

PŘÍPRAVA VÝUKOVÝCH STRATEGIÍ¹

Jarmila Novotná², Alena Pelantová³, Hana Hrabáková⁴, Magdalena Krátká⁵

ÚVOD

Vyučovací proces můžeme obecně charakterizovat jako posloupnost situací (přirozených nebo didaktických), které vedou k modifikacím v chování žáků typickým pro získání nových znalostí. Náplní pracovní dílny byla příprava didaktických situací, tedy situací ve třídě, kdy cílem je žáky něco naučit; stručně lze říci, situací, které slouží pro didaktickou potřebu. Pozornost byla věnována hlavně přípravě takových situací, při nichž učitel předává žákům část zodpovědnosti za vyučovací proces, tedy část svých pravomocí. Žáci něco zjišťují a objevují sami, vytvářejí model a kontrolují jeho správnost a užitečnost, případně vytvářejí jiný model, který považují za vhodnější apod., bez přímých vnějších zásahů učitele. Jejich činnost je řízena pouze prostředím a jejich znalostmi, nikoli didaktickou činností učitele. Žák se stává zodpovědným za získání požadovaných výsledků. Úkolem učitele je jednak připravit takovou situaci, jednak institucionalizovat získané informace. Tyto znalosti jsou pak učitelem dále využívány a rozvíjeny.

Příspěvek je koncipován tak, že kopíruje pořadí aktivit, které se v pracovní dílně odehrály. Proto je rozdělen do několika bloků, v nichž jsou nejprve shrnuty pojmy, které tvoří teoretický rámec daného bloku. Pak následují ilustrace, které vycházejí ze zkušeností autorek z praxe a které jsou současně výzvou pro čtenáře, aby se o něco podobného pokusil ve své praxi i sám.

Kdo z čtenářů se již setkal s Teorií didaktických situací v matematice (dále budeme stručně psát TDS), ví, že zde používáme právě tuto teorii. Teorii, která byla vytvořena ve Francii již před více než třiceti lety a od té doby je stále živá a stále ji její autor Guy Brousseau a jeho spolupracovníci a žáci rozvíjejí a doplňují. Ty, kteří tuto teorii dosud neznají, seznámíme se základními pojmy v první části příspěvku. V České republice je v současné době hlavní pozornost zaměřena na realizaci zásad Rámcových vzdělávacích programů (RVP) formou tzv. Školních vzdělávacích programů (ŠVP). Čtenář se proto může oprávněně ptát, proč pracujeme v rámci TDS, zda TDS odpovídá koncepci vyučování, kterou popisuje RVP. Na tuto otázku odpovídá např. J. Složil v (Složil, 2005): *V ničem si neprotiřečí. TDS i RVP chtějí nový přístup, přístup zaměřený na žáka, mimo jiné i na rozvoj jeho nadání. Teorie didaktických situací svým zaměřením rozhodně přispívá k rozvíjení klíčových kompetencí uvedených v RVP.*

V kapitole 1 čtenáře seznámíme s pojmy vázanými na didaktickou situaci. Pro větší srozumitelnost výkladu nebudeme používat příliš mnoho teoretických vymezení pojmů, ale vše budeme ilustrovat na příkladu jedné didaktické situace, nazvané *Hra na 20*. Vycházíme přitom z knihy (Brousseau, 1997). Na „teoretický“ výklad Hry na 20 navazuje shrnutí zkušeností z realizace této aktivity ve vyučování.

¹ Příspěvek byl částečně podpořen Rozvojovými projekty MŠMT ČR CLIL – kurs podle standardu EU a Zvyšování kvality doktorských programů formou vícedenních seminářů a pracovních dílen.

² UK v Praze, PedF, KMDM jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

³ Základní škola Na Slovance, Praha 8, pelantova@zsnaslovanec.cz

⁴ Gymnázium Josefská, Praha, hanka.hrabakova@centrum.cz

⁵ KM PŘF UJEP v Ústí nad Labem, kratka@sci.ujep.cz

Po seznámení se se základními pojmy TDS budeme přidávat další pohledy na přípravu výukových situací. Kapitola 2 je věnována tomu, co vše je třeba si rozmyslet a připravit před realizací navržené didaktické situace, chceme-li, aby situace byla úspěšná, žáci získali vědomosti, které jsme plánovali, abychom byli co nejlépe připraveni na to, co se může ve třídě odehrát (i když asi nikdy nemůžeme být připraveni na všechny eventuality, které mohou nastat, čím podrobnější je naše příprava, tím snáze budeme čelit i nepředpokládaným událostem). K ilustraci analýzy a priori byla zvolena úloha Puzzle.

Jedním ze stěžejních úkolů učitele je rozpoznat překážky, na které mohou žáci při získávání nových znalostí narazit. Překážky mohou být různého charakteru a různého původu. Je jim věnována kapitola 3 příspěvku. K ilustraci různých typů překážek a jejich překonávání byl zvolen pojem nekonečno, speciálně nekonečno v geometrii.

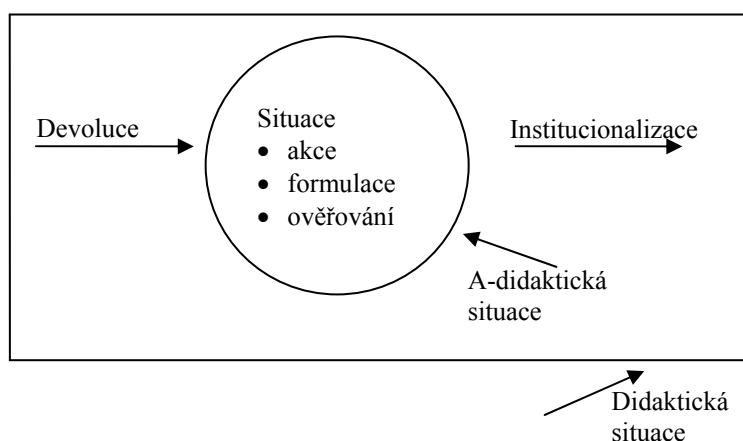
1. TYPY DIDAKTICKÝCH SITUACÍ⁶

Situací budeme rozumět systém, do něhož vstupuje učitel, žák, prostředí, pravidla a omezení potřebná pro vytvoření daného matematického poznatku. Rozlišujeme situace nededaktické, jejichž cílem není něco učit, a situace didaktické. Posláním *didaktické situace* je „někoho něco naučit“. Učitel organizuje plán činností, jejichž cílem je modifikovat nebo vytvořit žakovu znalost.

V dalším výkladu se budeme věnovat pouze situacím didaktickým. Speciálním případem didaktické situace je tzv. *situace a-didaktická*. Jejím cílem je umožnit žákovi získávat poznatky samostatně, bez explicitních zásahů učitele. Učitel předává žákovi zodpovědnost za akt učení se (*devoluce*). A-didaktická situace se skládá ze tří etap (viz obr. 1):

- *Akce* – výsledkem je předpokládaný (implicitní) model, strategie, počáteční taktika
- *Formulace* – zformulování podmínek, ve kterých bude strategie fungovat
- *Ověření (validate)* – ověření platnosti strategie (funguje, nefunguje)

Obr. 1



Institucionalizací rozumíme přechod žakovy znalosti z role prostředku pro řešení jedné určité situace do nové role reference pro individuální nebo kolektivní použití v situacích dalších. Institucionalizace může nastat i v situaci spontánního učení. Ve většině případů je však svázána s didaktickými procesy řízenými učitelem.

