



Příprava a analýza didaktických situací

**Jarmila Novotná
Alena Pelantová
Hana Hrabáková
Magdalena Krátká**

Studijní materiály k projektu
Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP
č. projektu: CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem, státní rozpočtem České republiky a rozpočtem hlavního města Prahy v rámci Jednotného programového dokumentu pro cíl 3

© JČMF 2006



SU
 $\sum$ Společnost učitelů
matematiky JČMF
MA

Obsah

Úvod

1. Typy didaktických situací

- 1.1 Etapy a-didaktických situací
- 1.2 Realizace Hry na 20 ve škole Na Slovance v Praze 8
- 1.3 Dvě další ukázky

2. Analýza a priori

- 2.1 Úvod
- 2.2 Úloha Puzzle
- 2.3 Analýza a priori úlohy Puzzle
- 2.4 Srovnání analýzy a priori s výsledky experimentu

3. Překážky

- 3.1 Úvod
- 3.2 Překážky a jev nekonečno v geometrii – hledání překážek
- 3.3 Přirozená čísla jako překážka
- 3.4 Závěr

Úvaha na rozloučenou s textem

Literatura

Úvod

Vyučovací proces můžeme obecně charakterizovat jako posloupnost situací (přirozených nebo didaktických), které vedou k modifikacím v chování žáků typickým pro získání nových znalostí. Tento text je věnován přípravě didaktických situací, tedy situací ve třídě, kdy cílem je žáky něco naučit; stručně lze říci, situací, které slouží pro didaktickou potřebu. Pozornost je věnována hlavně přípravě takových situací, při nichž učitel předává žákům část zodpovědnosti za vyučovací proces, tedy část svých pravomocí. Žáci něco zjišťují a objevují sami, vytvářejí model a kontrolují jeho správnost a užitečnost, případně vytvářejí jiný model, který považují za vhodnější apod., bez přímých vnějších zásahů učitele. Jejich činnost je řízena pouze prostředím a jejich znalostmi, nikoli didaktickou činností učitele. Žák se stává zodpovědným za získání požadovaných výsledků. Úkolem učitele je jednak připravit takovou situaci, jednak institucionalizovat získané informace. Tyto znalosti jsou pak učitelem dále využívány a rozvíjeny.

Ten ze čtenářů, kdo se již setkal s Teorií didaktických situací v matematice (dále budeme stručně psát TDS), ví, že zde používáme právě tuto teorii. Teorii, která byla vytvořena ve Francii již před více než třiceti lety a od té doby je stále živá a stále ji její autor Guy Brousseau a jeho spolupracovníci a žáci rozvíjejí a doplňují. Ty, kteří tuto teorii dosud neznají, seznámíme se základními pojmy v první kapitole textu.

V České republice je v současné době hlavní pozornost zaměřena na realizaci zásad Rámcových vzdělávacích programů (RVP) formou tzv. Školních vzdělávacích programů (ŠVP). Čtenář se proto může oprávněně ptát, proč pracujeme v rámci TDS, zda TDS odpovídá koncepci vyučování, kterou popisuje RVP. Na tuto otázku odpovídá např. J. Složil v (Složil, 2005): *V ničem si neprotiřečí. TDS i RVP chtějí nový přístup, přístup zaměřený na žáka, mimo jiné i na rozvoj jeho nadání. Teorie didaktických situací svým zaměřením rozhodně přispívá k rozvíjení klíčových kompetencí uvedených v RVP.*

Text je rozdělen do tří základních kapitol. V každé kapitole jsou nejprve shrnuty pojmy, které tvoří její teoretický rámec. Pak následují ilustrace, které vycházejí ze zkušeností autorek z praxe a které jsou současně výzvou pro čtenáře, aby se o něco podobného pokusil ve své praxi i sám.

V kapitole 1 *Typy didaktických situací* čtenáře seznámíme s pojmy vázanými na didaktickou situaci. Pro větší srozumitelnost výkladu nebudeme používat příliš mnoho teoretických vymezení pojmů, ale vše budeme ilustrovat na příkladu jedné didaktické situace, nazvané *Hra na 20*. Vycházíme přitom z knihy (Brousseau, 1997). Na „teoretický“ výklad Hry na 20 navazuje shrnutí zkušeností z realizace této aktivity ve vyučování.

Po seznámení se se základními pojmy TDS budeme přidávat další pohledy na přípravu výukových situací. Kapitola 2 *Analýza a priori* je věnována tomu, co vše je třeba si rozmyslet a připravit před realizací navržené didaktické situace, chceme-li, aby situace byla úspěšná, žáci získali vědomosti, které jsme plánovali, abychom byli co nejlépe připraveni na to, co se může ve třídě odehrát (i když asi nikdy nemůžeme být připraveni na všechny eventuality, které mohou nastat, čím podrobnější je naše příprava, tím snáze budeme čelit i nepředpokládaným událostem). K ilustraci analýzy a priori byla zvolena úloha Puzzle.

