovná nule).

2) Další ekvivalentní definice:
Soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN $\Longleftrightarrow$
pro každou n-tici čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z tělesa $\mathbf{T}$, platí implikace

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Věta 3: Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ jsou vektory z $\mathbf{V}$, pak

(1) soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)})$ je LN $\Longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{o}}$,
(2) nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z $\mathbf{V}$, $l \in \hat{n}$ a přirozená čísla k_i pro $i \in \hat{l}$ splňují vztahy $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq n$. Potom, je-li soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ LN, je také soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(k_1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k_2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k_l)})$ LN.
(3) nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z $\mathbf{V}$ a $n \geq 2$. Potom $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LZ, právě když existuje index $i_0 \in \hat{n}$, že
$\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0-1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0+1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

Důkaz:
(1) Pokud $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$, je soubor LZ, neboť pro jakékoliv nenulové číslo α je $\alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$, tj. existuje netriviální lineární kombinace souboru rovná $\vec{\mathbf{o}}$.
Pokud $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{o}}$ je soubor LN, neboť z rovnosti $\alpha\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$ podle věty 1 nutně plyne $\alpha = 0$, a tedy jen triviální lineární kombinace souboru dává nulový vektor.

(2) (sporem) Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN a $(\vec{\mathbf{x}}^{(k_1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k_2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k_l)})$ je LZ. Existují tedy čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$, ne všechna rovná 0,
tak, že $\sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(k_i)} = \vec{\mathbf{o}}$. Definujme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, že
$\alpha_{k_i} = \beta_i$ pro $i \in \hat{l}$ a jinak $\alpha_i = 0$. Jde tedy o nenulovou n-tici čísel a přesto $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$. To je hledaný spor.

(3) Tvrzení je ekvivalence, je tedy třeba dokázat dvě implikace:
(a) Nechť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LZ. Existuje tedy n-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, taková, že $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$ a přitom existuje index $i_0 \in \hat{n}$, že $\alpha_{i_0} \neq 0$. Platí tedy
$\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

(b) Nechť existuje index $i_0 \in \hat{n}$, že $\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$. Tento vztah lze přepsat do tvaru $-\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$. Našli jsme tedy netriviální lineární kombinaci rovnou nulovému vektoru. Soubor je LZ.

Důsledky věty 3:
1) Z tvrzení (2) a (1) plyne:
Je-li některý z vektorů souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ nulový, je soubor LZ.
2) Z tvrzení (3) a druhého tvrzení věty 2 plyne:
Je-li soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ LZ a $n \geq 2$, existuje index $i_0 \in \hat{n}$ takový, že

$$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0-1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0+1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda.$$

(stručněji a lidověji: V LZ souboru určitě existuje vektor, který lze vyhodit, aniž se mění lineární obal souboru.)

Věta 4:
Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LZ soubor vektorů. Potom buď
(1) $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$,

nebo
(2) $n \geq 2$ a existuje index $i_0 \in \{2, 3, \ldots, n\}$ tak, že
$\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(i_0-1)}]_\lambda$

Důkaz:
Víme (podle prvního důsledku věty 3), že, když $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$, je soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ LZ.
Stačí tedy dokázat, že při $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{o}}$ platí (2).
Jistě $n \geq 2$, protože jednočlenný soubor je podle věty 3 LZ, právě když $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{o}}$.
Neboť soubor je LZ, existuje netriviální lineární kombinace tak, že
$\alpha_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \alpha_n\vec{\mathbf{x}}^{(n)} = \vec{\mathbf{o}}$.
Čísla $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nemohou být všechna rovna 0, protože pak by muselo i α_1 být rovno 0 a kombinace by byla triviální.
Nechť tedy i_0 je nejvyšší takový index, že $\alpha_{i_0} \neq 0$.
Pak platí $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum\limits_{i=1}^{i_0} \alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$ a tedy $\vec{\mathbf{x}}^{(i_0)} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Poznámka:
Řádně si promysleme, v čem je tvrzení věty 4 silnější než podobné tvrzení druhého důsledku věty 3.

Definice:
Nechť ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ existuje soubor vektorů $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ tak, že $\mathbf{V}$=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$. Pak říkáme, že prostor $\mathbf{V}$ je **generován** konečným počtem vektorů, soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ se nazývá **generující soubor** a vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ se nazývají **generátory V**.

Poznámka:
Již dříve jsme poznamenali, že linární obal $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ tvoří při zachování operací vektorový prostor. Nyní vidíme, že vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ jsou generátory tohoto prostoru.

Definice:
Existuje-li ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ tak, že
(1) je LN
a
(2) generuje $\mathbf{V}$,
říkáme, že prostor $\mathbf{V}$ má konečnou bázi a soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ nazýváme **báze V**.

Poznámka:
Nulový vektorový prostor nemá bázi, neboť v něm neexistuje LN soubor.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Nechť existuje číslo $n \in \mathbf{N}$ takové, že
1) ve $\mathbf{V}$ existuje n-členný LN soubor vektorů
a
2) každý $(n+1)$-členný soubor je LZ.
Potom říkáme, že $\mathbf{V}$ má **konečnou dimenzi** n a píšeme dim($\mathbf{V}$)=n.

Pokud takové n neexistuje, říkáme, že **V** má **nekonečnou dimenzi** a píšeme dim(**V**)=∞.
Pro nulový vektorový prostor definujeme dim$\{\vec{\mathbf{o}}\}$=0.

Věta 5(Steinitzova o výměně)**:**
Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ a $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)})$ jsou soubory vektorů z vektorového prostoru **V** nad tělesem **T**. Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN a nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(i)} \in [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)}]_\lambda$ pro všechna $i \in \hat{n}$. Potom platí:
(1) $n \leq m$,
(2) existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \hat{m}$ takové, že
$[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_n\})]_\lambda$.

Důkaz:
Označme **L**= $[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)}]_\lambda$ a l=min$\{m, n\}$.
Nejdříve dokážeme následující pomocné tvrzení.

Lemma:
Pro každé $k \in \hat{l}$ existují vzájemně různé indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \hat{m}$ takové, že
L=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})]_\lambda$.
Důkaz lemmatu:
Důkaz provedeme indukcí podle k.
(a) pro k=1.
Protože $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \in$**L** je podle věty 2 **L**= $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)}]_\lambda$.
Podle třetího tvrzení věty 3 je soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(m)})$ LZ.
$\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{o}}$, a proto podle věty 4 existuje index $i_1 \in \hat{m}$ tak, že
$\vec{\mathbf{y}}^{(i_1)} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(i_1-1)}]_\lambda$.
Z druhého tvrzení věty 2 plyne **L**=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1\})]_\lambda$.
(b) předpokládáme platnost tvrzení pro k, kde $1 \leq k < l$, tj. existují indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \hat{m}$ takové, že
L=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})]_\lambda$,
a dokážeme platnost pro $k+1$.
Protože $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)} \in$**L** je podle věty 2
L=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})]_\lambda$.
Soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}))$
je podle třetího tvrzení věty 3 LZ.
Podle věty 4 je tam tedy některý vektor lineární kombinací předcházejících vektorů. Nemůže to být ovšem žádný z vektorů označených písmenem **x**, neboť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN.
Existuje tedy další index i_{k+1} tak, že vektor $\vec{\mathbf{y}}^{(i_{k+1})}$ lze z posledního souboru generátorů **L** vyhodit, aniž se změní lineární obal. To znamená, že platí **L**=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, \vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i}$
$\hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\})]_\lambda$.
Tím je lemma dokázáno.

Budeme pokračovat v důkazu Steinitzovy věty. Důkaz prvního tvrzení provedeme sporem.
Nechť $m < n$. Použijeme-li dokázaného lemmatu při $k = l = m$, dostaneme vztah
L=$[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_m\})]_\lambda$.

Protože množina $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ vznikla pouze přepermutováním prvků množiny $\hat{m}$ je rozdíl $\hat{m} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ prázdná množina, a tedy $\mathbf{L}=[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(m)}]_\lambda$ a tedy podle věty 3 $\vec{\mathbf{x}}^{(n)} \notin \mathbf{L}$, což je spor.
Druhé tvrzení Steinitzovy věty je totožné s tvrzením lemmatu pro volbu $k = n$.

Poznámka:
Všimněme si pečlivě smyslu Steinitzovy věty: První tvrzení říká, že ve vektorovém prostoru nemůže počet lineárně nezávislých vektorů převýšit počet generátorů tohoto prostoru.
Druhé tvrzení říká, že mám-li n-tici LN vektorů z vektorového prostoru, lze v jeho generujícím souboru nalézt n-tici generátorů, kterou lze jimi nahradit (proto věta o **výměně**). Bohužel věta neříká, **které** generátory lze vyhodit a nahradit je.

Pokud v dalším neřekneme jinak, je $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Věta 6:
Nechť dim $\mathbf{V}=n$, kde $n \in \mathbf{N}$. Pak ve $\mathbf{V}$ existuje n-členná báze.

Důkaz:
Z definice dimenze plyne, že ve $\mathbf{V}$ existuje n-členný LN soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$.
Dokážeme, že je to báze $\mathbf{V}$.
K tomu stačí dokázat rovnost $\mathbf{V}=[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
Inkluze $\mathbf{V} \supset [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ je zřejmá.
Dokážeme inkluzi opačnou.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$. Podle 3. tvrzení věty 3 je soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}, \vec{\mathbf{x}})$ LZ, a tudíž existuje nenulová $(n+1)$-tice čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ tak, že $\alpha_1 \vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2 \vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \alpha_n \vec{\mathbf{x}}^{(n)} + \alpha \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$.
Zcela jistě je $\alpha \neq 0$, neboť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN.
Platí tedy $\vec{\mathbf{x}} = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, a tedy $\vec{\mathbf{x}} \in [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.