⁶ Vycházíme z (Brousseau, 1997). V češtině je TDS zpracována v pracích (Pelantová, Novotná, 2004), (Hrabáková, 2005a), (Složil, 2005a).

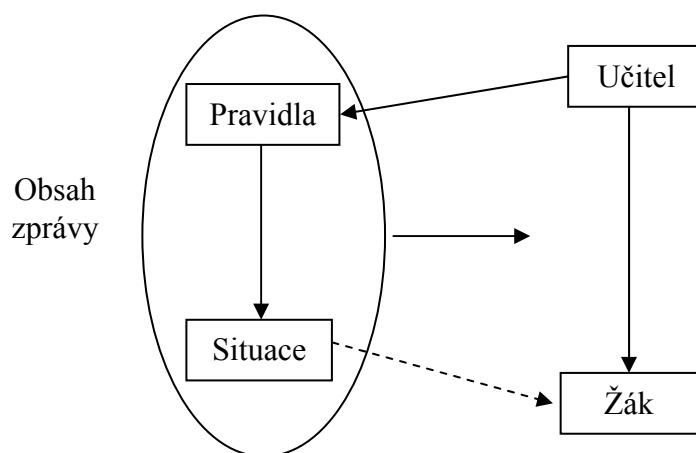
1.1. Etapy a-didaktických situací

Jednotlivé etapy a-didaktických situací si přiblížíme na příkladu *Hry na 20*.

Hra na 20: Hraje se ve dvojicích. Každý hráč se snaží říci „20“ přičtením 1 nebo 2 k číslu, které řekl soupeř v předcházejícím kroku. Jeden z hráčů začne číslem „1“ nebo „2“; druhý pokračuje přičtením 1 nebo 2, nahlas řekne výsledek; první hráč pokračuje přičtením 1 nebo 2 k výsledku; atd.

Didaktická situace je zahájena instruktáží, učitel seznámí žáky s pravidly hry. Začne hrát u tabule hru s jedním žákem, pak přenechá své místo jinému žákovi. Současně s tím učitel přímo, když žák hraje, komentuje jednotlivá rozhodnutí a ilustruje pravidla. Rozhovor o pravidlech přizpůsobuje okamžité situaci. Schematicky je komunikace v této fázi zachycena na obr. 2.

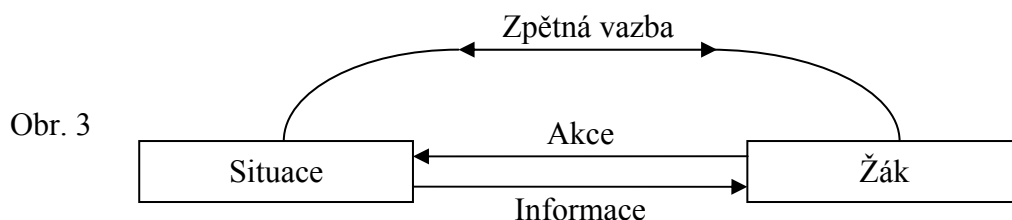
Obr. 2



Poznámka: Cílem toho, že instrukce dává učitel současně s hraním hry, je zajistit, aby instrukce, které si dítě z výkladu vezme, byly stejné jako ty, které mu předává učitel. Hraní hry snižuje víceznačnost - dává zpětnou vazbu.

Typ a-didaktické situace	Realizace ve <i>Hře na 20</i>
<i>Situace akce</i> Schematicky je znázorněna na obr. 3. Obecně vychází strategie intuitivně nebo racionálně z dřívějších strategií. Žák volí novou strategii jako výsledek experimentování. Přijímá ji nebo zavrhuje na základě následného úspěchu nebo neúspěchu. Toto hodnocení může být i intuitivní. Žák si vytváří <i>implicitní model</i>, soubor vztahů nebo pravidel, na jejichž základě se žák rozhoduje, aniž si je uvědomuje	<i>Hraní Jeden proti jednomu</i> Třída se rozdělí do dvojic, žáci ve dvojici hrají proti sobě. Výsledky píší na papír, rozdělený svislou čarou na dvě části, vlevo a vpravo od čáry. Každý žák je v situaci, kdy zná čísla, se kterými už bylo hráno. Jestliže partner odehraje, žák se musí rozhodnout a reagovat na situaci tak, že navrhne sám další číslo (po analýze situace a na základě informací, které z ní získá). Tato fáze by měla mít asi 4 kola a neměla by trvat déle než 10 minut. Na začátku se zdají žákovi všechna čísla stejně důležitá. Na konci se postupně dopracuje k objevení výhodných strategií, např. že s číslem 17 vyhraje, zatímco jiná

a formuluje.	čísla (18 nebo 19) se nezdají pro hru vhodná. Skupina vztahů „Jestliže zahrají 14 nebo 17, mohu vyhrát“ může zůstat pouze na implicitní úrovni; žák hraje s touto strategií implicitně, aniž je schopen ji formulovat.
Posloupnost situací akcí tvoří proces, pomocí něhož žák tvoří strategie, tj. „učí se sám“ metody řešení úloh.	