Jedním ze stěžejních úkolů učitele je rozpoznat obtíže, na které mohou žáci při získávání nových znalostí narazit. Ty mohou být různého charakteru a různého původu. Je jim věnována kapitola 3 *Překážky*.

K ilustraci různých typů překážek a jejich překonávání byl zvolen pojem nekonečno, speciálně nekonečno v geometrii. Pro ilustraci zjišťování překážek i pro formulaci návrhů pro jejich překonávání byly zvoleny různé matematické kontexty.

1. Typy didaktických situací

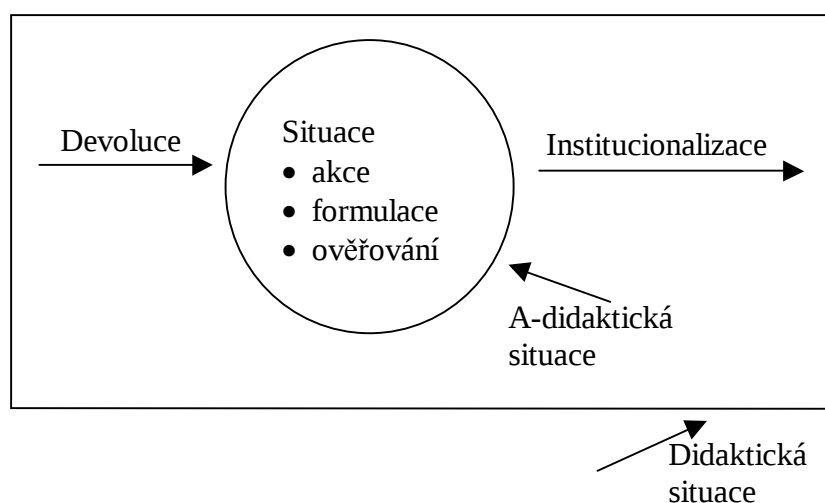
Situací budeme rozumět systém, do něhož vstupuje učitel, žák, prostředí, pravidla a omezení potřebná pro vytvoření daného matematického poznatku. Rozlišujeme situace nedidaktické, jejichž cílem není něco učit, a situace didaktické. Posláním *didaktické situace* je „někoho něco naučit“. Učitel organizuje plán činností, jejichž cílem je modifikovat nebo vytvořit žakovu znalost.

V dalším výkladu se budeme věnovat pouze situacím didaktickým. Speciálním případem didaktické situace je tzv. *situace a-didaktická*. Jejím cílem je umožnit žákovi získávat poznatky samostatně, bez explicitních zásahů učitele. Učitel předává žákovi zodpovědnost za akt učení se (*devoluce*).

A-didaktická situace se skládá ze tří etap (viz obr. 1.1):

- *Akce* – výsledkem je předpokládáný (implicitní) model, strategie, počáteční taktika
- *Formulace* – zformulování podmínek, ve kterých bude strategie fungovat
- *Ověření* (*validace*) – ověření platnosti strategie (funguje, nefunguje)

Obr. 1.1



Institucionalizací rozumíme přechod žákovy znalosti z role prostředku pro řešení jedné určité situace do nové role reference pro individuální nebo kolektivní použití v situacích dalších. Institucionalizace může nastat i v situaci spontánního učení. Ve většině případů je však svázána s didaktickými procesy řízenými učitelem.

1.1 Etapy a-didaktických situací

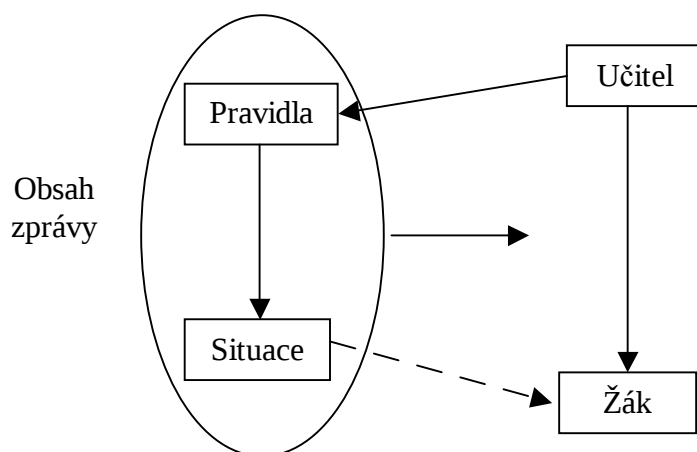
Jednotlivé etapy a-didaktických situací si přiblížíme na příkladu *Hry na 20*.

