Příklady k předmětu "Metody Funkcionálního Integrálu"

Dr. Petr Jizba

I. Relativistická QM a dráhové integrály

Ia. Bezspinová částice a bosonová struna

Příklad 1: Dokažte, že na úrovni pohybových rovnic jsou následující akce

$$S[x(\tau),\tau_1,\tau_2] \;=\; -m_0c\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau\sqrt{\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}_{\mu}(\tau)}\,,$$

$$\tilde{S}[x(\tau),\eta,\tau_1,\tau_2] \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau\big(\eta^{-1}\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}_{\mu}(\tau) + \eta\, m_0^2c^2\big)\;, \quad \text{(Wheeler (1962), Polyakov (1980))}\,,$$

ekvivalentní. Proměnná η je *einbain* a přijatá signatura Lorentzovské metriky v D dimenzích je $(+,-,-,\cdots,-)$.

Příklad 2: Dokažte, že v nerelativistické limitě (t.j., když $\mathbf{v}^2/c^2 \ll 1$) jak S tak $\tilde{S}$ přechází na akci volné nerelativistické částice.

Příklad 3: Dokažte, že na úrovni pohybových rovnic jsou následující strunové akce

$$S[x(\tau,\sigma),\Sigma] = -\frac{1}{2\pi\alpha}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau\sqrt{\det\left(\partial_a x^{\mu}(\sigma,\tau)\partial_b x_{\mu}(\sigma,\tau)\right)}\,, \quad \text{(Dirac, Nambu \& Goto (1930))}\,,$$

$$\tilde{S}[x(\tau,\sigma),h^{ab},\Sigma] = -\frac{1}{4\pi\alpha}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau\sqrt{h}h^{ab}\partial_a x^{\mu}(\sigma,\tau)\partial_b x_{\mu}(\sigma,\tau)\,, \quad \text{(Polyakov, Dezer \& Zumino (1981))}\,,$$

ekvivalentní. $h = \det h_{ab}$, Σ je objem světoplochy, a a b indexují proměnné σ a τ.

Příklad 4: Dokažte, že Polyakovova strunová akce ma $2D$ Weylovu symetrii, tj, je invariantní vzhledem k přeškálování metriky $h_{ab}(\tau,\sigma) \mapsto f(\tau,\sigma)h_{ab}(\tau,\sigma)$, $f(\tau,\sigma) > 0$. Ukažte, že důsledkem Weylovy ivariance je, že $T^a{}_a = 0$ (T_{ab} je tenzor momentu a hybnosti na světoploše).

Příklad 5: Dokažte, že akce

$$S[h^{ab},\Sigma] \;=\; \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\sigma\;\sqrt{h}\;R\,,$$

(R je Ricciho skalárni křivost) je invariantní vzhledem ke globální Weylově symetrii, ke grupě diffeomorphismů a k Poincarého grupě.

Hint: R je definován prostřednictvím Christoffel–Riemannova tenzoru křivosti R_{abcd} vztahem

$$R \;=\; h^{ab}R^c{}_{acb}\,,$$

$$R^a{}_{bcd} \;=\; \partial_c\Gamma^a_{bd} \;-\; \partial_d\Gamma^a_{bc} \;+\; \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} \;-\; \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}\,,$$

$$\Gamma^a_{bc} \;=\; \frac{1}{2}h^{ad}\left(\partial_b h_{dc} \;+\; \partial_c h_{db} \;-\; \partial_d h_{bc}\right)\,.$$

Příklad 6: Dokažte, že pro lokální Weylovu transformaci platí

$$\sqrt{h}R \;\mapsto\; \sqrt{h}(R \;-\; 2\nabla^2\omega)\,,$$

($\nabla^2 = \nabla^a\nabla_a = h^{-1/2}\partial_a\sqrt{h}h^{ab}\partial_b$ je Laplace–Beltramiho operátor. Konformní faktor $f(\tau,\sigma) = \exp(2\omega(\tau,\sigma))$).

Využijte faktu, že

$$\mathrm{div}\,\mathbf{X} \;=\; \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\partial_a\sqrt{h}\;X^a\right)\,,$$

a dokažte, že akce z příkladu 5 je invariantní také vzhledem k lokální Weylově symetrii (modulo případný povrchový člen).