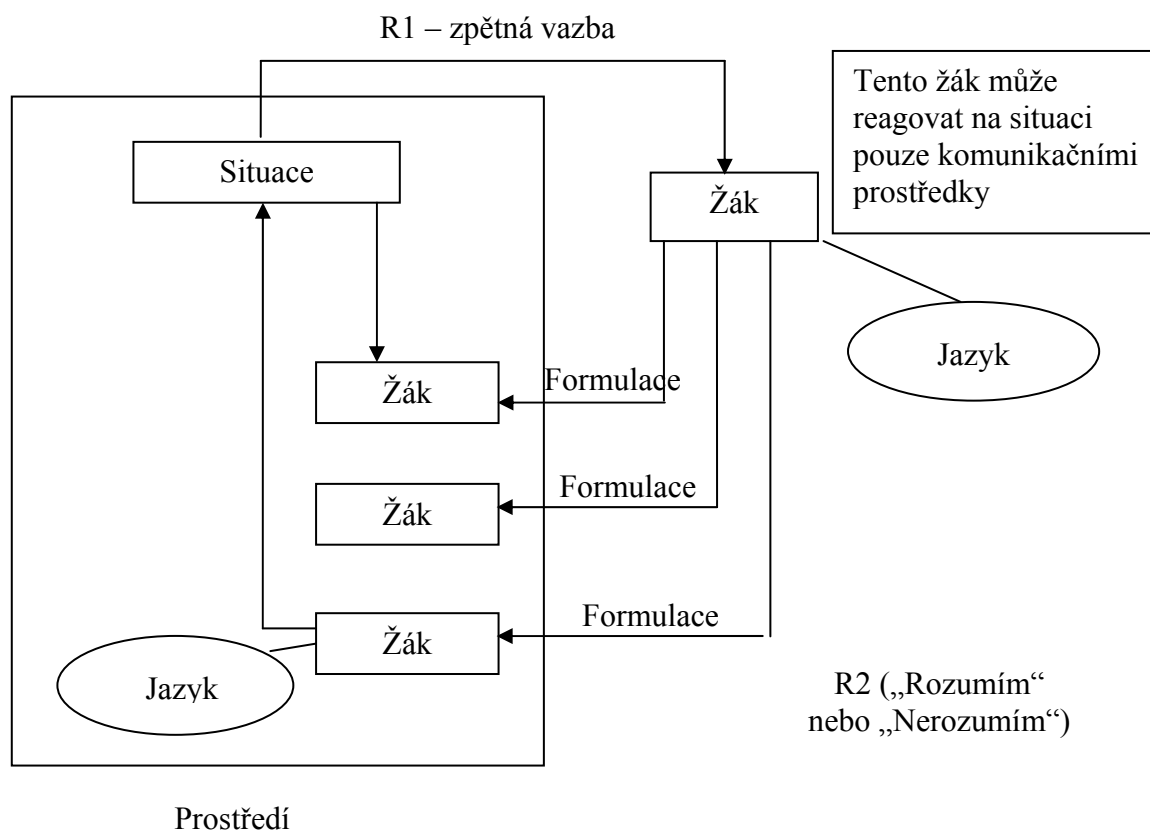


Při každém kroku se situace mění – mění ji protihráč. Po několika krocích získává žák informaci o kvalitě svých akcí – vyhraje nebo prohraje, vyřeší úlohu nebo nevyřeší apod.

Typ a-didaktické situace	Realizace ve <i>Hře na 20</i>
<i>Situace formulace</i> Schematicky je znázorněna na obr. 5. K tomu, aby skupina vyhrála, nestačí, aby jeden věděl, jak má hrát (tj. implicitní model), žák musí také naznačit svým spoluhráčům ze skupiny, kterou strategii navrhuje. Tak je každý žák veden k tomu, aby předvídal. Jediným prostředkem, který žák má, je formulovat strategii. Má dvě zpětné vazby: - okamžitou od žáků ve své skupině, kteří rozumějí nebo nerozumějí jeho výkladu, - zpětnou vazbu z prostředí při hraní následujícího kola, zda formulovaná a použitá strategie je vítězná nebo ne.	<i>Hraní Skupina proti skupině</i> Žáci jsou rozděleni do dvou (pokud možno stejně početných) skupin. Pro každé kolo stanoví učitel (náhodně) v každé skupině jednoho žaka, aby hrál za svou skupinu u tabule; jestliže vyhraje, skupina získá bod. Žáci rychle zjistí, že je nutno ve skupině společně plánovat a diskutovat strategii. Někteří budou už od začátku vědět, že „Musíš říci 17.“ Pro tuto fázi se doporučuje 6 až 8 kol, 15-20 minut. Kdokoli je u tabule, je v a-didaktické situaci akce.

Žáci si postupně vytváří jazyk, kterému budou všichni rozumět, který zahrne všechny objekty a důležité vztahy situace přiměřeným způsobem (tj. argumentací a přiměřenými akcemi). V každém okamžiku je tvořen jazyk, který je ověřován z pohledu srozumitelnosti, snadnosti jeho konstrukce a délky zpráv, které může předávat.

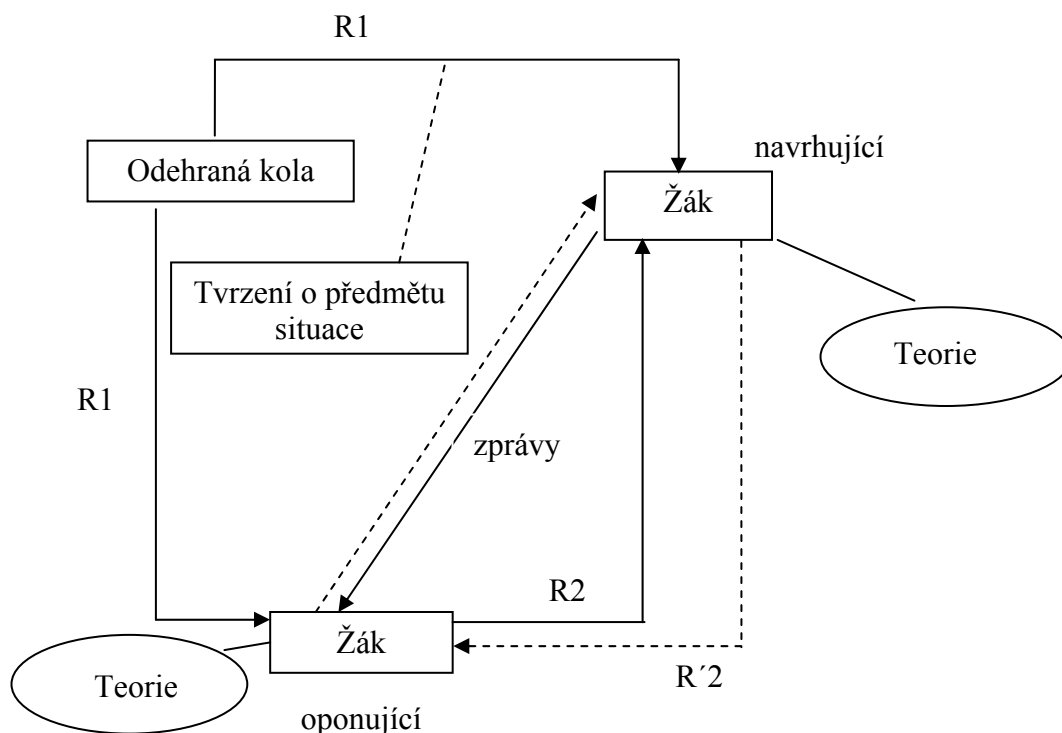
Obr. 5



Typ a-didaktické situace	Realizace ve Hře na 20
<i>Situace ověřování</i> Schematicky je znázorněna na obr. 6. Žák pracuje se vztahem mezi „reálnou“ situací, konkrétní nebo nekonkrétní, a jedním nebo více tvrzeními o předmětu situace. Ověřování motivuje žáky, aby diskutovali o situaci, a podporuje formulování jejich implicitních ověření. Jejich odůvodňování je však často nedostatečné, nesprávné, neobratné. Někdy přijímají nesprávné věty, neúplné nebo chybné důkazy. Žákům musí být dána možnost odhalit vlastní chyby. To je nutné k vybudování nové znalosti.	<i>Hraní Skupina proti skupině</i> Hraje se ve stejných skupinách jako v předchozí etapě. Skupiny střídavě navrhuji „pravdivá“ tvrzení, jejichž pravdivostí si jsou jisti. Nejprve vysloví tvrzení, které označí jako „domněnku“. Až ji všichni přijmou, stane se větou. Jestliže jedna skupina navrhne domněnku, druhá skupina se stává oponentem a musí rozhodnout: - zda je návrh pravdivý; v tom případě vyhrává bod navrhující družstvo a získává bod, - zda je návrh nepravdivý; v tom případě se tato skupina stane navrhovatelem opačné domněnky a ve hře jsou už body dva, - může také pouze říci, že o domněnce pochybuje. Oponent může: - žádat, aby navrhovatel odehrál 5 kol hry, v nichž bude používat navržené pravidlo. Oponent může žádat, aby navrhovatel hrál hru tak dlouho, až jeden z nich stáhne svůj

	návrh. Druhý pak získává body. - Žádat od navrhovatele přesvědčivý matematický důkaz, V tomto případě získává 5 bodů ta skupina, která druhou přesvědčila, „přesvědčený“ získává body dva
--	--

Obr. 6



Popsaná organizace výukové jednotky byla realizována ve Francii s žáky ve věku 10-11 let. Byla zařazena jako připomenutí a další rozšíření na dělení přirozených čísel (v situaci, kdy „smysl“ operace dělení byl jiný než ten, v němž bylo dělení probíráno dříve). Dalším cílem bylo pomáhat rozvoji objevování a odůvodňování tvrzení u žáků. Podrobný popis a průběh jednotky lze najít např. v (Brousseau, 1997).