Hra na 20: Hraje se ve dvojicích. Každý hráč se snaží říci „20“ přičtením 1 nebo 2 k číslu, které řekl soupeř v předcházejícím kroku. Jeden z hráčů začne číslem „1“ nebo „2“; druhý pokračuje přičtením 1 nebo 2, nahlas řekne výsledek; první hráč pokračuje přičtením 1 nebo 2 k výsledku; atd.

Didaktická situace je zahájena instruktáží, učitel seznámí žáky s pravidly hry. Začne hrát u tabule hru s jedním žákem, pak přenechá své místo jinému žákovi. Současně s tím učitel přímo, když žák hraje, komentuje jednotlivá rozhodnutí a ilustruje pravidla. Rozhovor o pravidlech přizpůsobuje okamžité situaci.

Schematicky je komunikace v této fázi zachycena na obr. 1.2.

Obr. 1.2

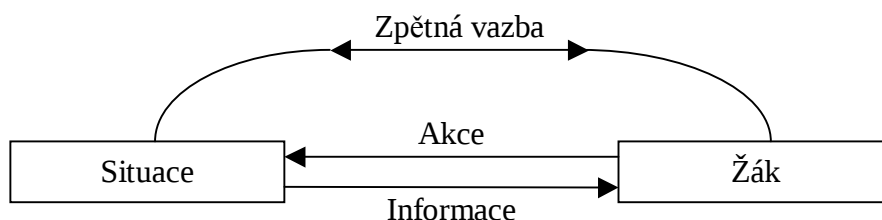


Poznámka: Cílem toho, že instrukce dává učitel současně s hraním hry, je zajistit, aby instrukce, které si dítě z výkladu vezme, byly stejné jako ty, které mu předává učitel. Hraní hry snižuje význačnost - dává zpětnou vazbu.



Typ a-didaktické situace	Realizace ve Hře na 20
<i>Situace akce</i> Schematicky je znázorněna na obr. 1.3. Obecně vychází strategie intuitivně nebo racionálně z dřívějších strategií. Žák volí novou strategii jako výsledek experimentování. Přijímá ji nebo zavrhuje na základě následného úspěchu nebo neúspěchu. Toto hodnocení může být i intuitivní. Žák si vytváří <i>implicitní model</i>, soubor vztahů nebo pravidel, na jejichž základě se rozhoduje, aniž si je uvědomuje a formuluje. Posloupnost situací akcí tvoří proces, pomocí něhož žák tvoří strategie, tj. „učí se sám“ metody řešení úloh.	<i>Hraní Jeden proti jednomu</i> Třída se rozdělí do dvojic, žáci ve dvojici hrají proti sobě. Výsledky píší na papír, rozdělený svislou čarou na dvě části, vlevo a vpravo od čáry. Každý žák je v situaci, kdy zná čísla, se kterými už bylo hráno. Jestliže partner odehraje, žák se musí rozhodnout a reagovat na situaci tak, že navrhne sám další číslo (po analýze situace a na základě informací, které z ní získá). Tato fáze by měla mít asi 4 kola a neměla by trvat déle než 10 minut. Na začátku se zdají žákovi všechna čísla stejně důležitá. Na konci se postupně dopracuje k objevení výhodných strategií, např. že s číslem 17 vyhraje, zatímco jiná čísla (18 nebo 19) se nezdají pro hru vhodná. Skupina vztahů „Jestliže zahrají 14 nebo 17, mohu vyhrát“ může zůstat pouze na implicitní úrovni; žák hraje s touto strategií implicitně, aniž je schopen ji formulovat.