Věta 7:
Nechť $n \in \mathbf{N}$ a existuje n-členná báze $\mathbf{V}$. Potom dim $\mathbf{V}= n$.
Důkaz:
Nechť $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{V}$, tj. $\mathbf{V}= [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)}]_\lambda$ a soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je LN. Z definice dimenze plyne dim $\mathbf{V} \geq n$.
Nerovnost $n \geq$dim $\mathbf{V}$ plyne z následující úvahy:
Kdyby ve $\mathbf{V}$ existoval $(n+1)$-členný LN soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n+1)})$, dostali bychom se do sporu se Steinitzovou větou, neboť pro každé $i \in \widehat{n+1}$ je $\vec{x}^{(i)} \in [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)}]_\lambda$. Je tedy dim $\mathbf{V}= n$.

Poznámka:
Z předcházejících vět a jejich důkazů je zřejmé následující tvrzení:
V prostoru $\mathbf{V}$ dimenze n platí:
(a) každá báze je n-členná,
(b) každý n-členný LN soubor je báze,
(c) každý n-členný generující soubor je báze.

Věta 8:
Nechť $n \in$**N**, **V**$\neq \{\vec{\mathbf{o}}\}$ a **V**$= [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)}]_\lambda$. Označme dim **V**$=k$. Pak $k \leq n$ a existují indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \hat{n}$ takové, že $(\vec{\mathbf{y}}^{(i_1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(i_2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(i_k)})$ je báze **V**
(tj. z každého souboru generátorů lze vybrat bázi).
Důkaz: Z věty 5 plyne $k \leq n$. Je-li $n = k$, je soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(k)})$ generující a tudíž je to báze.
Pokud $n > k$, vybereme nyní z generátorů bázi.
Soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je nutně LZ, a tedy podle důsledku věty 3 existuje vektor $\vec{\mathbf{y}}^{(i)}$, který je možné ze souboru vyhodit, aniž se změní lineární obal. Zůstane tedy $(n-1)$-členný soubor generátorů.
Pokud je $n-1 > k$, vyhodíme na základě obdobné úvahy ze zbývajícího $(n-1)$-členného souboru další vektor, aniž změníme lineární obal.
Je zřejmé, že po konečném počtu takových kroků dojdeme ke k-člennému generujícímu souboru, tj. k bázi.

Věta 9:
Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je LN soubor vektorů z **V** a dim **V**$=n \in$**N**, $k < n$. Potom existují vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$, že $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze **V** (tj. LN soubor lze doplnit na bázi).

Důkaz:
Nechť $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je nějaká báze **V**, tj. **V**$= [\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)}]_\lambda$. Podle Steinitzovy věty je $k \leq n$ a existují indexy $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \hat{n}$ takové, že
V$=[\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)}]_\lambda = [\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{n} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})]_\lambda$.
Soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(k)}, (\vec{\mathbf{y}}^{(i)} | i \in \hat{n} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}))$ je LN, neboť kdyby byl LZ, šlo by podle důsledku věty 3 jeden vektor ze souboru vyhodit a nezměnit lineární obal. Dostali bychom tedy $(n-1)$-členný soubor generující **V**, což by bylo ve sporu s prvním tvrzením Steinitzovy věty.

Příklad:
Uvedeme důležitý příklad báze v prostoru $\mathbf{T}^n$. Je to báze, pro kterou se vžil název **standardní báze**. Tvoří ji vektory

$$\vec{\mathbf{e}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Značíme ji $\mathcal{E} = (\vec{\mathbf{e}}^{(1)}, \vec{\mathbf{e}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}^{(n)})$.
Snadno si rozmyslíme, že soubor $(\vec{\mathbf{e}}^{(1)}, \vec{\mathbf{e}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}^{(n)})$ je LN a že pro každý vektor

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^n \text{ platí } \vec{\mathbf{x}} = x_1 \vec{\mathbf{e}}^{(1)} + x_2 \vec{\mathbf{e}}^{(2)} + \ldots + x_n \vec{\mathbf{e}}^{(n)}.$$

Zároveň je z toho zřejmé, že dimenze $\mathbf{T}^n$ je rovna n.

Označení:

Nechť $i, j \in \mathbf{N}_0$. Zavedeme symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad i = j \\ 0 & \text{pro} \quad i \neq j \end{cases}$.
Symbol δ_{ij} nazýváme **Kroneckerovo delta**.

Věta a definice 10:
Nechť soubor $\mathcal{X}= (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom ke každému $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}_n$ existuje právě jedna uspořádaná n-tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^n$ tak, že $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.
Číslo α_i se nazývá i-tá souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{x}}$ vzhledem k bázi $\mathcal{X}$, pro $i \in \hat{n}$.
Používáme označení $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Zřejmě $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} \in \mathbf{T}^n$. Zobrazení $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{T}$, kde $i \in \hat{n}$, pro které $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}}) = \alpha_i$ pro libovolný vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}_n$, nazýváme **$i$-tý souřadnicový funkcionál** v bázi $\mathcal{X}$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{V}_n$ a $\alpha \in \mathbf{T}$. Pak platí

(1) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{y}})$, (zobrazení je **aditivní**)
(2) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}})$, (zobrazení je **homogenní**)
(3) $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}}^{(j)}) = \delta_{ij}$ pro $i, j \in \hat{n}$.

Důsledek:
Platí $(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}} = (\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} + (\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}}$ a $(\alpha\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \alpha(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$.

Důkaz věty 10:
Existence n-tice $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{T}^n$ plyne z toho, že soubor $\mathcal{X}$ je generující.
Jednoznačnost se dokáže sporem.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a zároveň $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ přičemž $\alpha_i \neq \beta_i$ alespoň pro jedno $i \in \hat{n}$. Z toho plyne $\vec{\mathbf{o}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, což je spor s lineární nezávislostí $\mathcal{X}$.

Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a $\vec{\mathbf{y}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$,
tj. $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ a $(\vec{\mathbf{y}})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$,
resp. $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}}) = \alpha_i$ a $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{y}}) = \beta_i$ pro každé $i \in \hat{n}$.
Odtud plyne $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$,
tj. $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \alpha_i + \beta_i = \vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{y}})$.
Analogicky $\alpha\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, tj. $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\alpha_i = \alpha\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}(\vec{\mathbf{x}})$.

Poznámka:

Řádně si rozmyslete rozdíl mezi objektem označeným $\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}$. Zatímco $\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ je **vektor** z $\mathbf{V}$, je $\vec{\mathbf{x}}^{(i)\#}$ **zobrazení**, které každému vektoru z $\mathbf{V}$ přiřadí číslo.

Podprostory vektorového prostoru.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.
(1) Jsou-li $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ neprázdné podmnožiny $\mathbf{V}$ nazveme jejich **součtem** množinu
$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\{\vec{\mathbf{x}} \in\mathbf{V}|\ (\exists\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{A})(\exists\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{B})(\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})\}$,
tj. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \mid \vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{B}\}$.
(2) Nechť $\mathbf{A}$ je neprázdná podmnožina $\mathbf{V}$ a $\mathbf{S}$ je neprázdná podmnožina $\mathbf{T}$. Pak **násobkem** množiny $\mathbf{A}$ množinou $\mathbf{S}$ nazveme množinu
$\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}=\{\alpha\vec{\mathbf{a}} \mid \alpha \in \mathbf{S}, \vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}\}$.

(3) Součet podmnožin $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ se nazývá **direktní**, právě když ke každému vektoru $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$ existuje právě jeden vektor $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}$ a právě jeden vektor $\vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{B}$ tak, že $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.
Direktní součet značíme $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}$.

Poznámky:
1) Budeme používat následujících zjednodušených označení:
$\{-1\}\cdot\mathbf{A} = -\mathbf{A}$,
$\{\vec{\mathbf{a}}\} + \mathbf{A} = \vec{\mathbf{a}} + \mathbf{A}$,
$\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\mathbf{A}-\mathbf{B}$,
$\{\alpha\} \cdot \mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}$.

2) Pro množinové operace platí zřejmě následující vztahy:
(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$, (zákon komutativní)
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, (zákon asociativní)
(b) $\mathbf{A}+\vec{\mathbf{o}}=\mathbf{A}$,
(c) jasně platí $\vec{\mathbf{o}} \in\mathbf{A}-\mathbf{A}$, ale není obecně pravda, že $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$
(když např. $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{A}$ a $\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{b}}$, je také $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{A} - \mathbf{A}$ a $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{o}}$),
(d) $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$,
(e) $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \mathbf{SA} + \mathbf{SB}$ (rovnost nemusí obecně platit),
(např. je-li $\mathbf{A}=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{B}=\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$ a $\mathbf{S}=\{1,2\}$,
je $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}= \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, $\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}= \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
a tedy $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
zatímco $\mathbf{SA} + \mathbf{SB} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
(f) platí
$\emptyset \neq \mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{T}, \emptyset \neq \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{V} \Longrightarrow \mathbf{S}_1\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{SA}$,
(g) analogicky
$\emptyset \neq \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{V}, \emptyset \neq \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{V} \Longrightarrow \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, $\emptyset \neq \mathbf{P} \subset \mathbf{V}$. Pak říkáme, že $\mathbf{P}$ je podprostor $\mathbf{V}$, právě když platí:

(1) je-li $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}$, pak $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}$ (tj. $\mathbf{P}+\mathbf{P}\subset\mathbf{P}$),
(2) je-li $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$ a $\alpha \in \mathbf{T}$, pak $\alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$ (tj. $\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}\subset\mathbf{P}$).
Užíváme označení $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$.