1.2. Realizace Hry na 20 Ve škole Na Slovance v Praze 8

V říjnu 2005 byla tato výuková situace použita v 8. ročníku a pak i (v omezeném rozsahu) v 6. ročníku základní školy Na Slovance v Praze 8. Nyní popíšeme zkušenosti z těchto vyučovacích hodin a vysvětlíme rozdíly proti originální organizaci a jejich důvody.

Prostředí, ve kterém se hra hrála (informace o třídě)⁷:

- Tato hra byla realizována v osmém ročníku ve třídě s 24 žáky. Do této třídy přišlo 11 nových žáků, kteří se s didaktickou hrou ještě nesetkali.
- Kmenoví žáci se s didaktickými hrami již setkali.

⁷ Vyučující Alena Pelantová.

- Tato hra byla pro všechny žáky novinkou.

Hra

Vysvětlení pravidel hry a ukázka (cca 7 minut):

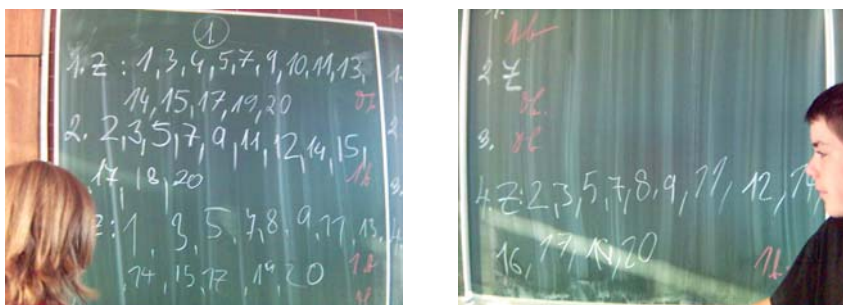
- Žákům jsem vysvětlila pravidla hry, kdy každý žák se snaží říci 20 přičtením 1 nebo 2 k číslu, které řekne soupeř. Jeden z hráčů začne číslem 1 nebo 2, druhý pokračuje přičtením 1 nebo 2 a nahlas řekne výsledek, Dále pokračuje první hráč přičtením 1 nebo 2 k výsledku, atd.....
- hru jsem demonstrovala před tabulí s jedním žákem, proběhly dvě hry.

Realizace hry ve dvojicích (cca 5 minut):

- Třída se rozdělila do dvojic a žáci hráli proti sobě.
- Hráli celkem čtyři hry. Hru začínal vždy jiný hráč.
- Průběh hry si zapisovali na papír.

Realizace hry ve skupinách (cca 15 minut):

- Žáci byli rozděleni do dvou skupin.
- Sdělila jsem jim, že ve skupině bude pro každou hru náhodně vybírán reprezentant, který před tabulí (prováděli zde zápis) bude hrát s reprezentantem druhé skupiny.
- Žáci si ve svých skupinách vzájemně sdělovali, co při hře ve dvojici objevili, domlouvali si strategii, jak své soupeře porazit. Mohli svému hráči radit.
- Každý vítěz získával bod pro svůj tým
- Žáci hráli celkem čtyři hry.



Obr. 7. Ukázka žáků při hře ve skupinách

Skupiny formulují své poznatky (cca 10 minut):

- Z časových důvodů jsme kolem strategií řešení této hry nerozvíjeli hromadnou diskusi.
- Pro situaci ověřování jsem zvolila alternativu, kdy žáci sepsali poznatky na fólii, a různé postupy řešení promítli na zpětném projektoru a vysvětlili. Ukázka argumentace viz obr. 8

Kdo dá číslo 2 a bude pokračovat
Rozdělím třetím číslem vyhraje

Jestliže dáte jako první číslo 2
vaše výhra je jistá neboť na
vám vyjde každé třetí číslo
od čísla od čísla 2 to jest:
5, 8, 11, 14, 17, 20
Pokud se na ni jako prvním
nepodaří dosáhnout čísla 2
tak se musíte pokusit navázat
na řadu výše uvedených čísel,
aby jste vyhráli.

Obr. 8. Ukázky argumentace žáků

Závěr:

- Při práci ve dvojici žáci nejdříve volili náhodný postup řešení. Záhy někteří z nich správnou strategii odhalili a začali vítězit. Z jejich strany bylo vidět maximální soustředění a chuť vyhrát.
- Při práci ve skupině bylo velmi zajímavé pozorovat, jak žáci, kteří pochopili princip hry, vše vysvětlují ostatním, jak se vzájemně doplňují, „dohadují se“, jakou zvolit taktiku, aby uspěli. Byli nuceni formulovat své myšlenky co nejpřesněji, aby ostatní spoluhráči rozuměli.
- Žáci odhalili, že kdo začíná, je ve výhodě a pokud neudělá numerickou chybu, vyhraje.
- V některých situacích bylo z reakcí žáků jasné, že našli vítěznou strategii, i když ji ještě přesně neformulovali. Např. při skupinové soutěži nastala situace, kdy žákyně soutěžila u tabule a napsala číslo 14. Protihráč z druhé skupiny řekl: „Tak to už nic, to vyhráli.“

Zkušenosti:

- Žáci dosahovali čísla 20 zpočátku náhodně.
- Žák, který odhalil strategii nejdříve, začal okamžitě vyhrávat.
- Žáci odhalili strategii, ale ne všichni dokázali přesně formulovat a provádět zápis.
- Tuto hru lze hrát i s žáky nižších ročníků (experiment provedl kolega v šestém ročníku), avšak je nutné počítat s větší časovou náročností.

Hra na 20 není jedinou aktivitou, která byla realizována ve formě didaktické situace obsahující a-didaktické situace akce, formulace a ověřování. V (Složil, 2005a, 2005 b) je popsána a vyhodnocena analogická didaktická situace, která je určena pro odhalování kritérií pro dělitelnost čísel, v (Pelantová, Novotná, 2004) pro řešení slovních úloh o dělení celku na nestejně části. Posledně jmenovaná výuková jednotka se lišila od předchozích v tom, že

nebyla organizována jako soutěžní hra. Byla však zachována organizace tak, aby postupně proběhla a-didaktická situace akce, formulace a ověřování. Obě didaktické situace se ukázaly jako motivující, žáci se do řešení aktivně zapojili, výsledky předčily naše očekávání jak v oblasti formulování, použití různých reprezentací pro vyjádření myšlenek a pro ověřování správnosti použitých strategií a získaných výsledků, ale také v trvalosti získaných znalostí a dovedností.