Obr. 1.3

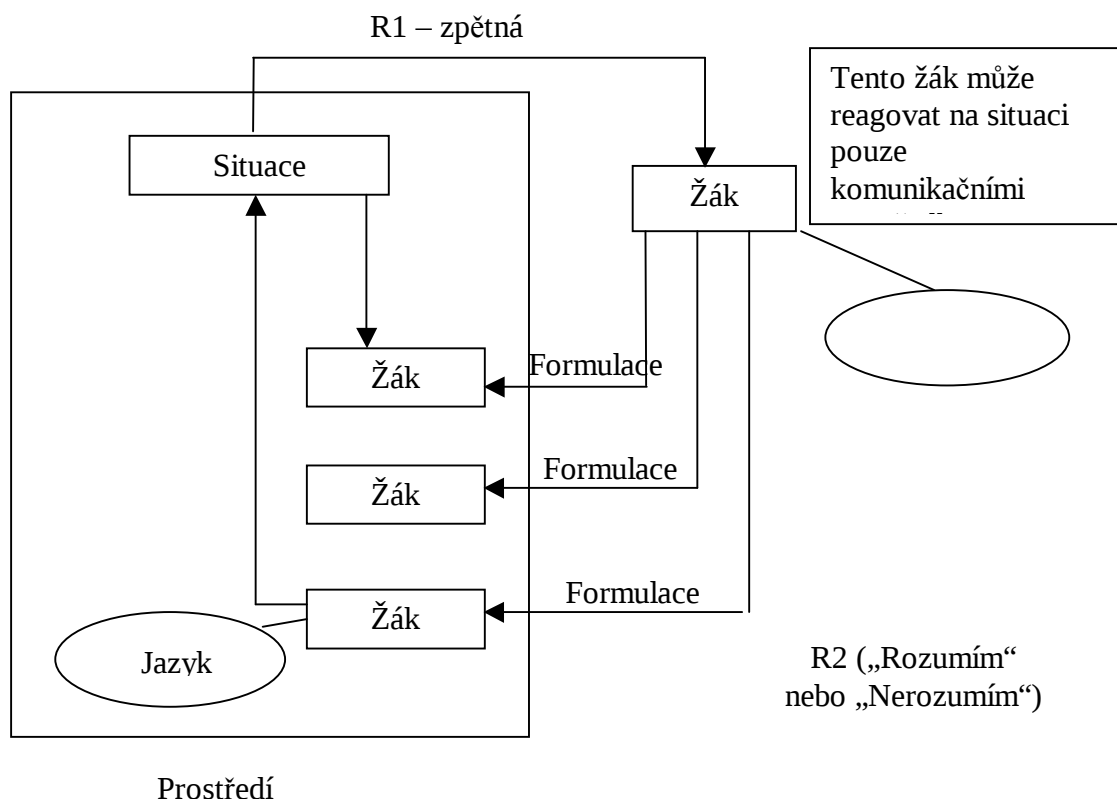


Při každém kroku se situace mění – mění ji protihráč. Po několika krocích získává žák informaci o kvalitě svých akcí – vyhraje nebo prohraje, vyřeší úlohu nebo nevyřeší apod.

Typ a-didaktické situace	Realizace ve Hře na 20
Situace formulace Schematicky je znázorněna na obr. 1.4. K tomu, aby skupina vyhrála, nestačí, aby jeden věděl, jak má hrát (tj. implicitní model), žák musí také naznačit svým spoluhráčům ze skupiny, kterou strategii navrhuje. Tak je každý žák veden k tomu, aby předvídal. Jediným prostředkem, který žák má, je formulovat strategii. Má dvě zpětné vazby: - okamžitou od žáků ve své skupině, kteří rozumějí nebo nerozumějí jeho výkladu, - zpětnou vazbu z prostředí při hraní následujícího kola, zda formulovaná a použitá strategie je vítězná nebo ne.	Hraní Skupina proti skupině Žáci jsou rozděleni do dvou (pokud možno stejně početných) skupin. Pro každé kolo stanoví učitel (náhodně) v každé skupině jednoho žáka, aby hrál za svou skupinu u tabule; jestliže vyhraje, skupina získá bod. Žáci rychle zjistí, že je nutno ve skupině společně plánovat a diskutovat strategie. Někteří budou už od začátku vědět, že „Musíš říci 17.“ Pro tuto fázi se doporučuje 6 až 8 kol, 15-20 minut. Kdokoli je u tabule, je v a-didaktické situaci akce.

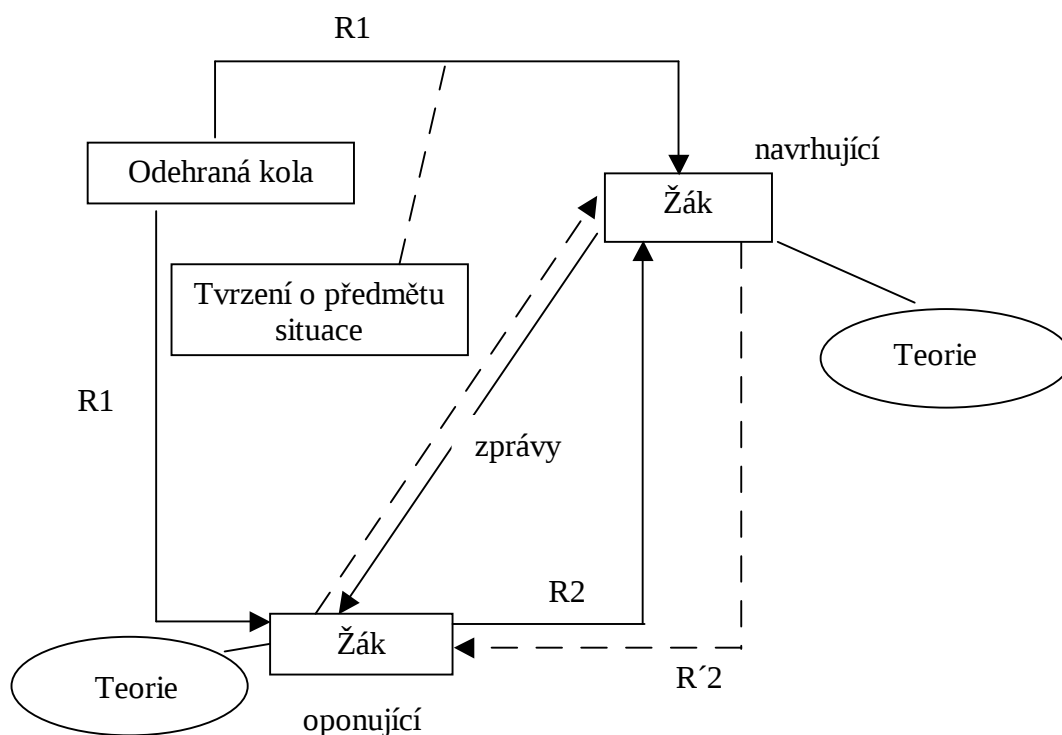
Žáci si postupně vytváří jazyk, kterému budou všichni rozumět, který zahrne všechny objekty a důležité vztahy situace přiměřeným způsobem (tj. argumentací a přiměřenými akcemi). V každém okamžiku je tvořen jazyk, který je ověřován z pohledu srozumitelnosti, snadnosti jeho konstrukce a délky zpráv, které může předávat.