Věta 11:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$. Potom platí:
(1) $\vec{\mathbf{o}} \in \mathbf{P}$,
(2) $\{\vec{\mathbf{o}}\} \subset\subset \mathbf{V}$, $\mathbf{V}\subset\subset\mathbf{V}$,
(3) $\mathbf{P}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{T}$, pokud operace sčítání vektorů a násobení vektoru číslem definujeme stejně jako ve $\mathbf{V}$.
(4) Je-li $\mathbf{P}_1 \subset\subset\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}_1 \subset\subset \mathbf{V}$.

Důkaz:
(1) $\mathbf{P}$ obsahuje aspoň jeden vektor $\vec{\mathbf{x}}$, a proto i vektor $0\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$,
(2) obě množiny jsou uzavřené operacím a proto jsou to podprostory,
(3) množina $\mathbf{P}$ je uzavřená vůči operacím a operace vyhovují axiomům vektorového prostoru, neboť se jedná o operace s vektory, které patří do $\mathbf{V}$.
(4) $\left.\begin{array}{c}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{T}\mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{P}_1 \subset\subset \mathbf{V}.$

Definice:
Podprostory $\{\vec{\mathbf{o}}\}$ a $\mathbf{V}$ se nazývají **triviální podprostory V**.
Podprostor $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$, pro který $\mathbf{P}\neq\mathbf{V}$ se nazývá **vlastní podprostor** prostoru $\mathbf{V}$.

Důsledky:
Nechť $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$. Pak
(1) $\mathbf{P}+\mathbf{P}=\mathbf{P}$,
(2) $\mathbf{TP}=\mathbf{P}$,
(3) pro libovolné $\alpha \in \mathbf{T}, \alpha \neq 0$ je $\alpha\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

Důkaz:
(1) Z definice podprostoru plyne inkluze $\mathbf{P}+\mathbf{P}\subset\mathbf{P}$.
Opačná inkluze plyne z následující množinové úvahy.
$\mathbf{P}=\mathbf{P}+\{\vec{\mathbf{o}}\}\subset\mathbf{P}+\mathbf{P}$.
(2) Z definice plyne $\mathbf{TP}\subset\mathbf{P}$.
Naopak $\mathbf{P}=1\cdot\mathbf{P}\subset\mathbf{TP}$.
(3) $\alpha\mathbf{P} \subset \mathbf{TP} = \mathbf{P}$.
Naopak, je-li $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P} \Rightarrow \alpha(\frac{1}{\alpha}\vec{\mathbf{x}}) \in \alpha\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} \subset \alpha\mathbf{P}$.

Věta 12:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Nechť $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}, \mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{V}$, $\{\mathbf{P}_i | i \in \mathbf{J}\}$ je neprázdný systém podprostorů, přičemž množina $\mathbf{J}\neq \emptyset$. Potom platí:
(1) $\mathbf{P}+\mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{V}$,
(2) $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ je direktní, právě když $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$,
(3) $\bigcap\limits_{i\in\mathbf{J}} \mathbf{P}_i \subset\subset \mathbf{V}$,
(4) $\dim\mathbf{P}\leq\dim\mathbf{V}$; Je-li $\mathbf{P}$ vlastní podprostor a $\dim\mathbf{V}< \infty$, je $\dim\mathbf{P}<\dim\mathbf{V}$.

Důkaz:
(1) Jasně $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ je neprázdná množina, neboť $\mathbf{P}\neq\emptyset$ i $\mathbf{Q}\neq\emptyset$.
Zbývá tedy dokázat inkluze $(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\subset\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ a $\mathbf{T}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\subset\mathbf{P}+\mathbf{Q}$.
Použijeme-li důsledků věty 11, zjistíme, že platí dokonce víc:
$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=(\mathbf{P}+\mathbf{P})+(\mathbf{Q}+\mathbf{Q})=\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ a
$\mathbf{T}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\subset\mathbf{TP}+\mathbf{TQ}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}$.
(2) (sporem)
(a) Nechť $\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{P}\oplus\mathbf{Q}$ a přitom existuje vektor $\vec{\mathbf{a}}\neq\vec{\mathbf{o}}$ tak, že $\vec{\mathbf{a}}\in\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$.
Platí $\vec{\mathbf{a}}\in\mathbf{P}$ a zároveň $\vec{\mathbf{a}}\in\mathbf{Q}$, a tedy i $-\vec{\mathbf{a}}\in\mathbf{Q}$. Vektor $\vec{\mathbf{o}}$ je v prostoru $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ a lze ho dvojím způsobem vyjádřit jako součet vektorů z $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$,
$\vec{\mathbf{o}}=\vec{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{o}}$ resp. $\vec{\mathbf{o}}=\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{a}})$.
Což je spor s direktností součtu.
(b) Nechť $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$ a přitom $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ není direktní. Pak existuje vektor $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbf{P}+\mathbf{Q}$, který lze psát dvojím způsobem ve tvaru součtu, tj.
$\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{a}}_1+\vec{\mathbf{b}}_1$ resp. $\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{a}}_2+\vec{\mathbf{b}}_2$, kde $\vec{\mathbf{a}}_i\in\mathbf{P}$, $\vec{\mathbf{b}}_i\in\mathbf{Q}$ pro i=1,2 a $\vec{\mathbf{a}}_1\neq\vec{\mathbf{a}}_2$ nebo $\vec{\mathbf{b}}_1\neq\vec{\mathbf{b}}_2$.
Platí rovnost $\vec{\mathbf{a}}_1-\vec{\mathbf{a}}_2=\vec{\mathbf{b}}_2-\vec{\mathbf{b}}_1$.
Vektor na levé straně rovnítka je z $\mathbf{P}$, vektor napravo je z $\mathbf{Q}$. Jsou tedy oba z $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$, a proto jsou oba rovny nule.
Platí proto $\vec{\mathbf{a}}_1=\vec{\mathbf{a}}_2$ a $\vec{\mathbf{b}}_1=\vec{\mathbf{b}}_2$, což je spor.
(3) Označme $\mathbf{A}=\bigcap\limits_{i\in\mathbf{J}}\mathbf{P}_i$.
Pro všechna $i\in\mathbf{J}$ platí $\mathbf{A}\subset\mathbf{P}_i$, a tedy i následující implikace:
$\mathbf{A}+\mathbf{A}\subset\mathbf{P}_i+\mathbf{P}_i\subset\mathbf{P}_i\Longrightarrow\mathbf{A}+\mathbf{A}\subset\mathbf{A}$,
$\mathbf{TA}\subset\mathbf{TP}_i\subset\mathbf{P}_i\Longrightarrow\mathbf{TA}\subset\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}$ je tedy podprostor.
(4) Je-li dim$\mathbf{V}=\infty$ nebo dim$\mathbf{V}=0$, je nerovnost dim$\mathbf{P}\leq$dim$\mathbf{V}$ zřejmá.
Nechť dim$\mathbf{V}=n$, kde $n\in\mathbf{N}$.
Je-li $\mathbf{P}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$ je nerovnost opět zřejmá.
Je-li $\mathbf{P}\neq\{\vec{\mathbf{o}}\}$, nemůže v $\mathbf{P}$ existovat více než n LN vektorů, neboť ani ve $\mathbf{V}$ nemůže existovat více než n LN vektorů. Je proto dim$\mathbf{P}\leq n$.
Nechť $\mathbf{P}$ je navíc vlastní podprostor, tj. $\mathbf{P}\neq\mathbf{V}$.
Je-li $\mathbf{P}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$ platí ostrá nerovnost jasně.
Nechť dim$\mathbf{P}=k\neq 0\Longrightarrow$ existuje k LN vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)}$ tak, že $\mathbf{P}=[\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\lambda$, a protože $\mathbf{P}\neq\mathbf{V}$, zcela jistě existuje vektor
$\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}\in\mathbf{V}$, pro který $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)}\notin\mathbf{P}$.
Z věty 4 vyplývá, že soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)})$ je LN.
Tedy dim$\mathbf{V}\geq k+1$.

Věta 13:(První věta o dimenzi)
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Nechť $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$, $\mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{V}$, dim$\mathbf{P}<\infty$, dim$\mathbf{Q}<\infty$.
Potom platí
dim$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$+dim$(\mathbf{P}\cap\mathbf{Q})$=dim$\mathbf{P}$+dim$\mathbf{Q}$.

Důsledek:
Pokud součet $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ je direktní, platí dim$\mathbf{P}\oplus\mathbf{Q}$=dim$\mathbf{P}$+dim$\mathbf{Q}$.

Důkaz:
1) Je-li $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{Q}$ nebo $\mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{P}$, věta jasně platí, neboť např. $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{Q}$ implikuje $\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\mathbf{P}$.

2) Nechť nenastává případ 1).
Označme dim$\mathbf{P}=m$ a dim$\mathbf{Q}=n$. Důkaz provedeme zvlášť pro případ $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}\neq\{\vec{\mathbf{o}}\}$ a pro případ $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$.
(a) Nechť $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}\neq\{\vec{\mathbf{o}}\}$. Označme dim$\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=s\neq 0$.
Podle třetího tvrzení věty 12 víme, že $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{V}$. Nechť soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(s)})$ je báze $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$.
Podle věty 9 můžeme tento soubor doplnit na bázi
$\mathcal{X}_1=(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(s)},\vec{\mathbf{x}}^{(s+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m)})$ podprostoru $\mathbf{P}$ a rovněž ho můžeme doplnit na bázi $\mathcal{X}_2=(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(s)},\vec{\mathbf{x}}^{(m+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m+n-s)})$ podprostoru $\mathbf{Q}$.
Nyní stačí dokázat, že soubor
$\mathcal{X}=(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(s)},\vec{\mathbf{x}}^{(s+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m)},\vec{\mathbf{x}}^{(m+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m+n-s)})$
je báze $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$. Z toho totiž plyne dim$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=m+n-s$,
tj. dim$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})$=dim$\mathbf{P}$+dim$\mathbf{Q}$-dim$(\mathbf{P}\cap\mathbf{Q})$.