2 ANALÝZA A PRIORI

2.1 Úvod

Jedním z nejdůležitějších nástrojů při přípravě výukových situací je analýza a priori. Provádí ji učitel před samotnou realizací výukové jednotky. Na základě popisu jednotky se snaží nejen připravit plán aktivit, ale také odhadnout vlastní průběh:

- navrhnout rozdělení hodiny do jednotlivých fází,
- zamyslet se nad možnými reakcemi a postoji žáků a rozmyslet si možné vlastní reakce (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy),
- zamyslet se nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými),
- rozmyslet si, jaké vědomosti a poznatky jsou pro danou strategii nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat.

Analýza a priori má tedy pro učitele velkou informační hodnotu: poukazuje na případná úskalí hodiny, na možné obtíže žáků při řešení úlohy.

2.2 Úloha puzzle

Analýzu a priori si nyní přiblížíme na úloze „Puzzle“. Tato úloha byla převzata z publikace (Brousseau, N. et G., 1981), kde je součástí alternativního způsobu výuky desetinných čísel a zlomků a určena desetiletým žákům. Cílem úlohy je procvičit základní operace se zlomky a desetinnými čísly a jejich aplikace při zvětšování geometrických útvarů.

V následující ukázce bude tato úloha využita jako motivace pojmu poměr u dvanáctiletých žáků. Podrobněji viz (Hrabáková, 2005a).

Pokyny k úloze Puzzle:

- *„Zde máte puzzle. Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky, větší než je tento model. Musíte se držet následujícího pravidla: úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm. Každá skupina obdrží jednu skládanku. Každý žák vyrobí jednu nebo dvě části. Až skončíte, měli byste být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem.“*
- Děti pracují ve čtyř- až pětičlenných skupinách. Po krátké poradě ve skupince se rozdělí a každý pracuje na své části skládanky.
- Učitel vyvěsí (nebo nakreslí) na tabuli zvětšenou skládanku.
- Učitel na tabuli napíše: 4 cm → 7 cm.

Pomůcky

- Pět sad stejných skládanek
- Barevné papíry na výrobu zvětšených skládanek
- Papíry na pomocné výpočty a úvahy
- Náhradní pravítka, nůžky

2.3 Analýza a priori úlohy Puzzle

Zaměříme se na analýzu a priori pro tyto charakteristiky:

- typ úlohy
- řešitelské strategie
- proměnné úlohy

Typ úlohy

- **cíl úlohy**

„*Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky ...*“ Děti mají za úkol vytvořit svou vlastní skládanou – tj. zjistit potřebné rozměry, jednotlivé díly narýsovat a vystřihnout. Musí přitom respektovat dané výchozí podmínky: „*úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm*“ i cílové podmínky: „*být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem*“.

- **charakter zadání**

Zadání se skládá ze 3 částí : *slovní* – pokyny učitele

materiální – model skládanek

vizuální – náčrt modelu na tabuli, zaznamenaný údaj

Projev učitele je pomalý, jasný, stručný, učitel nepoužívá odbornou matematickou terminologii.

Zadávání úlohy je důležitým momentem, všechny děti musí pochopit, co mají dělat, učitel už totiž dál do jejich práce nezasahuje – nejvýše povzbudí, napomene, dohlédne, aby všechny děti pracovaly.

- **znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání**

Jedná se spíše o znalosti všeobecné, nikoliv matematické. Dítě musí rozumět slovu *puzzle*, *úsek*, *model*, *obrazec*. Musí si umět zadání „přeložit“ do matematického jazyka (*zvětšit, 4 cm* → *7 cm*)

- **obtíže v chápání zadání**

Děti musí dávat velký pozor, zadání je pouze slovní, nikoliv písemné. Nejobtížnější částí zadání je „úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm“. Zde ale pomůže náčrt na tabuli a zapsání klíčového údaje $4\text{ cm} \rightarrow 7\text{ cm}$.

Řešitelské strategie

K úspěšnému vyřešení úlohy máme k dispozici strategie aritmetické a geometrické. Klíčovou roli zde přitom hraje předchozí znalost/neznalost poměru.

- **geometrické strategie G**

správné strategie:

- a) zobrazit všechny dílky puzzle ve stejnolehlosti s koeficientem $7/4$
- b) zobrazit celý čtverec ve stejnolehlosti s koeficientem $7/4$, následně zobrazit potřebné úseky a puzzle dorýsovat
- c) pomocí redukčního úhlu zjistit zvětšené délky všech/jen některých rozměrů

nesprávná strategie:

- d) přidat ke všem stranám 3 cm

- **aritmetické strategie A**

správné strategie:

- a) zvětšit v poměru $7 : 4$

$$\text{a1) násobit zlomkem } \frac{7}{4}$$

$$\text{a2) násobit desetinným číslem } 1,75$$

- b) využít trojčlenku:

$$4\text{ cm} \dots\dots\dots 7\text{ cm}$$

$$\uparrow 3\text{ cm} \dots\dots\dots x\text{ cm} \uparrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{7} \quad \Rightarrow \quad x = 5,25\text{ cm}$$

- c) použít „selský rozum“:

$$4 \rightarrow 7$$

$$2 \rightarrow 3,5$$

$$1 \rightarrow 1,75 \text{ atd.}$$

nesprávná strategie:

d) „přičíst trojku“ ke všem rozměrům

G a) , G b)

Znalosti: poměr, stejnolehlost, dělení úsečky na n dílů (redukční úhel), rýsování bez použití pravoúhlého trojúhelníku a kružítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: „Je nutné zobrazovat všechny části skládky?“ Takto se zamyslí zkušenější řešitelé a pomocí stejnolehlosti zobrazí jen ty nejnutnější části. Zbytek buď dorýsují, nebo dopočítají.

G c)

Znalosti: poměr, redukční úhel (pomocná polopřímka), přenášení úsečky, rýsování mnohoúhelníků pomocí pravítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: Jaké rozměry jsou nutné? Jaké zbytečné?

G d)

Znalosti: přesné rýsování.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák na to může přijít sám: např. zvětšuje trojúhelník, přidá 3 cm k jedné straně, ke druhé, pak změří třetí a zjistí, že „to nevychází“.

A a)

Znalosti: násobení zlomků (a1), násobení desetinných čísel (a2), problematika zaokrouhlování.

Možná úskalí: převod zlomku na číslo s desetinnou čárkou, předčasné zaokrouhlování, násobení desetinných čísel/zlomků.

A b)

Znalosti: znalost trojčlenky, správné určení tří členů a neznámé, úprava lineární rovnice.

Možná úskalí: chybná úprava lineární rovnice.

A c)

Znalosti: základní operace s celými a desetinnými čísly.

Schopnosti: logické uvažování, představivost, předchozí zkušenost.

Možná úskalí: početní chyby (např. dělení, násobení).

A d)

Znalosti: přičítání přirozeného čísla k přirozenému číslu.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák by to měl zjistit v závěrečné fázi, kdy bude chtít zvětšený útvar narýsovat.

2.4 Srovnání analýzy a priori s výsledky experimentu

Experiment byl proveden 3. a 4.11.2003 na Gymnáziu V. Hraběte v Hořovicích v sekundě osmiletého gymnázia. Experiment proběhl při cvičení z matematiky, kdy jsou žáci rozděleni do dvou skupin (12 a 13 žáků) podle cizích jazyků. Celá aktivita tedy proběhla dvakrát za sebou.