Obr. 1.4



Typ a-didaktické situace	Realizace ve Hře na 20
<i>Situace ověřování</i> Schematicky je znázorněna na obr. 1.5. Žák pracuje se vztahem mezi „reálnou“ situací, konkrétní nebo nekonkrétní, a jedním nebo více tvrzeními o předmětu situace. Ověřování motivuje žáky, aby diskutovali o situaci, a podporuje formulování jejich implicitních ověření. Jejich odůvodňování je však často nedostatečné, nesprávné, neobratné. Někdy přijímají nesprávné věty, neúplné nebo chybné důkazy. Žákům musí být dána možnost odhalit vlastní chyby. To je nutné k vybudování nové znalosti.	<i>Hraní Skupina proti skupině</i> Hraje se ve stejných skupinách jako v předchozí etapě. Skupiny střídavě navrhuji „pravdivá“ tvrzení, jejichž pravdivostí si jsou jisti. Nejprve vysloví tvrzení, které označí jako „domněnku“. Až ji všichni přijmou, stane se větou. Jestliže jedna skupina navrhne domněnku, druhá skupina se stává oponentem a musí rozhodnout: - zda je návrh pravdivý; v tom případě vyhrává bod navrhující družstvo a získává bod, - zda je návrh nepravdivý; v tom případě se tato skupina stane navrhovatelem opačné domněnky a ve hře jsou už body dva, - může také jen říci, že o domněnce pochybuje. Oponent může: - žádat, aby navrhovatel odehrál 5 kol hry, v nichž bude používat navržené pravidlo. Oponent může žádat, aby navrhovatel hrál hru tak dlouho, až jeden z nich stáhne svůj návrh. Druhý pak získává body. - žádat od navrhovatele přesvědčivý matematický důkaz. V tomto případě získává 5 bodů ta skupina, která druhou přesvědčila, „přesvědčený“ získává body dva.

Obr. 1.5



Popsaná organizace výukové jednotky byla realizována ve Francii s žáky ve věku 10-11 let. Byla zařazena jako připomenutí a další rozšíření tematického celku dělení přirozených čísel (v situaci, kdy „smysl“ operace dělení byl jiný než ten, v němž bylo dělení probíráno dříve). Dalším cílem bylo pomáhat rozvoji objevování a odůvodňování tvrzení u žáků. Podrobný popis a průběh jednotky lze najít např. v (Brousseau, 1997).

1.2 Realizace Hry na 20 ve škole Na Slovance v Praze 8

V říjnu 2005 byla tato výuková situace použita v 8. ročníku a pak i (v omezeném rozsahu) v 6. ročníku Základní školy Na Slovance v Praze 8. Nyní popíšeme zkušenosti z těchto vyučovacích hodin a vysvětlíme rozdíly proti organizaci představené v předchozím textu a jejich důvody.

1.2.1 Prostředí, ve kterém se hra hrála (informace o třídě)¹

- Tato hra byla realizována v osmém ročníku ve třídě s 24 žáky. Do této třídy přišlo 11 nových žáků, kteří se s didaktickou hrou ještě nesetkali.
- Kmenoví žáci se s didaktickými hrami již setkali.
- Tato hra byla pro všechny žáky novinkou.

1.2.2 Hra

Vysvětlení pravidel hry a ukázka (cca 7 minut):

- Vyučující vysvětlila žákům pravidla hry.
- Hra byla demonstrována před tabulí vyučující a jedním žákem. Proběhly dvě hry.