Je pravda, že soubor $\mathcal{X}$ generuje $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$?
Ano, neboť každý vektor $\vec{\mathbf{x}}$ z $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ je součtem nějakého vektoru $\vec{\mathbf{y}}$ z $\mathbf{P}$ a nějakého vektoru $\vec{\mathbf{z}}$ z $\mathbf{Q}$. Je tedy součtem nějaké lineární kombinace souboru $\mathcal{X}_1$ a nějaké lineární kombinace souboru $\mathcal{X}_2$. Celkově je tedy lineární kombinací souboru $\mathcal{X}$.

Je soubor $\mathcal{X}$ LN ?
Nechť platí $\sum\limits_{i=1}^{m+n-s}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{o}}$.
Z toho plyne

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=-\sum_{i=m+1}^{m+n-s}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}. \qquad (\star)$$

Vektor na levé straně rovnítka je z podprostoru $\mathbf{P}$, vektor nalevo z $\mathbf{Q}$. Oba vektory jsou tedy z $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$. Proto existuje s-tice čísel $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ tak, že např.

$$-\sum_{i=m+1}^{m+n-s}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\sum_{i=1}^{s}\beta_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}\iff\sum_{i=1}^{s}\beta_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}+\sum_{i=m+1}^{m+n-s}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{o}}.$$

Protože soubor $\mathcal{X}_2$ je LN, plyne z toho, že $\alpha_{m+1}=\alpha_{m+2}=\ldots=\alpha_{m+n-s}=0$.
Z těchto rovností, rovnosti $(\star)$ a lineární nezávislosti $\mathcal{X}_1$ plyne
$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$.
Soubor $\mathcal{X}$ je tedy LN.

(b) Nechť $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$, tj. dim$(\mathbf{P}\cap\mathbf{Q})=0$.
Nechť $\mathcal{X}_1=(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m)})$ je báze $\mathbf{P}$ a $\mathcal{X}_2=(\vec{\mathbf{x}}^{(m+1)},\vec{\mathbf{x}}^{(m+2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m+n)})$ je báze $\mathbf{Q}$.
Soubor $\mathcal{X}=(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m)},\vec{\mathbf{x}}^{(m+1)},\vec{\mathbf{x}}^{(m+2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(m+n)})$ generuje prostor $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ ze stejných důvodů jako v případě (a).
Dokážeme, že je LN.
Platí-li $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}+\sum\limits_{i=m+1}^{m+n}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{o}}$, platí i $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=-\sum\limits_{i=m+1}^{m+n}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Vektor na levé straně poslední rovnosti je z $\mathbf{P}$, vektor napravo je z $\mathbf{Q}$. Jsou tedy oba z $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$, ale v $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}$ leží pouze vektor $\vec{\mathbf{o}}$.
Soubory $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ jsou LN a tedy
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ a také $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_n = 0$.
Soubor $\mathcal{X}$ je tedy báze $\mathbf{P}$+$\mathbf{Q}$, a proto dim($\mathbf{P}$+$\mathbf{Q}$)=$m + n$=dim$\mathbf{P}$+dim$\mathbf{Q}$.

Věta 14:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z $\mathbf{V}$. Označme $\mathbf{P}=[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$. Potom:
(1) $\mathbf{P}\subset\subset\mathbf{V}$,
(2) dim$\mathbf{P}\leq n$; dim$\mathbf{P}= n \Longleftrightarrow (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN,
(3) $\mathbf{P}= \bigcap\limits_{\substack{\mathbf{Q}\subset\subset\mathbf{V} \\ \{\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}\}\subset\mathbf{Q}}} \mathbf{Q}$

Důkaz:
(1) Snadno ověříme, že $\mathbf{P}+\mathbf{P}\subset\mathbf{P}$ i $\mathbf{TP}\subset\mathbf{P}$.
(2) V $\mathbf{P}$ není jistě více než n LN vektorů podle Steinitzovy věty $\Rightarrow$ dim$\mathbf{P}\leq n$.
Z téhož faktu plyne, že když $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN, je dim$\mathbf{P}= n$.
Naopak, je-li $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ LZ, lze jeden z vektorů vyškrtnout a soubor generující $\mathbf{P}$ se zmenší.
(3) Dokazujeme rovnost množin, a tedy 2 inkluze:
(a) Je-li $\vec{\mathbf{x}} \in\mathbf{P}$, je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$, a proto leží i v každém podprostoru $\mathbf{Q}$, který všechny tyto vektory obsahuje.
Je tedy $\mathbf{P}\subset \bigcap\mathbf{Q}$.
(b) Opačná inkluze plyne z faktu, že $\mathbf{P}$ je sám podprostorem obsahujícím vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}$.

Lineární zobrazení

V dalším výkladu budou všechny vektorové prostory konečné dimenze, i když většina pojmů a vět se užívá i v případě dimenze nekonečné.
Použiji-li pro prostor označení např. $\mathbf{P}_n$, míním tím, že prostor má dimenzi n, kde $n \in \mathbf{N}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$.
Zobrazení $\mathcal{A}$:$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ se nazývá **lineární** (homomorfní) , právě když platí:
(1) pro každé $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}$ je $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{A}(\vec{\mathbf{y}})$, (zobrazení je **aditivní**)
(2) pro každé $\alpha \in \mathbf{T}$ a $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$ je $\mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}})$. (zobrazení je **homogenní**)
Množinu všech lineárních zobrazení $\mathbf{P}$ do $\mathbf{Q}$ značíme $\mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.
Jsou-li $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ a $\alpha \in \mathbf{T}$, nazveme
(a) **součtem zobrazení** $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ zobrazení definované vztahem
$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{B}(\vec{\mathbf{x}}) \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$,
(b) **násobkem zobrazení** $\mathcal{A}$ číslem α zobrazení definované vztahem
$(\alpha\mathcal{A})(\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}) \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$.
Zobrazení $\mathcal{O}$ definované vztahem $\mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{o}} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$, se nazývá **nulové zobrazení**.

Poznámky:
1) Snadno se dokáže, že nulové zobrazení je lineární zobrazení. Skutečně
$\mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{o}} = \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(\vec{\mathbf{y}}), \qquad \mathcal{O}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{o}} = \alpha\mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}})$.
Stejně snadno zjistíme, že při naší definici je $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$
a $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Je zřejmé, že $\mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ s takto zavedenými operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.
2) Pro libovolné lineární zobrazení $\mathcal{A}$ platí $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{o}}) = \vec{\mathbf{o}}$, neboť
$\mathcal{A}(\vec{\mathbf{o}}) = \mathcal{A}(0\vec{\mathbf{x}}) = 0\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}})$ (jen je třeba pečlivě rozlišovat mezi nulovým vektorem $\vec{\mathbf{o}}$ v prostoru $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$).
3) Budeme užívat zkráceného označení $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}$.
Použiji-li někde symbol $\mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, říkám tím implicitně, že $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad **stejným** tělesem $\mathbf{T}$.

Definice:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.
(1) Lineární zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ nazýváme **lineární operátor** a množinu lineárních operátorů značíme $\mathcal{L}(\mathbf{V})$.
(2) Lineární zobrazení $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{T})$ nazýváme **lineární funkcionál** a množinu lineárních funkcionálů značíme $\mathbf{V}^{\#}$. Jak víme, je to vektorový prostor a nazveme ho **prostor duální** k prostoru $\mathbf{V}$.

Příklady:
(1) Operátor $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ definovaný vztahem
$\mathcal{I}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}} \qquad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}$ se nazývá **identický operátor**.
(2) Je-li ve $\mathbf{V}_n$ dána báze $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$, jsou souřadnicové funkcionály $\vec{\mathbf{x}}^{(1)\#}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)\#}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)\#}$ definované ve větě a definici 10 **lineární funkcionály** z

$\mathbf{V}_n{}^{\#}$.
(3) Definujeme-li zobrazení $\mathcal{A} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{T}^n$ vztahem $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$ (viz věta a definice 10), pak $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \mathbf{T}^n)$.

Definice:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Pak:
(1) Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ prosté, říkáme, že je **monomorfní**.
(2) Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ zobrazení $\mathbf{P}$ **„na“** $\mathbf{Q}$, říkáme, že je **epimorfní**.
(3) Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ monomorfní i epimorfní, říkáme, že je **izomorfní** (nebo že je to **izomorfizmus**).
(4) Je-li $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P})$ izomorfní, říkáme, že $\mathcal{A}$ je **regulární operátor**.

Příklad:
Nechť je dán prostor $\mathbf{V}_n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je jeho báze. Zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \mathbf{T}^n)$ definované vztahem $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$ je **izomorfizmus**, neboť je **„prosté“** a **„na“**.

Skutečně, každá n-tice $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ má jediný vzor $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a naopak, každý vektor $\vec{\mathbf{x}}$ má jedinou n-tici souřadnic v bázi $\mathcal{X}$. Právě definovanému zobrazení říkáme **souřadnicový izomorfizmus v bázi $\mathcal{X}$**.

Věta 15:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathcal{A}$:$\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}$ je izomorfizmus. Pak existuje inverzní zobrazení $\mathcal{A}^{-1}$:$\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$, které je také izomorfizmus.
Důkaz:
Uvědomíme si, co máme dokázat. Jde o implikaci:
Je-li $\mathcal{A}$ **lineární prosté** zobrazení **P na Q** $\Longrightarrow$

1. existuje $\mathcal{A}^{-1}$:$\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$,
2. $\mathcal{A}^{-1}$ je
   (a) aditivní,
   (b) homogenní,
   (c) prosté,
   (d) na.