Příklad 7: Dokažte, že ve $2D$ platí $R_{ab} = \frac{1}{2}h_{ab}R$ a tudíž, že Einsteinova gravitační rovnice ve $2D$ je triviální. V $2D$ musí tedy člen $\sqrt{h}R$ být totálni derivací.

Hint: $R = h^{ab}R_{ab} = h^{ab}h^{cd}R_{dacb}$ (R_{ab} je Ricciho tenzor). Důkaz se dá zredukovat na určení počtu nezávislých složek Christoffel–Riemannova tenzoru. K tomu slouží následující symmetrie

$$\begin{aligned}
R_{abcd} \;&=\; -R_{bacd}\,,\\
R_{abcd} \;&=\; R_{cdab}\,,\\
R_{abcd} \;&=\; -R_{abdc}\,,\\
R_{abcd} \;+\; R_{acdb} \;+\; R_{adbc} \;&=\; 0\,, \quad \text{(Ricciho cyklická rovnost)}\,.
\end{aligned}$$

(R_{acdb} má v $2D$ jednu nezávislou složku, v $3D$ má 6 nezávislých složek, v $4D$ má 20 nezávislých složek, atd.)

Příklad 8: (Feynman–Fockova metoda 5. parametru) Dokažte, že pokud funkce $\varphi(x,\lambda)$ splňuje rovnici

$$i\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda} \;=\; \tfrac{1}{2}\Box_x\varphi(x,\lambda),$$

($\Box_x$ is d'Alambertián) potom funkce $\psi(x)$ která splňuje Klein–Gordonovu rovnici $(\Box_x + m_0^2)\psi(x) = 0$ je svázána s funkcí $\varphi(x,\lambda)$ vztahem: $\varphi(x,\lambda) = \exp(im_0^2\lambda/2)\psi(x)$. Dedukujte z tohoto faktu, že propagátor pro Klein–Gordonovu rovnici má následující dráhově integrální reprezentaci:

$$\langle x_a|x_b\rangle \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\;\exp\left(-i\frac{m_0^2\lambda}{2}\right)\int_{x(0)=x_a}^{x(\lambda)=x_b}\mathcal{D}x^\mu\,\exp\left(i\int_0^\lambda \mathrm{d}\tau L(x(\tau))\right).$$

$L(x)$ je Polyakovův Lagrangián pro volnou částici s kalibrační podmínkou $\eta = 1$. Srovnej s reprezentací odvozenou na přednášce.

Ib. Reprezentace Lorentzovy grupy a částice se spinem $\frac{1}{2}$

Příklad 9: Přesvěčte se, že generátory $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ splňují Lieovu ($SO(3,1)$) algebru

$$[J_{\mu\nu}, J_{\varrho\sigma}] \;=\; i\eta_{\nu\varrho}J_{\mu\sigma} \;-\; i\eta_{\mu\varrho}J_{\nu\sigma} \;-\; i\eta_{\nu\sigma}J_{\mu\varrho} \;+\; i\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\varrho}\,.$$

Příklad 10: Zkontrolujte, že $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ splňují $SO(3,1)$ algebru, tj.,

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\varrho\sigma}] \;=\; i\eta_{\nu\varrho}\Sigma_{\mu\sigma} \;-\; i\eta_{\mu\varrho}\Sigma_{\nu\sigma} \;-\; i\eta_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\varrho} \;+\; i\eta_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\varrho}\,.$$

Hint: Může se vám hodit relace: $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}\{\hat{B},\hat{C}\} - \{\hat{A},\hat{C}\}\hat{B}$.