Při zadávání úlohy se nevyskytly žádné potíže. Žáci byli na skupinovou práci zvyklí, nepřekvapila je. Pozorně poslouchali pokyny, k zadání úlohy neměli žádné dotazy. Vysvětlujeme si to tím, že jazyk úlohy nevyžaduje odborné matematické znalosti, ale spíše znalosti všeobecné. Dalším faktorem je také věk žáků a jejich zkušenost s řešením slovních úloh. V sekundě už takové zkušenosti mají.

V analýze a priori jsme předpokládali, že se může objevit osm strategií, čtyři geometrické a čtyři aritmetické.

Strategie G a), b) a c) vyžadují znalost poměru a stejnolehlosti. Strategie A b) předpokládá znalost trojčlenky. S poměrem, stejnolehlostí, ani trojčlenkou se žáci sekundy ještě nesetkali, tyto strategie se v žádném případě neobjevily.

Žáci vymysleli celkem pět různých strategií, dvě z nich (S2 a S4) jsme v analýze a priori nepředpokládali.

- **S 1: přidat ke všem rozměrům 3 cm**

Tato strategie v analýze apriori odpovídá strategii G d). Jedná se o nesprávnou strategii. Všechny skupiny ji vzaly v úvahu. Vysvětlujeme si to tím, že zvětšování „o x cm“ je žákům bližší než zvětšování „ x -krát“. Častěji se s ním setkávají jak v běžném životě, tak ve škole.

- **S 2: rovnice**

Tuto strategii jsme v analýze apriori nepředpokládali. Jde o nesprávnou strategii. Domníváme se, že žáci byli ovlivněni předchozí látkou – řešením slovních úloh, kde rovnice používali. Proto se snažili tento postup aplikovat i na úlohu puzzle. Rovnici ale sestavili chybně.

- **S 3: vynásobit všechny rozměry číslem 1,75**

Tato strategie odpovídá strategii A a2).

Je zajímavé, že všichni, kdo použili tuto strategii, počítali s desetinným číslem 1,75 a nikoliv se zlomkem $\frac{7}{4}$. Domníváme se, že žáci desetinným číslům více důvěřují. Setkávají se s nimi v každodenním životě. Ve škole s nimi pracují od pátého ročníku. Zlomky se podrobněji probírají až v sedmém ročníku. Žáci s nimi nemají takovou zkušenost. Počítání s desetinnými čísly upřednostňují před zlomky.

- **S 4: zvětšení o 75 %**

Tato strategie nás velmi překvapila. Žáci se totiž ve škole s procenty ještě nesetkali. Podle slov paní učitelky byla procenta pro žáky velmi zajímavou problematikou a žáci byli nedočkaví, až se o nich dozví více. Vysvětlujeme si to faktem, že procenta jsou v dnešní době všude kolem nás: DPH 5 %, sleva o 20 %, volná paměť na disku C je 30 % atd.

Strategii s procenty úspěšně použila pouze jedna skupina (č. 5). Velmi blízko správnému postupu byl také jeden žák ze skupiny č. 2.

Po experimentu jsme s žákyní ze skupiny č. 5, která strategii vymyslela, povídali. Zajímalo nás, kde se o procentech dozvěděla. Řekla, že o procentech s ní mluvil tatínek a vysvětlil jí, že procento je setina. Zbytek už vymyslela sama.

- **S 5: „selský rozum“**

Tato strategie odpovídá strategii A d) v analýze a priori. Použila ji pouze jedna skupina.

2.5 Závěr

V pracovní dílně jsme se zabývali analýzou a priori úlohy Puzzle. Úloha byla vybrána především pro svoji bohatost – zasahuje jak do geometrie tak do aritmetiky, mohou ji řešit nejen žáci sedmých tříd ZŠ, ale i žáci starší.

V závěru jsme své strategie konfrontovali se strategiemi žáků, kteří úlohu řešili. Není samozřejmě možné, abychom v analýze a priori předvíдали všechny řešitelské strategie, i přesto nás analýza velmi obohatila. Umožnila nám podívat se na úlohu z jiného pohledu, pohledu žáka, řešitele úlohy. Zamýšleli jsme se nad tím, jaké musí mít předchozí znalosti, s jakými obtížemi se může setkat, jaké strategie může použít.

Cílem této kapitoly bylo ukázat čtenáři analýzu a priori jako užitečný nástroj, který učitelé pomůže při přípravě a tvorbě vyučovací jednotky. Zároveň čtenáři naznačujeme postup, jak je možné analýzu a priori provádět.

3 PŘEKÁŽKY

V následující kapitole se budeme věnovat důležitému jevu, kterým jsou překážky v kognitivním vývoji, se kterými se žáci mohou setkat. Stručně se nejprve zmíníme o jednotlivých typech překážek a jejich významu. Poté se zaměříme na konkrétní problematiku

jevu nekonečna v geometrickém kontextu. Pokusíme se vyslovit možné epistemologické překážky a navrhnout otázky, které by mohly pomoci k jejich překonání.

3.1 Úvod

Ještě před zformulováním TDS se její autoři zabývali jevem překážka, který jim pomohl lépe pochopit kognitivní vývoj jedince. Překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stálé a opakují. K opakování dochází u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. „dětí obvykle dělají tuto chybu“), a také v historii.

Překážkou je znalost, neboť existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěšně použít. Tato oblast je obvykle velice dobře jedinci známa a znalost je ověřena mnoha zkušenostmi. V novém kontextu však tato znalost selhává a dává špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření „lepší“ znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Znalost jakožto překážka má tendenci se lokálně přizpůsobit s tím, že ona sama je měněna, jak nejméně je to možné. Důvodem je to, že překážka je znalost vztahující se k nějakému pojmu, tj. k matematickému pojmu, který souvisí s celou množinou situací, kde tato znalost dává smysl, a s celou skupinou významů, které jedinec může spojovat s tímto pojmem, a s mnoha nástroji, tvrzeními a algoritmy, které jedinec může používat při práci s tímto pojmem (Brousseau, 1997). Podobně také v Radford (1997) nebo Spagnolo a Čižmár (2003).

Překážky vyskytující se při vyučování matematiky mohou mít různé důvody. Jejich příčiny lze klasifikovat do tří skupin: *ontogenetický původ* (jsou spojeny s vlastní kognitivní kapacitou studenta odpovídající danému vývojovému období); *didaktický původ* (výběru didaktických stylů a strategií nebo na volbě vzdělávacího systému) a *epistemologický původ* (vztahují se k samotnému procesu nabývání znalostí; jsou to překážky, kterých se nemůžeme a ani bychom se neměli vyvarovat, neboť mají fundamentální formativní funkci pro danou znalost; právě tyto můžeme nalézt v historii samotného pojmu).

V následující části se budeme věnovat konkrétním překážkám, které lze pozorovat v uchopování pojmu nekonečno u žáků na 2. stupni základních škol. Zde se s jevem nekonečno setkáváme především (nikoli však pouze) prostřednictvím geometrických pojmů, a to implicitně – např. bezrozměrný, resp. nekonečně malý bod – i explicitně – např. nekonečně dlouhá přímka.