1. $\mathcal{A}$ je prosté a na, tedy nejenže každý vektor z $\mathbf{P}$ má nějaký obraz v $\mathbf{Q}$, ale také pro každý $\vec{\mathbf{x}} \in\mathbf{Q}$ existuje právě jeden vektor $\vec{\mathbf{y}} \in\mathbf{P}$ tak, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}}$. Tento vektor $\vec{\mathbf{y}}$ značíme $\mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$.
   Tím je definováno zobrazení $\mathcal{A}^{-1}$:$\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{P}$. Pro další úvahy je důležité si uvědomovat ekvivalenci $\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{x}} \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{y}} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$.
2. (a) Nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}$ jsou dva vektory z $\mathbf{Q}$. Označme $\vec{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\vec{\mathbf{y}}^{(2)} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$. Z definice inverzního zobrazení plyne
   $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}^{(2)}$. Tedy platí rovnosti
   $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \vec{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}^{(1)} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}^{(2)} = \mathcal{A}(\vec{\mathbf{y}}^{(1)} + \vec{\mathbf{y}}^{(2)})$. Z porovnání prvního a

posledního výrazu plyne
$\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \vec{\mathbf{x}}^{(2)}) = \vec{\mathbf{y}}^{(1)} + \vec{\mathbf{y}}^{(2)} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$.

(b) Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}$ a $\alpha \in \mathbf{T}$. Označme $\vec{\mathbf{y}} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$. Z toho plyne $\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}$. Platí $\alpha\vec{\mathbf{x}} = \alpha\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{y}})$. Porovnáním krajních výrazů dostaneme $\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\vec{\mathbf{y}} = \alpha\mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}$.

(c) Nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}$ jsou dva vektory z $\mathbf{Q}$. Máme dokázat implikaci: $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{x}}^{(2)} \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$.
Důkaz povedeme sporem.
Nechť $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{x}}^{(2)}$ a $\mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$.
Označme $\vec{\mathbf{y}} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$. Z definice invezního zobrazení plyne $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}$, a tedy $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \vec{\mathbf{x}}^{(2)}$. Což je spor.

(d) Máme dokázat, že pro každý vektor $\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}$ existuje $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}$ tak, že $\mathcal{A}^{-1}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$. Z definice inverzního zobrazení je zřejmé, že tomu vyhovuje vektor $\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}}$.

Věta 16:
Nechť $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{V}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{Q},\mathbf{V})$ a $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Složené zobrazení $\mathcal{AB}$ je definováno vztahem

$$(\mathcal{AB})\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}) \qquad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}.$$

Platí $\mathcal{AB} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{V})$.

Důkaz:
Je zřejmé, že $\mathcal{AB}$ je zobrazení $\mathbf{P}$ do $\mathbf{Q}$. Zbývá dokázat, že je aditivní a homogenní.
(a) Je-li $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}$, pak
$(\mathcal{AB})(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{B}\vec{\mathbf{y}}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{y}}) =$
$= (\mathcal{AB})\vec{\mathbf{x}} + (\mathcal{AB})\vec{\mathbf{y}}$.
(b) Je-li $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$ a $\alpha \in \mathbf{T}$, pak
$(\mathcal{AB})(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha\vec{\mathbf{x}})) = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}) = \alpha(\mathcal{AB})\vec{\mathbf{x}}$.

Označení:
Nechť $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Nechť $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$ a $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Označíme
$\mathcal{A}(\mathbf{M}) = \{\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{M}\}$ a $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{N}) = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P} \mid \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{N}\}$.
Speciálně v případě, že $\mathbf{N}=\{\vec{\mathbf{x}}\}$, značíme $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}^{-1}(\{\vec{\mathbf{x}}\})$.
Množinu $\mathcal{A}(\mathbf{M})$ nazýváme **obraz množiny M** a množinu $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{N})$ nazýváme **vzor množiny N**.
Poznámka:
Pečlivě si rozmyslete význam symbolu $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{N})$ (je to **množina** jakýchsi vektorů) a symbolu $\mathcal{A}^{-1}$ (je to **zobrazení**). Tyto symboly nemají příliš mnoho společného. Zatímco množina $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{N})$ existuje vždy (někdy je ovšem prázdná), zobrazení $\mathcal{A}^{-1}$ rozhodně vždy existovat nemusí.

Věta 17:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Pak,
(1) je-li $\mathbf{P}_1 \subset\subset \mathbf{P}$, je $\mathcal{A}(\mathbf{P}_1) \subset\subset \mathbf{Q}$
(2) je-li $\mathbf{Q}_1 \subset\subset \mathbf{Q}$, je $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1) \subset\subset \mathbf{P}$
(tj. obraz podprostoru je podprostor a vzor podprostoru je podprostor).
Důkaz:
(1) Jasně $\mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$ není prázdná množina, neboť $\vec{\mathbf{o}} \in \mathbf{P}_1$ a tedy
$\mathcal{A}\vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$. Stačí tedy dokázat $\mathcal{A}(\mathbf{P}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{P}_1) \subset \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$
a $\mathbf{T}\mathcal{A}(\mathbf{P}_1) \subset \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$.
Nechť $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$. Potom existují vektory $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}_1$, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{u}}$ a $\mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{v}}$. Platí $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}})$. Neboť $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{P}_1$, je tedy $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$, a proto $\mathcal{A}(\mathbf{P}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{P}_1) \subset \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$.
Stejně, je-li $\vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$ a $\alpha \in \mathbf{T}$, existuje $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_1$, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{u}}$.
Platí $\alpha\vec{\mathbf{u}} = \alpha\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}})$. Neboť $\alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_1$, je tedy $\alpha\vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$, a proto $\mathbf{T}\mathcal{A}(\mathbf{P}_1) \subset \mathcal{A}(\mathbf{P}_1)$.
(2) Zřejmě $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1) \neq \emptyset$. Platí totiž $\vec{\mathbf{o}} \in \mathbf{Q}_1$ a $\vec{\mathbf{o}} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{o}})$.
(Uvědomte si, že ve vztahu $\vec{\mathbf{o}} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{o}})$ je nalevo nulový vektor z $\mathbf{P}$, zatímco napravo je nulový vektor z $\mathbf{Q}$, resp. z $\mathbf{Q}_1$).
Proto je také $\vec{\mathbf{o}} \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$, tj. $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{Q}_1$.

Z toho plyne $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{Q}_1$ a tedy $\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$.
Proto platí $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1) \subset \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$.
Nechť $\alpha \in \mathbf{T}$ a $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$, tj. $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}_1$. Platí $\mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}_1$.
Proto $\alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$ a z toho plyne $\mathbf{T}\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1) \subset \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{Q}_1)$.

Definice:
Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Číslo dim$\mathcal{A}(\mathbf{P})$ nazýváme **hodnost zobrazení** $\mathcal{A}$ a značíme $h(\mathcal{A})$.
Množinu $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{o}})$ značíme $ker\mathcal{A}$ a nazýváme **jádro zobrazení** $\mathcal{A}$.
Číslo dim$ker\mathcal{A}$ nazýváme **defekt zobrazení** $\mathcal{A}$ a značíme $d(\mathcal{A})$.

Věta 18:
Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Pak $\mathcal{A}$ je prosté tehdy a jen tehdy, jestliže v jeho jádru leží jen nulový vektor (tj. když $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}\}$).

Důkaz:(sporem)
V důkazu budu u nulových vektorů indexem naznačovat, z kterého prostoru jsou.
1) Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ je prosté a zaroveň $ker\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}) \neq \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$.
Vektor $\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}$ leží zcela jistě v $ker\mathcal{A}$, neboť $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}) = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$. Z našeho druhého předpokladu plyne, že v $ker\mathcal{A}$ musí ležet ještě jiný vektor $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}$. Pro něj tedy také platí $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$. To je ovšem spor s prvním předpokladem, neboť $\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$ má dva vzory.
2)Nechť $ker\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}) = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$ a zároveň $\mathcal{A}$ není prosté.
Existují tudíž dva vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} \neq \vec{\mathbf{x}}^{(2)}$ z prostoru $\mathbf{P}$ tak, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}$.
Je proto $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}^{(2)}) = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$, přičemž $\vec{\mathbf{x}}^{(1)} - \vec{\mathbf{x}}^{(2)} \neq \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}$.
To je spor s předpokladem $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$.

Věta 19:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{P}$ a nechť $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je soubor vektorů z $\mathbf{Q}$.
Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ tak, že
$\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \qquad \forall i \in \hat{n}$.

Důkaz:
Definujme zobrazení $\mathcal{A}$ takto:
Pro libovolný vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}$, $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ definujeme $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$, a tedy speciálně $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$.
Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je aditivní.
Je-li $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$, $\vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ je $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.
Z definice zobrazení $\mathcal{A}$ vyplývá
$\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$, $\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$ a $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{z}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$.
Je tedy $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{z}}) = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}$.
Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je homogenní.
Je-li $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a $\alpha \in \mathbf{T}$ je $\alpha\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Z definice zobrazení $\mathcal{A}$ vyplývá
$\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$ a $\mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$. Je tedy $\mathcal{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}$.
Jednoznačnost zobrazení $\mathcal{A}$ dokážeme sporem.
Nechť zobrazení $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ má rovněž vlastnost $\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \quad \forall i \in \hat{n}$
a přitom $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, tj. existuje vektor $\vec{\mathbf{z}} \in \mathbf{P}$ tak, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}} \neq \mathcal{B}\vec{\mathbf{z}}$.
Nechť $\vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.
Zobrazení $\mathcal{B}$ je lineární, a tedy $\mathcal{B}\vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$. Podle definice zobrazení $\mathcal{A}$ je ovšem také $\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$. A to je spor.

Věta 20:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ a $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je soubor vektorů z $\mathbf{P}$. Potom $\mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda) = [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$
(tj. obraz lineárního obalu je lineární obal obrazů generátorů).

Důkaz:
Dokazujeme rovnost dvou množin, a tedy dvě inkluze.