Příklad 11: Zkontrolujte, že generátory $(M^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\tau} = i(\eta^{\rho\mu}\delta^{\nu}_{\tau} \; - \; \eta^{\rho\nu}\delta^{\mu}_{\tau})$ splňují $SO(3,1)$ algebru, tj.,

$$[M_{\mu\nu}, M_{\varrho\sigma}] \; = \; i\eta_{\nu\varrho}M_{\mu\sigma} \; - \; i\eta_{\mu\varrho}M_{\nu\sigma} \; - \; i\eta_{\nu\sigma}M_{\mu\varrho} \; + \; i\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\varrho} \, .$$

Definujte $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}$ a určete príslušný spin odpovídající této reprezentaci. Ukažte, že tato reprezentace je typu $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Příklad 12: Ukažte, že jestlize $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}$ a $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Sigma^{jk} = \frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^{j}\gamma^{k}$, potom $[J_i,J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$ a $[\gamma^0, J^i] = [\gamma^5, J^i] = 0$. Zde $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Ukažte, že $\{\gamma^5,\gamma^{\mu}\} = 0$, a že $(J^1)^2 = (J^2)^2 = (J^3)^2 = \frac{1}{4}$. Verifikujte tyto výsledky ve speciální reprezentaci (Diracově reprezentaci)

$$\gamma^0 \; = \; \gamma_0 \; = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \; = \; -\gamma_i \; = \; \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

a ukažte, že v této reprezentaci platí

$$J_i \; = \; -J^i \; = \; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 \; \equiv \; \gamma_5 \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proč má tato reprezentace spin 1/2? Jedná se o reprezentaci $(\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2})$ a nebo $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$?

Příklad 13: Grupové elementy pro spinorovou reprezentaci Lorentzovy grupy mají tvar

$$U(\theta_{\alpha\beta}) \; = \; \exp\left(\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\right) \, .$$

Ukažte, že γ^{α} se transformuje jako 4-vektor vzhledem k $U(\theta_{\alpha\beta})$, tj., ukažte, že

$$U(\theta_{\alpha\beta})\gamma^{\delta}U^{-1}(\theta_{\alpha\beta}) \; = \; \left[\exp\left(\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right)\right]^{\delta}_{\;\gamma}\gamma^{\gamma} \; = \; \left(\Lambda^{-1}(\theta_{\alpha\beta})\right)^{\delta}{}_{\gamma}\,\gamma^{\gamma} \, ,$$

kde $\Lambda(\theta_{\alpha\beta}) = \exp(\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})$ je vektorová reprezentace Lorentzovy grupy.

Hint: Může se vám hodit relace:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} \; = \; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}C_n \, , \quad C_0 \; = \; \hat{B}, \, C_n \; = \; [\hat{A}, C_{n-1}] \, .$$

Příklad 14: Definujme $\not{a} = a_{\mu}\gamma^{\mu}$. Dokažte, že

$$\begin{aligned}
&\not{a}_1\not{a}_2 \; = \; 2a_1\cdot a_2 - \not{a}_2\not{a}_1, \\
&(\not{p} - m_0c)(\not{p} + m_0c) = (p_{\mu}p^{\mu} - m_0^2c^2) \\
&\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1\not{a}_2) \; = \; 4a_1\cdot a_2 \, , \\
&\mathrm{Tr}\,(\not{a}_1\cdots\not{a}_n) \; = \; 0 \, , \quad (\text{pokud je } n \text{ liché}) \, , \\
&\gamma_{\mu}\not{a}\gamma^{\mu} \; = \; -2\not{a} \\
&\gamma_{\mu}\not{a}_1\not{a}_2\gamma^{\mu} \; = \; 4a_1\cdot a_2 \, .
\end{aligned}$$

Příklad 15: (Foldy–Wouthuysenova transformace) Diracova rovnice má tvar

$$(i\not{\partial} - m_0c)\psi(x) \; = \; 0 \, .$$

Ukažte, že Diracův Hamiltonián má tvar

$$H(\mathbf{p}) \;=\; \gamma^0\gamma^i p_i c \;+\; \gamma^0 m_0 c^2 \;=\; \begin{pmatrix} m_0 c & p_i\sigma^i \\ p_i\sigma^i & -m_0 c \end{pmatrix} c\,.$$

Protože předchozí matice je hermitovská, může být diagonalizována unitární transformací. Dokažte, že

$$H_{diag} \;=\; \begin{pmatrix} (c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2})\; 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -(c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2})\; 1_{2\times 2} \end{pmatrix} \;=\; e^{iS} H(\mathbf{p}) e^{-iS}\,,$$

kde

$$S \;=\; -i\vec{\gamma}\cdot\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\frac{\theta}{2}\,, \qquad \cos\theta \;=\; \frac{m_0 c}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2}}\,, \quad \sin\theta \;=\; \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2}}\,.$$

Veličina $\theta\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ se nazývá *rapidita*. Interpretujte fyzikálni význam rapidity.