Realizace hry ve dvojicích (cca 5 minut):

- Třída se rozdělila do dvojic a žáci hráli proti sobě.
- Hráli celkem čtyři hry. Hru začínal vždy jiný hráč.
- Průběh hry si zapisovali na papír (obr. 1.6).

Obr. 1.6. Ukázky zápisu průběhu hry

2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20
0
1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20
0
2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20
0
2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20
0
Ondra 4
Tomáš 0

① 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22
David
② 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 21, 22 Pavel
③ 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20 Pavel
④ 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20 David

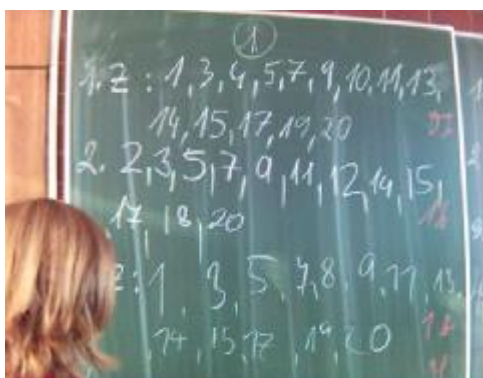
¹ Vyučující Alena Pelantová.

1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20 D
 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20 D
 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20 D
 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 1

Realizace hry ve skupinách (cca 15 minut):

- Žáci byli rozděleni do dvou skupin.
- Vyučující jim sdělila, že ve skupině bude pro každou hru náhodně vybírán reprezentant, který před tabulí (žáci zde prováděli zápis) bude hrát s reprezentantem druhé skupiny (obr. 1.7).
- Žáci si ve svých skupinách vzájemně sdělovali, co při hře ve dvojici objevili, domlouvali si strategii, jak své soupeře porazit. Mohli svému hráči radit.
- Každý vítěz získával bod pro svůj tým.
- Žáci hráli celkem čtyři hry.

Obr. 1.7. Ukázka žáků při hře ve skupinách



Skupiny formulují své poznatky (cca 10 minut):

- Z časových důvodů nebyla kolem strategií řešení této hry rozvíjena hromadná diskuse.
- Pro situaci ověřování vyučující zvolila alternativu, kdy žáci sepsali poznatky na fólii a různé postupy řešení promítli na zpětném projektoru a vysvětlili. Ukázka argumentace viz obr. 1.8.

Obr. 1.8 Ukázky argumentace žáků

Jestliže dáte jako první číslo 2
 vaše vítězství je jisté neboť na
 váš výjez bude třetí číslo
 od čísla cel čísla 2 to jest:
 5, 8, 11, 14, 17, 20
 Pokud si námi jako prvním
 nepodaří dosáhnout čísla 2
 tak se musíte pokusit navázat
 na řadu výše uvedených čísel,
 aby jste vyhráli.

Kdo dá číslo 2 a bude pokračovat
Rozhodným třetím číslem vyhraje

**Když dáme číslo 14, tak
vyhrajeme.**

Do 14 dá protivník 15 nebo 16
a my můžeme dát 17 a on dá
18 nebo 19 a my dáme 20.

**Když dáme 5, tak tak
vyhrajeme.**

Do 5 dá protivník 6 nebo 7
a my dáme 8, on dá 9 nebo 10
my dáme 11, on dá 12 nebo 13
a my dáme 14. Návod je dále
najdete ve výše napsaném návodu.

Začátek by měl být 2

Výherní čísla jsou 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Snažíme se dostat k 17

Pročte protivník musí dát 18,
19 a my dáme 20 → vyhra

**Když dá protivník 1
vyhrajeme (měli bychom)**

Dáme 2 a jsme u výherních
čísel.

**Když protivník dá 2
prohrajeme**

Pokud nedělá protivník
chybu je to prohra.

**Taktika a Rychlé myšlení
vyhrává!**

1.2.3 Závěr

- Při práci ve dvojici žáci nejdříve volili náhodný postup řešení. Záhy někteří z nich správnou strategii odhalili a začali vítězit. Z jejich strany bylo vidět maximální soustředění a chuť vyhrát.
- Při práci ve skupině bylo velmi zajímavé pozorovat, jak žáci, kteří pochopili princip hry, vše vysvětlují ostatním, jak se vzájemně doplňují, „dohadují se“, jakou zvolit taktiku, aby uspěli. Byli nuceni formulovat své myšlenky co nejpřesněji, aby ostatní spoluhráči rozuměli.
- Žáci odhalili, že kdo začíná, je ve výhodě, a pokud neudělá numerickou chybu, vyhraje.
- V některých situacích bylo z reakcí žáků jasné, že našli vítěznou strategii, i když ji ještě přesně neformulovali. Např. při skupinové soutěži nastala situace, kdy žákyně soutěžila u tabule a napsala číslo 14. Protihráč z druhé skupiny řekl: „Tak to už nic, to vyhráli.“

1.2.4 Zkušenosti

- Žáci dosahovali čísla 20 zpočátku náhodně.
- Žák, který odhalil strategii nejdříve, začal okamžitě vyhrávat.
- Žáci odhalili strategii, ale ne všichni dokázali přesně formulovat a provádět zápis.
- Tuto hru lze hrát i s žáky nižších ročníků (experiment provedl kolega v šestém ročníku), avšak je nutné počítat s větší časovou náročností.