(a) $\subset$
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda)$. $\quad\Longrightarrow$
$\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(\alpha_1\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \alpha_n\vec{\mathbf{x}}^{(n)}) = \alpha_1\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)} + \alpha_2\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)} + \ldots + \alpha_n\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$,
a proto $\vec{\mathbf{x}} \in [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
(b) $\supset$
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$. $\quad\Longrightarrow$
$\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}) \in \mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda)$.

Věta 21:
Nechť **P** a **Q** jsou vektorové prostory nad **T**. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ a $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}(\mathbf{P})$.
Nechť $\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{b}})$ (tj. $\mathcal{A}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$).
Potom platí $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} + ker\mathcal{A}$.

Poznámka:
Uvědomíme-li si, že množina $\mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{b}})$ je množina vektorů $\vec{\mathbf{x}}$, pro které $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, vidíme, že věta říká, jak vypadá množina řešení rovnice $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$. Tato množina je součtem množiny řešení rovnice $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$ (to je $ker\mathcal{A}$) a jednoho, pevně zvoleného řešení $\vec{\mathbf{a}}$ (tomu se obvykle říká **partikulární řešení**).

Důkaz:
(a) $\subset$
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{b}}) \Longleftrightarrow \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.
Označme $\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}} \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{z}}$. Protože $\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} - \mathcal{A}\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$ je $\vec{\mathbf{z}} \in ker\mathcal{A}$, a proto $\vec{\mathbf{x}} \in \vec{\mathbf{a}} + ker\mathcal{A}$.
(b) $\supset$
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in \vec{\mathbf{a}} + ker\mathcal{A}$. Existuje tedy $\vec{\mathbf{z}} \in ker\mathcal{A}$ tak, že $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{z}}$. Jasně platí $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{a}} + \mathcal{A}\vec{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{b}}$, a proto $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}^{-1}(\vec{\mathbf{b}})$.

Definice:
Nechť **P** a **Q** jsou vektorové prostory nad **T**. Existuje-li izomorfní zobrazení $\mathbf{P}\to\mathbf{Q}$, říkáme, že prostory **P** a **Q** jsou **izomorfní** a značíme to $\mathbf{P}\cong\mathbf{Q}$.

Poznámka:
Tento pojem se zavádí i pro prostory, které nemají konečnou dimenzi. U našich prostorů, které konečnou dimenzi mají, se dá velice snadno poznat, že jsou izomorfní, podle následující věty.

Věta 22:
Nechť **P** a **Q** jsou vektorové prostory nad **T**. Pak $\mathbf{P}\cong\mathbf{Q}$, právě když
dim $\mathbf{P}$=dim $\mathbf{Q}$.

Důkaz:
(a) Nechť $\mathbf{P}\cong\mathbf{Q} \Longleftrightarrow$
existuje $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ tak, že $\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$ a $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$ (viz věta 18).
Označme dim $\mathbf{P}=n$.

1) Je-li n=0 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{P} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$.
Pak $\mathbf{Q}$=$\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}(\{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}) = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$. Z toho plyne dim $\mathbf{P}$=0=dim $\mathbf{Q}$.
2) Nechť $n \neq 0$ a $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{P}$, tj. $\mathbf{P}$= $[\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
Pak $\mathbf{Q}$=$\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda)$= $[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
Dokážeme-li, že soubor $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN, bude to báze $\mathbf{Q}$, a tudíž bude dim $\mathbf{Q}$=n.
Tvrzení dokážeme sporem. Je-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nenulová n-tice čísel taková, že $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$, je také $\mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$,
a protože $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$, je $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}$.
To je spor s lineární nezávislostí souboru $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$.

(b) Nechť dim $\mathbf{P}$=dim $\mathbf{Q}$=n.

1) Nechť $n = 0$, tj. $\mathbf{P} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$, $\mathbf{Q} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}\}$.
Hledané izomorfní zobrazení $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{Q}$ je zobrazení $\mathcal{A}$ definované vztahem $\mathcal{A}\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P} = \vec{\mathbf{o}}_\mathbf{Q}$.
2) Nechť $n \neq 0$, $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{P}$ a $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{Q}$.
Podle věty 19 existuje právě jedno zobrazení $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ takové, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{y}}^{(i)}, \qquad \forall i \in \hat{n}$.
Dokážeme, že je to izomorfizmus $\mathbf{P}$ na $\mathbf{Q}$.
α) Je $\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$ **?**
$\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda)$= $[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$=$\mathbf{Q}$ a tedy zobrazení $\mathcal{A}$ je **na**.
β) Je $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}_\mathbf{P}\}$ **?**
Dokážeme sporem. Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in ker\mathcal{A}$ a $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$.
Na jedné straně, neboť $\vec{\mathbf{x}} \in\mathbf{P}$ a $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$, je $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a existuje index $j \in \hat{n}$, že $\alpha_j \neq 0$.
Na druhé straně, neboť $\vec{\mathbf{x}} \in ker\mathcal{A}$, platí $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, a tedy
$\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$
$\Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \hat{n}$ vzhledem k lineární nezávislosti souboru $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$.
To je spor, a tudíž $\mathcal{A}$ je **prosté**.

Důsledek:
Nechť $\mathbf{V}_n$ je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbf{N}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom $\mathbf{V}_n \cong \mathbf{T}^n$.

Poznámka:
Toto tvrzení je nám již známo. Dokonce víme, že, zvolíme-li ve $\mathbf{V}_n$ bázi $\mathcal{X}$, izomorfizmus $\mathcal{A}$ zobrazující $\mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{T}^n$ je známý **souřadnicový izomorfizmus** definovaný vztahem $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{x}}) = (\vec{\mathbf{x}})_\mathcal{X}$.

Věta 23:
Nechť $\mathbf{P}_n$ a $\mathbf{Q}_n$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$ stejné dimenze $n \in \mathbf{N}$. Nechť

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n)$.
Pak $\mathcal{A}$ je izomorfní, právě když je monomorfní nebo epimorfní.
Poznámka:
Je jasné, že věta platí speciálně i pro operátory z $\mathcal{L}(\mathbf{P}_n)$.

Důkaz:
(1) Nechť $\mathcal{A}$ je izomorfizmus. Pak obě vlastnosti plynou přímo z definice.
(2) Nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{P}_n$. Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je monomorfní, právě když je epimorfní.

a) Nechť $\mathcal{A}$ je monomorfní $\Leftrightarrow$ $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}\}$.
Ukážeme, že soubor $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je LN. Nechť
$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}} \Rightarrow \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}) = \vec{\mathbf{o}}$. Z předpokladu
$ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}\} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$ a z lineární nezávislosti $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)})$
vyplývá $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Soubor $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$
je tedy lineárně nezávislý soubor z $\mathbf{Q}_n \Rightarrow$ je to báze $\mathbf{Q}_n \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{P}_n) =$
$\mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda) = [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda = \mathbf{Q}_n$.
Zobrazení $\mathcal{A}$ je tedy epimorfní.
b) Nechť $\mathcal{A}$ je epimorfní $\Leftrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{P}_n) = \mathbf{Q}_n$.
Chceme dokázat $ker\mathcal{A} = \{\vec{\mathbf{o}}\}$. Důkaz provedeme sporem.
Nechť $\vec{\mathbf{x}} \in ker\mathcal{A} \bigwedge \vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$. Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$. Platí
$\mathbf{Q}_n = \mathcal{A}(\mathbf{P}_n) = \mathcal{A}([\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda) = [\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$.
Z toho plyne, že soubor $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ musí být LN, neboť jinak by dim $\mathbf{Q}_n < n$.
Platí $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$ (neboť $\vec{\mathbf{x}} \in ker\mathcal{A}$).
Z lineární nezávislosti $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ plyne
$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, což je spor.

Věta a definice 24:
Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor (konečné dimenze) nad tělesem $\mathbf{T}$. Nechť
$\mathbf{P} \subset\subset \mathbf{V}$. Pak existuje $\mathbf{Q} \subset\subset \mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{V}$=$\mathbf{P}\oplus\mathbf{Q}$.
Podprostor $\mathbf{Q}$ nazýváme **doplněk podprostoru P do V** a číslo dim $\mathbf{Q}$ nazýváme **kodimenze P** a značíme codim $\mathbf{P}$.
Pro libovolný doplněk $\mathbf{P}$ do $\mathbf{V}$ platí dim $\mathbf{V}$=dim $\mathbf{P}$+dim $\mathbf{Q}$,
tj. dim $\mathbf{V}$=dim $\mathbf{P}$+codim $\mathbf{P}$.

Poznámka:
Všimněte si, že zatímco doplněk $\mathbf{P}$ do $\mathbf{V}$ není dán jednoznačně, kodimenze codim $\mathbf{P}$ jednoznačně dána je (podle 1. věty o dimenzi). V důkazu věty bude tedy třeba doplněk pouze najít a tvrzení o dimenzích jsou zřejmá.

Důkaz:
Když dim $\mathbf{V}$=0, pak jediná možnost je $\mathbf{V}$=$\mathbf{P}$=$\mathbf{Q}$=$\{\vec{\mathbf{o}}\}$ a věta platí. Nechť tedy v dalším je dim $\mathbf{V}$=$n \in \mathbf{N}$.

1) Když dim $\mathbf{P}$=0, je jediná možnost $\mathbf{Q}$=$\mathbf{V}$, neboť $\mathbf{V}=\{\vec{\mathbf{o}}\}\oplus\mathbf{V}$.

2) Nechť dim $\mathbf{P}=k<n$, $k\neq 0$, nechť $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je báze $\mathbf{P}$. Podle věty 9 existují vektory $\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)}$ tak, že
$(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{V}$.
Dokážeme, že podprostor $\mathbf{Q}=[\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)}]_\lambda$ je doplněk $\mathbf{P}$ do $\mathbf{V}$, tj., že platí $\mathbf{V}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ a zároveň $\mathbf{P}\cap\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$.
První rovnost vyplývá z toho, že soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)},\vec{\mathbf{x}}^{(k+1)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{V}$, a druhá z toho, že tento soubor je LN.