Příklad 16: Dokažte, že $\det(i\not{\partial} - m_0 c) = \det(i\not{\partial} + m_0 c)$ a tudíž ukažte, že

$$\det(i\not{\partial} - m_0 c) \;=\; \sqrt{\det\left((-\Box_x - m_0^2c^2)1_{4\times 4}\right)}\,.$$

Hint: Může se vám hodit relace: $\det A \;=\; \exp\left(\mathrm{Tr}\log A\right)$.

Příklad 17: Uvažujte Diracovu reprezentaci γ matic z příkladu 12 a přepište vlnovou funkci (bispinor) ψ jako

$$\psi \;=\; \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

kde φ a χ jsou matice 1×2. Ukažte, že Diracova rovnice z příkladu 15 se dá přepsat ve tvaru

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;=\; m_0\varphi \;+\; \frac{1}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}(\chi)\,, \qquad i\frac{\partial\chi}{\partial t} \;=\; -m_0\chi \;+\; \frac{1}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}(\varphi)\,.$$

Ukažte dále, že při operaci parity ($t \to t, \mathbf{x} \to -\mathbf{x}$) dostáváme, že $\varphi \mapsto \varphi$ a $\chi \mapsto -\chi$.

Příklad 18: Uvažujte Weylovu reprezentaci γ matic, t.j.,

$$\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Přesvěčte se, že tyto matice splňují definiční vztah $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Dokažte, že $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ je v této reprezentaci diagonálni a má tvar

$$\gamma^5 \;=\; \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že pro $J_i = \frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^i\gamma^k$ a $K_i = M_{0i} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i$ platí

$$\mathbf{J} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\vec{\sigma} & \\ 0 & \frac{1}{2}\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i\vec{\sigma} & \\ 0 & -\frac{1}{2}i\vec{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Tedy $\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}) = \mathrm{diag}(0, \frac{1}{2}\vec{\sigma})$, zatímco $\mathbf{N}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}\vec{\sigma}, 0)$. Dokažte, tudíž že spinor φ se transformuje podle reprezentace $(\frac{1}{2}, 0)$ zatímco χ podle reprezentace $(0, \frac{1}{2})$. Všimněte si, že

$$\chi \;=\; \frac{1}{2}(1 \;-\; \gamma^5)\psi \;\equiv\; \varphi_L \quad \text{a} \quad \varphi \;=\; \frac{1}{2}(1 \;+\; \gamma^5)\psi \;\equiv\; \varphi_R\,.$$

Ukažte dále, že při operaci parity ($t \to t, \mathbf{x} \to -\mathbf{x}$) dostáváme, že $\chi \leftrightarrow \varphi$.

Ic. Částice se spinem 1 a SUSY

Příklad 19: Uvažujte první sadu Maxwellových rovnic, t.j.,

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0\,.$$

Ukažte, že tyto se dají přepsat do tvaru

$$i\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S}\cdot\vec{\nabla}(i\mathbf{B})\,, \qquad i\frac{\partial i\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{i}\mathbf{S}\cdot\vec{\nabla}(\mathbf{E})\,,$$

kde $(S_i)_{jk} = (1/i)\varepsilon_{ijk}$. Přesvědčte se, že

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k\,, \quad \text{a že} \quad \sum_{i=1}^{3} {S_i}^2 = 2\cdot 1_{3\times 3}\,.$$

Matice S_i tedy hrají pro foton (t.j., částici se spinem 1 a $m_0 = 0$) stejnou roli jako Pauliho matice σ_i mají pro elektron (t.j., částici se spinem 1/2). Podobně, $(\mathbf{E}, i\mathbf{B})$ jsou analogické k (φ, χ). Diskutujte tento výsledek.

Dokažte, že vektor $\mathbf{E}$ se transformuje podle reprezentace $(1,0)$ zatímco $i\mathbf{B}$ podle reprezentace $(0,1)$. Takže $(\mathbf{E}, i\mathbf{B})$ se transformuje podle vektorové reprezentace $(1,0)\oplus(0,1)$.