1.3 Dvě další ukázky

Hra na 20 není jedinou aktivitou, kterou jsme připravili a realizovali ve formě didaktické situace obsahující a-didaktické situace akce, formulace a ověřování, a to nejen autorkami tohoto textu, ale i dalšími kolegy a kolegyněmi. Uvádíme dvě další. První z nich se týká kritérií pro dělitelnost přirozených čísel, druhá řešení slovních úloh.

1.3.1 Kritéria pro dělitelnost přirozených čísel

V (Složil, 2005a, 2005b) je popsána a vyhodnocena analogická didaktická situace, která je určena pro odhalování kritérií pro dělitelnost čísel v 6. ročníku základní školy. J. Složil použil organizaci didaktické situace, jak je popsána v čl. 1.1.

Zadání pro hru ve dvojicích: „Budete hrát proti sobě ve dvojicích. První žák zadá druhému číslo ve tvaru např. $[*5]^2$ nebo $[2*]^3$ a dělitele 2, 5 nebo 10. Úkolem druhého žáka bude najít co nejvíce čísel v zadaném tvaru, dělitelných zadaným dělitelem. Kolik čísel najde, tolik získá bodů. Poté zadává tentýž úkol druhý žák a první jej řeší.

Vše začalo seznámením žáky s pravidly, následovala soutěž žáků ve dvojicích, soutěž skupin a ověřování. Stručně naznačíme, jak jednotlivé etapy probíhaly. Popis je zpracován z pohledu učitele:

² Číslo v tomto tvaru nazveme pro účely práce „jednotkové“. Jsou dané jednotky a žáci mají za úkol doplňovat číslice na pozici desítek.

³ Takové číslo nazveme analogicky „desítkové“.

Instrukce (6 minut)

Učitel: „Budete hrát dva hráči proti sobě. Jeden z vás položí druhému zadání ve tvaru např.: $[3*]$ a řekne: „Najdi všechna čísla v tomto tvaru, která jsou dělitelná dvěma.“ Zkuste doplnit místo hvězdičky nějakou číslicí tak, aby vzniklo číslo, které bude dělitelné dvěma beze zbytku. Bude-li hrát např. Michal proti Robertovi, situace může vypadat takto (vše je současně zaznamenáváno do připravené tabulky – viz tab. 1.1): Robert zadá Michalovi číslo např. ve tvaru $[3*]$, ten si jej napíše do své tabulky. Tam si také napíše, kterým číslem dělí a jaké mu vyšly výsledky. Potom zadá Michal Robertovi číslo např. $[*1]$ a také číslo, kterým dělí. Michal napíše svoje výsledky a tak dále.“

Do diskuse o odpovědích se zapojují žáci i učitel.

Tab. 1.1 Tabulka pro situaci akce („Jen proti jednomu“)

Hráč A		
Zadané číslo	Dělím	Výsledky
$[3*]$	2	32, 30, 36, 38, 34
Hráč B		
Zadané číslo	Dělím	Výsledky
$[*1]$	2	

Jeden proti jednomu (17 minut)

Samotná hra žáky baví a brzy začínají přicházet na to, že vítěznou strategií není najít co nejvíce čísel, ale zadat úlohu tak, aby přišel soupeř na co nejmén čísel. Ze začátku je vidět, že žáci „zkoušejí“ náhodné kombinace zadaných čísel a dělitelů. Velmi důležitá je skutečnost, že počty získaných bodů jsou ve většině případů s přibývajícími partii stále nižší. Žáci si postupně uvědomují vítěznou strategii. V jednom případě nezíská žák od druhé série ani bod, protože jeho soupeř používá vítěznou strategii již po první partii. Zajímavá je situace kolem číslice 0. Na pozici jednotek ji žáci používají samozřejmě, ale na pozici desítek jen někteří. Přitom nebylo jasně specifikováno, že mají žáci hledat pouze čísla dvojciferná. Číslici 0 jim tedy používat nezakazují. Objevuje se například jako součást řešení úlohy $[*2]:2$.