3) Je-li dim $\mathbf{P}=n$, je nutně $\mathbf{Q}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$.

Věta 25:
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$. Pak $h(\mathcal{A})\leq$dim $\mathbf{P}$ a $h(\mathcal{A})\leq$dim $\mathbf{Q}$.

Důkaz:
a) $h(\mathcal{A})$=dim $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ a $\mathcal{A}(\mathbf{P})\subset\subset\mathbf{Q}\Longrightarrow h(\mathcal{A})\leq$dim $\mathbf{Q}$.
b) Pokud dim $\mathbf{P}$=0, je $\mathcal{A}(\mathbf{P})=\{\vec{\mathbf{o}}\}$ a nerovnost $h(\mathcal{A})\leq$dim $\mathbf{P}$ je jasná.
Nechť dim $\mathbf{P}=n\neq 0$ a $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{P}$.
Pak $\mathcal{A}(\mathbf{P})=[\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(n)})]_\lambda\Longrightarrow h(\mathcal{A})=$dim $\mathcal{A}(\mathbf{P})\leq n=$dim $\mathbf{P}$.

Věta 26: (2. věta o dimenzi)
Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$
(dim $\mathbf{P}<\infty$).
Potom $h(\mathcal{A})+d(\mathcal{A})=$dim $\mathbf{P}$.

Důkaz:
a) Když $h(\mathcal{A})=0$, tj. $\mathcal{A}(\mathbf{P})=\{\vec{\mathbf{o}}\}$, je $ker\mathcal{A}=\mathbf{P}\Longrightarrow d(\mathcal{A})$=dim $\mathbf{P}$ a rovnost jasně platí.

b) Nechť $h(\mathcal{A})=k\in\mathbf{N}$, tj. dim $\mathcal{A}(\mathbf{P})=k$. Nechť $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)},\vec{\mathbf{y}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{y}}^{(k)})$ je báze $\mathcal{A}(\mathbf{P})$.
Existuje soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ tak, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{y}}^{(i)},\forall i\in\hat{k}$.
Soubor $(\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)})$ je LN (neboť platí implikace
$\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{\mathbf{x}}^{(i)}=\vec{\mathbf{o}}\Longrightarrow\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{\mathbf{y}}^{(i)}=\vec{\mathbf{o}}\Longrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$).
Označme $\tilde{\mathbf{P}}=[\vec{\mathbf{x}}^{(1)},\vec{\mathbf{x}}^{(2)},\ldots,\vec{\mathbf{x}}^{(k)}]_\lambda$.
Zřejmě platí dim $\tilde{\mathbf{P}}=k=$dim $\mathcal{A}(\mathbf{P})=h(\mathcal{A})$.
Stačí dokázat $\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}\oplus ker\mathcal{A}$, neboť z toho vyplyne dim $\mathbf{P}=h(\mathcal{A})+d(\mathcal{A})$.
K tomu je třeba se přesvědčit, že
1) $\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}+ker\mathcal{A}$ a 2) $\tilde{\mathbf{P}}\cap ker\mathcal{A}=\{\vec{\mathbf{o}}\}$.

ad 1) Dokazujeme rovnost množin $\mathbf{P}=\tilde{\mathbf{P}}+ker\mathcal{A}$.
Inkluze $\supset$ je jasná, neboť $\tilde{\mathbf{P}}\subset\subset\mathbf{P}$ a $ker\mathcal{A}\subset\subset\mathbf{P}$.
Dokážeme inkluzi $\subset$.
Nechť $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbf{P}\Longrightarrow\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}\in\mathcal{A}(\mathbf{P})\Longrightarrow$ existují koeficienty $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ tak, že $\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{\mathbf{y}}^{(i)}$.

Označme $\vec{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$ a $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)}$.

Zřejmě $\vec{\mathbf{p}} \in \mathbf{P}$, a protože $\mathcal{A}\vec{\mathbf{q}} = \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$, je $\vec{\mathbf{q}} \in ker\mathcal{A}$.

Ale $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{q}}$, a tudíž $\vec{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{P}} + ker\mathcal{A}$.

ad 2) Důkaz provedeme sporem.
Nechť vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{P}} \cap ker\mathcal{A}$ a $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{o}}$.
$\vec{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{P}} \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{x}}^{(i)} \Longrightarrow \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)}$.
$\vec{\mathbf{x}} \in ker\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$, a tedy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{y}}^{(i)} = \vec{\mathbf{o}}$.
Neboť soubor $(\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(k)})$ je LN, je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, a tedy $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Což je spor.

Věta 27:
Nechť $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{V}$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \mathbf{V})$ a $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Pak $h(\mathcal{AB}) \leq \min\{h(\mathcal{A}), h(\mathcal{B})\}$.
Je-li zobrazení $\mathcal{A}$ izomorfní je $h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{B})$. Je-li zobrazení $\mathcal{B}$ izomorfní je $h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{A})$.

Důkaz:
Z definice složeného zobrazení a z definice hodnosti zobrazení plynou následující vztahy.
$h(\mathcal{AB}) = \dim\, \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{P})), h(\mathcal{A}) = \dim\, \mathcal{A}(\mathbf{Q}), h(\mathcal{B}) = \dim\, \mathcal{B}(\mathbf{P})$.
Protože $\mathcal{B}(\mathbf{P}) \subset\subset \mathbf{Q}$ je podle věty 17 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{P})) \subset\subset \mathcal{A}(\mathbf{Q})$,
a tudíž $h(\mathcal{AB}) \leq h(\mathcal{A})$.
Označme $\mathcal{A}_1$ zobrazení $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ do $\mathbf{V}$, které je zúžením zobrazení $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}(\mathbf{P})$ (to znamená, že obě lineární zobrazení se liší jen definičním oborem).
Platí $h(\mathcal{AB}) = \dim\, \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{P})) = \dim\, \mathcal{A}_1(\mathcal{B}(\mathbf{P})) = h(\mathcal{A}_1)$.
Podle věty 25 je $h(\mathcal{A}_1) \leq \dim\, \mathcal{B}(\mathbf{P}) = h(\mathcal{B})$, a tedy i $h(\mathcal{AB}) \leq h(\mathcal{B})$.

Je-li $\mathcal{A}$ izomorfizmus, existuje podle věty 15 zobrazení $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{Q})$. Snadno si rozmyslíme, že platí $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{AB})$. Lze tedy $\mathcal{B}$ považovat za složené zobrazení a podle již dokázané části věty víme, že $h(\mathcal{B}) \leq h(\mathcal{AB})$. To spolu spolu s nerovností $h(\mathcal{AB}) \leq h(\mathcal{B})$ dává rovnost $h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{B})$.
Zcela analogicky, je-li $\mathcal{B}$ izomorfizmus, lze složit $\mathcal{A} = (\mathcal{AB})\mathcal{B}^{-1}$ a dostaneme $h(\mathcal{AB}) = h(\mathcal{A})$.

Matice a lineární zobrazení

Znovu připomeneme pojem matice.

Definice:
Matice $\mathbf{A}$ o n řádcích a m sloupcích (matice typu $n \times m$) je soubor čísel (obecně komplexních) zapsaný ve tvaru

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

(zkráceně užijeme symbolu $\mathbf{A}=(a_{ij})_{\substack{\mathrm{i=1,2,\dots,n} \\ \mathrm{j=1,2,\dots,m}}}$
nebo slovního spojení $\mathbf{A}=(a_{ij})$ typu $n \times m$).
Čísla a_{ij} nazýváme **prvky matice**.

Označení a poznámky:
1) Soubor $\mathbf{A}_{i\bullet} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ se nazývá i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ a soubor $\mathbf{A}_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ se nazývá j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$.
Pokud to budeme potřebovat, budeme prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{A}$ (tj. prvek na pozici (i, j)) značit $[\mathbf{A}]_{ij}$.
2) Matice se rovnají, mají-li stejný počet řádků a sloupců a shodují se ve všech prvcích.
3) Matice $\mathbf{O}$, jejíž všechny prvky jsou 0, se nazývá **nulová** při libovolných rozměrech.
4) Je-li $n = m$ nazývá se matice **čtvercová řádu** n, soubor $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ se nazývá **hlavní diagonála** matice a soubor $(a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n})$ se nazývá **vedlejší diagonála** matice.
5) Čtvercová matice $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, kde $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j \in \hat{n}$ se nazývá **diagonální**.
6) Matice $\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ se nazývá **matice jednotková**.
7) Prvky matice jsou v nejobecnějším případě komplexní čísla, tj. $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Pokud bude důležité, že prvky matice jsou pouze z nějakého tělesa $\mathbf{T} \subset \mathbf{C}$, uvedeme to zvlášť. Speciálně o matici, která má prvky z $\mathbf{R}$, budeme mluvit jako o reálné matici.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice typu $n \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

potom
1) součtem matic **A** a **B** nazveme matici

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix},$$

2) je-li α číslo z téhož tělesa jako prvky matice, nazveme násobkem $\alpha\mathbf{A}$ matici

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Tyto operace se tedy zavádějí po prvcích. V následující definici zavedeme ještě jednu operaci.

Definice:
Nechť **A** je matice typu $n \times m$ a **B** je matice typu $m \times p$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{pmatrix}.$$

Pak součinem matic **A**·**B** nazveme matici **C**=**AB** typu $n \times p$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix},$$

kde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$ pro $i \in \hat{n}, j \in \hat{p}$ (tj. prvek c_{ij} je jakousi sumou součinů prvků i-tého řádku **A** a j-tého řádku **B**).