Příklad 20: Použijte analogii z Diracovy rovnice a určete jak vypadá jedno-fotonový Hamiltonián $H(\mathbf{p})$.

Příklad 21: (derivace složené funkce na G_n) Nechť $\theta_k \in G_n$. Mějme lineární transformaci

$$\theta_k = \sum_p a_{kp}Y_p\,, \qquad Y_k \in G_n\,.$$

Ukažte, že

$$\frac{\partial}{\partial Y_p} f(\theta(Y)) = \sum_k a_{kp}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_k} f(\theta)\right)_{\theta=\theta(Y)}\,,$$

a současně, že

$$f(\theta(Y))\frac{\partial}{\partial Y_p} = \sum_k a_{kp}\left(f(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta_k}\right)_{\theta=\theta(Y)}\,.$$

Příklad 22: (derivace součinu funkcí na G_n) Nechť f_1 je lichá funkce (tj., $\ni G_n'$) a nechť f_2 je obecná funkce z G_n. Dokažte, že

$$\frac{\partial}{\partial \theta_p}(f_1 f_2) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_p} f_1\right) f_2 - f_1\left(\frac{\partial}{\partial \theta_p} f_2\right)\,,$$

$$(f_2 f_1)\frac{\partial}{\partial \theta_p} = f_2\left(f_1\frac{\partial}{\partial \theta_p}\right) - \left(f_2\frac{\partial}{\partial \theta_p}\right) f_1\,.$$

Příklad 23: Dokažte, že pro $\theta_i \in G_n$ a $\eta, \bar{\eta} \in G_{2n}$ platí následující Gaussovské integrály.

$$\int \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n \; \exp\left(-\frac{1}{2}\,\theta^T A\theta - \theta^T \chi\right) \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\,\chi^T A^{-1}\chi\right)\sqrt{\det A}\,,$$

$$\int \prod_i (\mathrm{d}\bar{\eta}_i \mathrm{d}\eta_i) \; \exp\left(-\bar{\eta}^T A\eta - \bar{\eta}^T\chi - \bar{\chi}^T\eta\right) \;=\; \exp\left(\bar{\chi}^T A^{-1}\chi\right)\det A\,.$$

Příklad 24: Mějte SUSY generátory

$$Q \;=\; i\frac{\partial}{\partial\theta} \;-\; \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{a} \quad \bar{Q} \;=\; -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \;+\; \theta\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

a SUSY kovariantní derivace

$$D_\theta \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta} \;-\; i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{a} \quad \bar{D}_\theta \;=\; -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} \;+\; i\theta\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Dokažte, že

$$\{D_\theta, Q\} \;=\; \{D_\theta, \bar{Q}\} \;=\; 0 \quad \text{a} \quad \{\bar{D}_\theta, Q\} \;=\; \{\bar{D}_\theta, \bar{Q}\} \;=\; 0\,,$$

a, že

$$\delta D_\theta \;=\; [D_\theta, iQ\varepsilon + i\bar{\varepsilon}\bar{Q}] \;=\; 0 \quad \text{a} \quad \delta\bar{D}_\theta \;=\; [\bar{D}_\theta, iQ\varepsilon + i\bar{\varepsilon}\bar{Q}] \;=\; 0\,,$$

a tudíž dokažte, že

$$\delta(D_\theta A) \;=\; i(\bar{\varepsilon}\bar{Q} \;+\; Q\varepsilon)D_\theta A \quad \text{a} \quad \delta(\bar{D}_\theta A) \;=\; i(\bar{\varepsilon}\bar{Q} \;+\; Q\varepsilon)\bar{D}_\theta A\,,$$

platí pro libovolné superpole a SUSY transformaci: $\delta t = -i\bar{\theta}\varepsilon + i\bar{\varepsilon}\theta, \delta\theta = \varepsilon$ a $\delta\bar{\theta} = \bar{\varepsilon}$.

Hint: Může se vám hodit relace: $\{\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\} = \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} = \{\hat{C}, \hat{A}\}\hat{B} - \hat{A}[\hat{C}, \hat{B}]$.