3.2 Překážky a jev nekonečno v geometrii

Pojem epistemologické překážky bychom mohli srovnat s paradoxem⁸. Paradoxy provázejí lidské myšlení od antiky, přesněji od doby, kdy lidé začali vědomě užívat rozumové uvažování pro získávání nových poznatků. Paradoxy se velmi často objevovaly ve spojitosti

⁸ Paradox je „neočekávané, překvapující tvrzení, zdánlivě protismyslné a odporující běžným soudům, pokládaným za správné“. Slovo paradox se skládá ze dvou částí „para“ a „doxa“. „Doxa“ je z řeckého názor, mínění nebo také výklad. Je to protiklad k „epistémé“, neboli vědění, které je trvalé a neměnné. Předpona „para“ značí mimo, vedle nebo proti (Akademický slovník cizích slov, 1995).

s pokusy o formalizaci nekonečna a často to byly právě paradoxy, které posunuly pojetí nekonečna dále. Velice známé jsou Zenonovy aporie, které jsou krásným příkladem procesu překonávání paradoxu - překážky.

Zamyslíme-li se, co může být největší překážkou pro pochopení nekonečna, pravděpodobně nás nepřekvapí, že je to znalost konečného. Právě s konečností máme mnoho zkušeností. Všechny děje, všechny objekty, všechny procesy, se kterými se v běžném životě setkáváme, jsou konečné. Mnohdy si ani neuvědomujeme, že využíváme právě znalosti o konečnosti. Například, některé vlastnosti konečných množin, jako „část je menší než celek“, kterou postuloval i Eukleides ve svých *Základech*, chybně přenášíme na nekonečné množiny a odmítáme výsledky, které nekonečné množiny přinášejí.⁹ Znalost, že část je vždy menší než celek je správná, pokud pracujeme s konečným množstvím, ale nesprávná, pokud pracujeme s množstvím nekonečným. Vystavení této znalosti kontextu nekonečných množin dovoluje nejen charakterizaci toho, co je nekonečná množina, ale také dovolí hlubšímu porozumění konečným množinám. Znalost konečného splňuje tedy všechny požadavky kladené na překážku v porozumění nekonečnu.

Nyní se budeme věnovat dvěma důležitým projevům nekonečna, se kterými se žák na 2. stupni ZŠ setkává – „nekonečně velké“ a „nekonečně malé“.

3.2.1 Příмка – nekonečně dlouhá

Do jaké míry dítě rozumí tomu, že příмка je nekonečně dlouhá? Můžeme očekávat, že tato znalost o přímce není rozhodně jednoduchá a že dítě musí překonat překážky. Jak mu můžeme pomoci? Lze se poučit z role paradoxů, kterou sehrály (a sehrávají) ve vývoji matematiky, a pokusit se navodit stav rozporu ve znalostní struktuře jedince. Mohou nám k tomu dopomoci i tzv. nekorektní otázky. Pokusíme se odhadnout odpovědi a znalosti, které k nim byly použity.

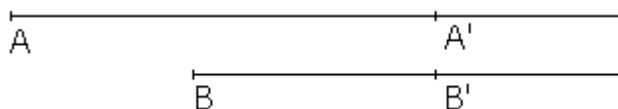
Otázka: Je delší příмка nebo polopřímka?	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
<i>Příмка je delší než polopřímka.</i>	<i>část je menší než celek</i>
<i>Nelze určit, která je delší.</i>	<i>příмка i polopřímka jsou nekonečné</i> <i>část je menší než celek</i>
<i>Obě jsou stejně dlouhé.</i>	<i>příмка i polopřímka jsou nekonečné</i>

Se všemi z těchto odpovědí se setkáváme u žáků základních škol i u studentů středních škol. S odpovědí, že delší je polopřímka, jsme se nikdy nesetkali¹⁰ a ani ji nepředpokládáme. Z našeho hlediska je velmi důležitá druhá z odpovědí. Zde se jedinec do vnitřního konfliktu pravděpodobně již dostal. K navození rozporu i k jeho překonání lze pokračovat dalšími otázkami:

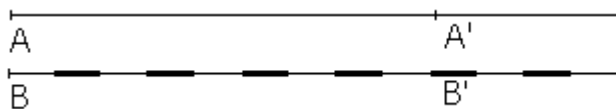
Která z polopřímek je delší?

⁹ G. Galilei (1564-1642) ve své práci *Dialog o dvou hlavních systémech světa* v *Discorsi* se odvažuje pracovat s aktuálním nekonečnem, ale svých výsledků se zalekl, neboť přímo „odporovaly zdravému rozumu“. Podobně reagují i současní studenti.

¹⁰ O experimentech podrobněji v Prokopová (2003)



Máme dvě polopřímky. Jednu z nich rozdělíme na dílky (jak je naznačeno na obrázku) a každý druhý dílek obarvíme. Je delší polopřímka AA' nebo obarvená část polopřímky BB' ?



Třetí polopřímku opět rozdělíme, ale na menší dílky a obarvíme každý druhý. Opět se ptáme, zda je delší obarvená část polopřímky BB' nebo obarvená část třetí polopřímky.

Tyto úvahy můžeme rozvíjet a následně konfrontovat jednotlivé odpovědi. Jednotlivé otázky se snaží přivodit konflikt, který je výše zmíněn jako rozpor dvou znalostí:

přímka i polopřímka jsou nekonečně dlouhé ... část je menší než celek.

3.2.1 Bod – nekonečně malé

Nekonečno skryté v geometrickém bodu může být pro dítě ještě mlhavější než nekonečno nesené délkou přímky. Nekonečnost přímky lze přijmout snadněji, neboť ji necháváme zmizet mimo náš obzor. Avšak bod leží celý před námi a přes to může být nedosažitelný.

Cokoli, co známe z reálného světa, má nějaký rozměr. Ale i většina z toho, s čím se dítě setkává ve školské geometrii, má rozměr. Bod je něco, co s těmito objekty úzce souvisí, ale co tuto vlastnost nepřebírá. Žáci proto velmi často o bodu přemýšlí jako o významném místě jiného objektu, např. vrchol trojúhelníku, nebo ho ztotožňují s geometrickým obrázkem, např. tečkou.

Opět se pokusíme formulovat provokativní otázku, která by mohla vyvolat vnitřní konflikt, poté vyslovíme možné odpovědi a znalosti, které by k nim mohly vést.

Otázka: Máme úsečku AB o velikosti 5 cm. Představme si (v hlavě), že ji rozstříhneme na menší a větší část v poměru 2:3. Jaké geometrické objekty získáme? Pojmenujme je.	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Získáme dvě úsečky AC a CB .	Úsečka má dva krajní body. (Možnost I)
Získáme dvě úsečky AC a DB .	Úsečka má dva krajní body. (Možnost II)

S úsečkou jako rovnou čarou se dvěma krajními body pracuje už Eukleides a nepřipouští, že by krajní bod mohl chybět.