Vlastnosti operací s maticemi:
1) Sčítat se dají pouze matice téhož typu. Protože sčítání se zavádí po složkách je **komutativní** i **asociativní**, tj.
A+**B**=**B**+**A** i (**A**+**B**)+**C**=**A**+(**B**+**C**).
2) Násobení matic je také **asociativní**,
když je **A**=(a_{ij}) typu $n \times m$, **B**=(b_{ij}) typu $m \times p$ a **C**=(c_{ij}) typu $p \times q$,
platí (**AB**)**C**=**A**(**BC**).

Důkaz:
Dokážeme $[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij}$=$[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij}$ pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{q}$.
$[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_{ij}= \sum\limits_{k=1}^{p} [\mathbf{AB}]_{ik} c_{kj} =$

$$= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lk}) c_{kj} \overset{\text{(roznásobíme vnitřní sumu)}}{=} \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lk} c_{kj}) \overset{\text{(prohodíme sumy)}}{=} \sum_{l=1}^{m} (\sum_{k=1}^{p} a_{il} b_{lk} c_{kj}) =$$

$$\overset{\text{(vytkneme z vnitřní sumy)}}{=} \sum_{l=1}^{m} a_{il} (\sum_{k=1}^{p} b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^{m} a_{il} [\mathbf{BC}]_{lj} = [\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_{ij}.$$

3) Když je $\mathbf{A}$ typu $n \times m$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ typu $m \times p$ platí zákon **distributivní** (tj. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$).

Důkaz:
Dokážeme $[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_{ij} = [\mathbf{AB}+\mathbf{AC}]_{ij}$ pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{p}$.
$$[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} = [\mathbf{AB}+\mathbf{AC}]_{ij}.$$
4) Pro násobení matic **neplatí** obecně zákon **komutativní** (tj. $\mathbf{AB}$=$\mathbf{BA}$), ani když obě matice jsou čtvercové.

Zdůvodnění: Nechť je $\mathbf{A}$ typu $n \times m$, $\mathbf{B}$ typu $p \times q$.
Aby součin $\mathbf{AB}$ měl smysl musí být $m = p \Longrightarrow \mathbf{AB}$ je typu $n \times q$.
Aby součin $\mathbf{BA}$ měl smysl musí být $q = n \Longrightarrow \mathbf{BA}$ je typu $p \times m$.
Aby tedy rovnost $\mathbf{AB}$=$\mathbf{BA}$ měla smysl musí být $n = p$ a $q = m$.
O komutování tedy by bylo možné mluvit jen v případě, že $n = m = p = q$, tj. když matice jsou čtvercové stejného typu.
Ani tehdy to však není obecně pravda, což ukážeme na příkladu. Nechť
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$
Jestliže pro čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí $\mathbf{AB}$=$\mathbf{BA}$ říkáme, že jsou **záměnné** nebo že **komutují**.
5) Nechť $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n, $\mathbf{A}$ matice typu $n \times m$, $\mathbf{B}$ typu $p \times n$, pak zřejmě platí $\mathbf{IA}$=$\mathbf{A}$ a $\mathbf{BI}$=$\mathbf{B}$.
Speciálně, je-li $\mathbf{C}$ čtvercová matice řádu n, je $\mathbf{IC}$=$\mathbf{CI}$=$\mathbf{C}$.
6) Zcela zřejmé je rovněž následující tvrzení.
Nechť α je číslo, $\mathbf{A}$ matice typu $n \times m$, $\mathbf{B}$ matice typu $m \times p$, pak $\alpha(\mathbf{AB})$=$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}$=$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$.

7) Nechť $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^m$, $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$. Pak lze $\vec{\mathbf{x}}$ chápat jako matici typu $m \times 1$ a $\vec{\mathbf{b}}$ jako matici typu $n \times 1$.

Nechť matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ je typu $n \times m$.

Součin matic $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nm}x_m \end{pmatrix}$ a platí ekvivalence

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nm}x_m = b_n \end{array}.$$

Vztah $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ je tedy pouhým úsporným zápisem soustavy n lineárních algebraických rovnic o m neznámých. Mluvíme o **maticovém** resp. **vektorovém** zápisu soustavy.

Definice:
Nechť $\mathbf{P}_m$ a $\mathbf{Q}_n$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(m)})$ je báze $\mathbf{P}_m$ a $\mathcal{Y} = (\vec{\mathbf{y}}^{(1)}, \vec{\mathbf{y}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{y}}^{(n)})$ je báze $\mathbf{Q}_n$. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n)$.
Maticí zobrazení $\mathcal{A}$ v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ nazveme matici o n řádcích a m sloupcích, jejíž j-tý sloupec je roven $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{Y}}$ pro $j \in \hat{m}$.
Tuto matici značíme ${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$.

Poznámky:
1) Prvky matice jsou čísla z tělesa $\mathbf{T}$.
2) Pokud si matici ${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ představíme rozdělenou mezi jednotlivými sloupci na jakési „submatice“, můžeme definici symbolicky zapsat následujícím způsobem:
${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}} = \Big((\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathcal{Y}}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_{\mathcal{Y}}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(m)})_{\mathcal{Y}} \Big)$.
3) Za pomoci souřadnicových funkcionálů můžeme prvky matice ${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$ definovat takto:
$[{}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}]_{ij} = \vec{\mathbf{y}}^{(i)\#}(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(j)})$ pro $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$.

Věta 28:
Nechť $\mathbf{P}_m$ a $\mathbf{Q}_n$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbf{P}_m$ a $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbf{Q}_n$. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n), \vec{\mathbf{x}} \in \mathbf{P}_m$.
Potom $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}} (\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}$.

Důkaz:
Označme $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{z}}^{(1)}, \vec{\mathbf{z}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{z}}^{(m)})$ a ${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$,
tj. $(\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(1)})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(2)})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(m)})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$.
Dále označme $(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, tj. $\vec{\mathbf{x}} = x_1\vec{\mathbf{z}}^{(1)} + x_2\vec{\mathbf{z}}^{(2)} + \ldots + x_m\vec{\mathbf{z}}^{(m)}$ a tedy

$\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}} = x_1\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(1)} + x_2\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(2)} + \ldots + x_m\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(m)}$.
Z toho vyplývá
$(\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{Y}} = x_1(\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(1)})_{\mathcal{Y}} + x_2(\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(2)})_{\mathcal{Y}} + \ldots + x_m(\mathcal{A}\vec{\mathbf{z}}^{(m)})_{\mathcal{Y}} =$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nm}x_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}(\vec{\mathbf{x}})_{\mathcal{X}}.$$

Věta 29:
Nechť $\mathbf{P}_m$ a $\mathbf{Q}_n$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbf{P}_m$ a $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbf{Q}_n$. Nechť $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n)$. Potom platí:
1) ${}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$,
2) ${}^{\mathcal{X}}(\alpha\mathcal{A})^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz:
Označme $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(m)})$. Z definice matice zobrazení plynou vztahy
${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{Y}} = \Big((\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathcal{Y}}, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_{\mathcal{Y}}, \ldots, (\mathcal{A}\vec{\mathbf{x}}^{(m)})_{\mathcal{Y}}\Big)$,
${}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}} = \Big((\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathcal{Y}}, (\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_{\mathcal{Y}}, \ldots, (\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(m)})_{\mathcal{Y}}\Big)$
a ${}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\mathcal{Y}} = \Big(((\mathcal{A}+\mathcal{B})\vec{\mathbf{x}}^{(1)})_{\mathcal{Y}}, ((\mathcal{A}+\mathcal{B})\vec{\mathbf{x}}^{(2)})_{\mathcal{Y}}, \ldots, ((\mathcal{A}+\mathcal{B})\vec{\mathbf{x}}^{(m)})_{\mathcal{Y}}\Big)$.
Neboť souřadnicový izomorfizmus je aditivní plyne z nich tvrzení 1).
Analogicky se prověří tvrzení 2).

Věta 30:
Nechť $\mathbf{P}_m$, $\mathbf{Q}_n$ a $\mathbf{V}_p$ jsou vektorové prostory nad $\mathbf{T}$.
Nechť $\mathcal{X}$ je báze $\mathbf{P}_m$, $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbf{Q}_n$ a $\mathcal{W}$ je báze $\mathbf{V}_p$. Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{Q}_n, \mathbf{V}_p)$ a $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n)$.
Potom platí ${}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{W}}\, {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$.

Důkaz:
Označme $\mathcal{X} = (\vec{\mathbf{x}}^{(1)}, \vec{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}^{(m)})$.

Pro $j \in \hat{m}$ dokážeme, že j-té sloupce obou matic jsou stejné.

$$\Big[{}^{\mathcal{X}}(\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathcal{W}}\Big]_{\bullet j} = (\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{W}} \overset{\substack{\text{(podle}\\ \text{věty 28)}}}{=} {}^{\mathcal{Y}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{W}}(\mathcal{B}\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{Y}} \overset{\substack{\text{(podle}\\ \text{věty 28)}}}{=} {}^{\mathcal{Y}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{W}}\, {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}(\vec{\mathbf{x}}^{(j)})_{\mathcal{X}} =$$
$$= ({}^{\mathcal{Y}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{W}}\, {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}})\vec{\mathbf{e}}^{(j)} = \Big[{}^{\mathcal{Y}}\!\mathcal{A}^{\mathcal{W}}\, {}^{\mathcal{X}}\!\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}\Big]_{\bullet j}.$$

V posledních dvou rovnostech jsme užili jednak toho, že součin libovolné matice odpovídajícího rozměru s j-tým vektorem standardní báze v $\mathbf{C}^m$ (v pořadí matice-vektor) dává j-tý sloupec matice, a dále toho, že $(\vec{\mathbf{x}}^{(i)})_{\mathcal{X}} = \vec{\mathbf{e}}^{(j)}$.