Příklad 25: Uvažujte superkovariantní akci

$$S \;=\; \tfrac{1}{2}\int dt d\bar{\theta} d\theta \; \bar{D}_\theta\phi^\mu D_\theta\phi_\mu\,.$$

Superpole ϕ^μ ma rozklad

$$\phi^\mu(t, \bar{\theta}, \theta) \;=\; x^\mu(t) + i\theta\psi^\mu(t) - i\bar{\psi}^\mu(t)\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}D^\mu(t)\,.$$

Dokažte, že

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\int dt\;(\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + i\dot{\bar{\psi}}^\mu\psi_\mu - i\bar{\psi}^\mu\dot{\psi}_\mu + D^\mu D_\mu) \\ &= \int dt\;(\tfrac{1}{2}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - \bar{\psi}^\mu i\partial_t\psi_\mu + D^\mu D_\mu)\,. \end{aligned}$$

Uvažujte nyní nerelativistickou QM v 1D. Superkovariantní akce může být psána ve tvaru

$$S \;=\; \int dt d\bar{\theta} d\theta\; (\bar{D}_\theta\phi D_\theta\phi - f(\phi))\,,$$

kde $f(\phi)$ je nějaká analytická funkce superpole. Ukažte, že

$$S \;=\; \int dt\;(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \bar{\psi}(i\partial_t - f''(x))\psi + \tfrac{1}{2}D^2 + Df')\,.$$

Definujte superpotenciál $W(t) = D(t) = -f'(t)$ a ukažte že opovídající Hamiltonián má tvar:

$$H \;=\; \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}W^2 - \tfrac{1}{2}[\psi, \bar{\psi}]W'$$

Pozn: Proč následující akce

$$S \;=\; \tfrac{1}{2}\int dt d\bar{\theta} d\theta\ \bar{D}_\theta \phi^\mu \bar{D}_\theta \phi_\mu\,, \qquad S \;=\; \tfrac{1}{2}\int dt d\bar{\theta} d\theta\ D_\theta \phi^\mu D_\theta \phi_\mu\,,$$

nejsou vhodnými kandidáti pro superkovariantní akci.

Příklad 26: Dokažte, že akce

$$S[x,\psi,\eta,\chi] \;=\; -\tfrac{1}{2}\int_0^L dt\ (\eta^{-1}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - i\psi^\mu \dot{\psi}_\mu + \eta^{-1} i\chi\psi_\mu \dot{x}^\mu)\,,$$

je invariantní vzhledem k lokálním SUSY transformacím

$$\begin{aligned}
\delta x_\mu(t) &= i\varepsilon(t)\,\psi_\mu(t)\\
\delta\psi_\mu(t) &= \varepsilon(t)\left(\eta^{-1}\dot{x}_\mu - \frac{i}{2\eta}\chi\psi_\mu\right)\\
\delta\eta(t) &= i\varepsilon(t)\,\chi(t)\\
\delta\chi(t) &= 2\,\dot{\varepsilon}(t)
\end{aligned}$$

Ukažte, že předchozí akce lze psát v kanonickém tvaru

$$S[x,p,\psi,\eta,\chi] \;=\; \int_0^L dt\ (-p_\mu \dot{x}^\mu + \frac{\eta}{2m_0}p^2 + \tfrac{1}{2}i\psi_\mu\dot{\psi}^\mu + i\tfrac{1}{2}\chi\psi^\mu p_\mu)\,.$$

Dokažte, že akce má následující lokální SUSY

$$\begin{aligned}
\delta x_\mu(t) &= i\varepsilon(t)\,\psi_\mu(t)\\
\delta\psi_\mu(t) &= \varepsilon(t)p_\mu(t)\\
\delta\eta(t) &= i\varepsilon(t)\,\chi(t)\\
\delta\chi(t) &= 2\,\dot{\varepsilon}(t)\\
\delta p_\mu(t) &= 0\,.
\end{aligned}$$

II. Úvod do QFT a funkcionální integrály

Ia. Skalární pole

Příklad 27: Dokažte, operátorový Wickův teorém pro reálné skalární pole a dedukujte z něj obviklou formu Wickova teorému pro Greenovy funkce volných polí, t.j.,

$$\langle 0|T[\hat{\phi}_{in}(x_1)\dots\hat{\phi}_{in}(x_k)]|0\rangle = \begin{cases} 0\,, & \text{jestliže } k \text{ liché} \\ \sum_{\text{různá párování}} \Delta_F(x_{i_1},x_{i_2})\cdots\Delta_F(x_{i_{k-1}},x_{i_k})\,, & \text{jestliže } k \text{ sudé.} \end{cases}$$