Otázka: ad I) Jak to, že bod C existuje dvakrát? Jak to, že je na dvou různých místech.	
Předpokládané odpovědi:	Znalost

<i>Jeden bod C přejmenujeme na bod D.</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Dva různé body mají různé označení.</i>
<i>Bod C jsme rozstříhli.</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Bod je objekt, který lze dělit.</i>
<i>Oba body C jsou jediným bodem, jen je pokaždé umístěn jinde.</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).</i>
Otázka: ad II) Kde byly body C a D původně na úsečce AB?	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
<i>Body C a D byly těsně vedle sebe, úsečku jsme rozstříhli právě mezi nimi.</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Dva různé body mají různé označení.</i> <i>Body na úsečce lze jeden po druhém oddělovat.</i>
<i>Body C a D byly původně jediný bod na úsečce AB (překrývají se).</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).</i>
<i>Body C a D spojením vytvoří jediný bod na úsečce AB.</i>	<i>Úsečka má dva krajní body.</i> <i>Bod je objekt, který lze dělit.</i>

Otázky, předpokládané odpovědi¹¹ a uvažované znalosti naznačují, že dítě, které řeší tento problém, se dostává na tenký led. Žák na ZŠ nemá prostředky pro řešení takových úloh, ale ani středoškolský student, který se setkal s otevřenými intervaly, často tuto zkušenost nepřenáší do geometrického kontextu úsečky. Žák je tak nucen pracovat se svými představami o úsečce a bodu. Některé jeho představy o objektech ho mohou dovést k takovým odpovědím, které budou pro něj samotného nepřijatelné, a tím motivovat snahu takové znalosti překonat.

Opět uvedeme možné navazující otázky, které problém dále rozvedou a zdůrazní rozpory.

Jestliže jsou body C a D těsně vedle sebe, ale jsou různé, existuje ještě něco mezi nimi. Pokud ne, existují tedy dva různé body, které nejde spojit úsečkou nebo neexistuje střed mezi nimi? Argumentace lze převést do aritmetiky, kdy úsečku nahradíme částí číselné osy a body číslly.

Jestliže se body překrývají, nepodařilo se úsečku rozstříhnout, protože dvě části, které vznikly, mají společný bod. Lze to udělat tak, aby byly rozstřížené?

Jestliže body C a D byly původně jediným bodem, který jsme rozstříhli, jak takový bod vypadá. A jak vypadá rozstřížením nově vzniklý bod?

Otázky mají navodit takový kontext, který by odhalil slabiny stávající znalosti – představě o bodu a úsečce a tak nejen upozornil na možnou překážku, ale ukázal směr, jak ji překonat.

3.3 Závěr

¹¹ Všechny zde uvedené předpokládané odpovědi byly v rozhovorech zaznamenány. Více v Prokopová (2003).

Tato kapitola měla přiblížit pojem překážka ve smyslu znalosti, která v novém kontextu brání získání znalosti ‚lepší‘. V pracovní dílně jsme se zabývali konkrétními znalostmi o bodu a přímce související s jevem nekonečna. Pokusili jsme se předpovědět jaké znalosti by mohly hrát roli překážky a formulovali jsme několik problémových otázek, které mohou posloužit jednak jako diagnostický nástroj, ale také jako prostředek k překonání překážek. Jev nekonečno byl vybrán proto, že jsme přesvědčeni, že nabízí bohaté možnosti pro rozvoj myšlení jedince. Geometrický kontext byl vybrán proto, že se s ním dítě ve škole setkává již na prvním stupni, i když z počátku implicitně. Proto lze dobře sledovat možné překážky, které mají tendenci se v čase opakovat.

Na závěr zdůrazníme, že cílem těchto úloh není, aby žák uspokojivě odpovídal na uvedené otázky, ale aby konfrontoval své znalosti a představy. Tedy jediným cílem je, aby přemýšlel a tím se rozvíjel. Zcela by naše snažení pozbylo smyslu, kdybychom mu odpovědi prozradili (pokud to je vůbec možné). Pak by překážka nemohla být překonána, pravděpodobně by se projevila později znovu.

4 ZÁVĚR

V pracovní dílně jsme se věnovali třem aktivitám, které demonstrovaly tři různé aktivity učitele při využívání TDS ve své výuce. Aktivita *Hra na 20* demonstrovala základní typy didaktických situací a význam a-didaktické situace. Obsahovala dvě didaktické situace, které se kázaly jako motivující. Žáci se do řešení aktivně zapojili. Výsledky předčily naše očekávání jak v oblasti formulování, použití různých reprezentací pro vyjádření myšlenek a pro ověřování správnosti použitých strategií a získaných výsledků, ale také v trvalosti získaných znalostí a dovedností.

Další dvě aktivity *Puzzle* a *Nekonečno v geometrii* byly zaměřeny na přípravnou fázi, kdy učitel didaktickou situaci plánuje. Jak je popsáno v kapitole 2 od učitele se očekává, kromě dalšího, že se bude zamýšlet nad možnými reakcemi a postoji žáků a nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými). V pracovní dílně jsme společně přišli na správné strategie, které žáci v uvažovaném experimentu použili. Co nám činilo větší potíže bylo odhadovat strategie chybné a hledat jejich příčiny. To je však velmi důležitá součást analýzy a priority, na kterou následuje práce s chybou, která je podstatnou složkou a-didaktické situace (podobně také Hejný a Jirotková v tomto sborníku).

V aktivitě 3 jsme dále rozvíjeli práci učitele se specifickým typem chyby a to s překážkou. Demonstrovali jsme ji na zajímavém (a mnohdy samomotivujícím) jevu nekonečno. S diskuse usuzujeme, že toto téma učitele zaujalo i když ne všichni souhlasili se zařazováním podobných otázek do výuky. Avšak shodli jsme se na tom, že hledání souvislostí a příčin překážek v pojmotvorném procesu (jakéhokoli pojmu) je stěžejní součástí přípravy učitele a je i vhodným východiskem pro přípravu didaktické situace.

LITERATURA

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. [Edited and translated by Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Euklides. (1907). *Základy (Elementa)*. Překlad Servít, F. Praha: JČMF.

- Hrabáková, H. (2005a). *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF.
- Hrabáková, H. (2005b). Analysis A Priori of The “Puzzle” Activity. In J. Novotná (Ed.). *Proceedings SEMT 05*. Praha: UK-PedF, s. 349.
- Pelantová, A. – Novotná, J. (2004). Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh? In M. Ausbergerová, J. Novotná (Eds.), *IX. Setkání učitelů matematiky ze všech typů škol*. JČMF – ZU Plzeň, 2004, s. 229-235.
- Petráčková, V., Kraus, J. a kol. (1995) *Akademický slovník cizích slov*. Praha: Academia.
- Prokopová, M (2003). Students' Conception of a Point and its Relation to a Straight Line: A Comparison of Phylogenesis and Ontogenesis. In *Prace Naukowe: Matematyka IX*. Czestochowa: Wyzsa Sokola Pedagogiczna; Wydawnictwo WSP.
- Teorie didaktických situací v české škole: Dělitelnost přirozených čísel v 6. ročníku ZŠ*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF.
- Radford, L., (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17, 1. Vancouver: FLM Publishing Association, s. 26-33.
- Složil, J. (2005b). Didactical situations – A Different Way of Teaching Mathematics. In J. Novotná (Ed.). *Proceedings SEMT 05*. Praha: UK-PedF, s. 361.
- Spagnolo, F.; Čižmár, J. (2003) *Komunikácia v matematike na strednej škole*. Brno: Masarykova universita.