Hint: Může se vám hodit následující postup:

Příklad 28: Dokažte, že operátorový Wickův teorém pro realné skalární pole lze psát v kompaktním tvaru (generující rovnici)

$$T\left[\exp\left(-i\int d^4x\ \hat{\phi}_{in}(x)J(x)\right)\right] = :\exp\left(-i\int d^4x\ \hat{\phi}_{in}(x)J(x)\right): \\ \times\ \exp\left(-\frac{1}{2}\int\int d^4x d^4y\ J(x)\Delta_F(x,y)J(y)\right)\,,$$

kde $J(x)$ je c-číselný zdroj.

Příklad 29: (Gaussovské integrály) Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$

kde Re $a > 0$.

Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{2a}\right),$$

kde Re $a > 0$ a $b \in \mathbf{C}$. Pomocí konturového integrálu dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(\mathrm{i}\frac{a}{2}x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}}\begin{cases} \sqrt{\mathrm{i}} & \text{pro } a > 0, \\ 1/\sqrt{\mathrm{i}} & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Ukažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x_iA_{ij}x_j + b_ix_i\right) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left[\frac{1}{2}b_i(A^{-1})_{ij}b_j\right],$$

kde $A = (A_{ij})$ je $N\times N$ reálná symetrická matice. Vlastní hodnoty λ_i matice A splňují nerovnost Re $\lambda_i > 0$.

Ukažte, že

$$\int\prod_{i=1}^{N}(dz_i dz_i^*)\exp\left(-z_i^*C_{ij}z_j + \zeta_i^*z_i + z_i^*\zeta_i\right) = \frac{\pi^N}{\det C}\exp\left[\zeta_i^*(C^{-1})_{ij}\zeta_j\right],$$

kde $z_i, \zeta_i \in \mathbf{C}$ a C je hermitovská matice.

Příklad 30: (Greenova funkce harmonického oscilátoru) Uvažujte funkcionál — dráhový integrál

$$Z[j] \;=\; \int \mathcal{D}x \; e^{i\mathcal{S}[x,j]}, \tag{1}$$

kde $\mathcal{S}[x,j] \;=\; \mathcal{S}[x] - \int_{-\infty}^{\infty} dt j(t)x(t)$ a

$$\mathcal{S}[x] \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\,,$$

je klasická akce pro harmonický oscilátor s hmotností $m = 1$. V rámci příkladu z předchozího paragrafu, se $Z[j]$ dá chápat jako zobecnění Gaussovského integrálu, v tom smyslu, že x_i je zaměněno za $x(t)$. Čas t tedy hraje formálně roli spojitého indexu.

Ukažte, že

$$x(t) \;=\; x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t')j(t')\,,$$

je stacionární řešení akce $\mathcal{S}[x,j]$, kde $(\partial_t^2 + \omega^2)G(t-t') = -\delta(t-t')$ a $d^2x_0/dt^2 = -\omega^2 x_0$.

Ukažte, že

$$Z[j] \;=\; Z[0]\exp\left[-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' j(t)G(t-t')j(t')\right].$$

Ukažte dále, že

$$G(t_1 - t_2) \;=\; \frac{i}{Z[0]}\frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\delta j(t_2)}\bigg|_{j=0} \;=\; -\frac{i}{Z[0]}\int \mathcal{D}x \; x(t_1)x(t_2)\; e^{i\mathcal{S}[x]}\,.$$

Hint: Pro funkcionální derivaci platí $\delta x(t)/\delta x(t') \;=\; \delta(t-t')$, což se dá chápat jako zobecnění parciální derivace pro diskrétní indexy: $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$.

Spočtěte $\langle 0|T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)]|0\rangle$, kde $T[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)] \;\equiv\; \theta(t_1-t_2)\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2) + \theta(t_2-t_1)\hat{x}(t_2)\hat{x}(t_1)$. Srovnejte získaný výsledek s $G(t)$.