Skupina proti skupině (15 minut + 10 minut⁴)

Učitel oznamuje, že se bude hrát stejná hra, ale tentokrát jedno družstvo proti druhému. Žáci mají k dispozici pracovní listy, na které si mohou zaznamenávat své partie. Z nich mohou vybírat úlohy do hry družstvo proti družstvu. Obě družstva tak činí. Rozbíhá se debata, v níž jednotliví žáci sdělují ostatním, co zahráli a jaký to mělo výsledek.

Ve druhé sérii už je jasné, že se obě dvě družstva dobře domluvila a zadávají úlohy, které vedou k tomu, aby soupeř nezískal žádný bod. Konečný stav je uveden v tab. 1.2:

Tab. 1.2 Ukázka tabulky pro situaci formulace („Skupina proti skupině“)

Družstvo A			Družstvo B		
Zadané číslo	Dělím	Výsledky	Zadané číslo	Dělím	Výsledky
[6*]	5	65, 60	[*3]	2	
[*9]	5		[*2]	5	
[*4]	10		[*1]	5	

Situace „Skupina proti skupině“ byla obohacena o modifikaci zadání, jejímž cílem bylo zabránit žákům pracovat „automaticky“, používat nalezené algoritmy bez porozumění. Zadání bylo změněno takto: „Nyní každý bod, který získá soupeř, je jakoby trestným bodem. Jednotlivá družstva se nyní musejí snažit zadat úlohu tak, aby...?“ Nechávám třídu odpovědět: „Aby soupeř získal těch bodů co nejvíc.“

Tato etapa trvala 15 minut. Po ní následovala etapa ověřování.

Skupina proti skupině - ověřování (15 minut)

Učitel: „Přichází poslední fáze hodiny, soutěž o tvrzení. Každé družstvo řekne nějaké tvrzení, o němž si myslí, že je pravdivé. Bude-li s tímto tvrzením druhé družstvo souhlasit, získá první družstvo bod, protože vyslovilo správné tvrzení.“

⁴ Popisovaná výuková jednotka proběhla ve dvou vyučovacích hodinách ve dvou dnech. Situace formulace byla z časových důvodů rozdělena do dvou částí – na konci první a druhý na začátku další vyučovací hodiny.

Ukázka průběhu této etapy je uvedena v tab. 1.3.

Tab. 1.3 Ukázka tabulky pro situaci ověřování („Skupina proti skupině“)

A		B	
Tvrzení	Body	Tvrzení	Body
[*0]:10 → získá 10 b.	1	[*2]:2 → získá 10 b.	1
[*5]:5 → získá 10 b.	1	[*4]:2 → získá 10 b.	1
[*8]:2 → získá 10 b.	1	[*6]:2 → získá 10 b.	1
Celkem	3	Celkem	3

Ve zbytku hodiny žáci na základě odehraných partií formulovali kritéria pro dělitelnost čísel např. čísla 2, 5, 10. To je součástí institucionalizace získaných poznatků.

Uvádíme ještě několik reakcí učitele matematiky ve třídě, v níž byla výuková jednotka realizována. Učitel matematiky byl po dobu trvání situace pozorovatelem, do vyučování nezasahoval. Po skočení diskutoval s J. Složilem průběh obou vyučovacích hodin.

- Myslíte, že jsou vaši žáci připraveni na takový způsob výuky, kdy jim učitel nic explicitně nevysvětlí, na všechno přicházejí oni sami?

Vnímání úplně nových poznatků je ovlivněno řadou faktorů. Některé pasáže jsou žáci takto schopni uchopit a zpracovat.

- Dokážete si představit, že by způsobem, jakým byla organizována výuka během dvou hodin, které jsem odučil ve vaší třídě, byla organizována většina vyučovacích hodin matematiky?

Nedokážu si představit, že by tak byla organizována většina hodin, ale rozhodně bych tuto hru použil jako nový typ činnosti.

- Co se vám na hře líbilo (míněno na myšlenku hry)?

Myšlenka tvaru čísel byla velice pěkná, bylo to něco nového a bylo to velmi dobře přijato. Budu-li moci, rád bych tuto hru zopakoval, až budu znovu učit šestý ročník.

1.3.2 Slovní úlohy

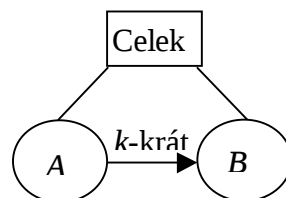
V (Pelantová, Novotná, 2004) je analogicky připravena didaktická situace pro řešení slovních úloh o dělení celku na nestejně části. Tato výuková jednotka se lišila od předchozích v tom, že nebyla organizována jako soutěžní hra. Byla však zachována organizace tak, aby postupně proběhla a-didaktická situace akce, formulace a ověřování.

Slovní úlohy o dělení celku na nestejně části jsou obvykle v matematice zařazovány jako úlohy na procvičování sestavování a řešení lineárních rovnic, případně jejich soustav. Řešení úloh při tradičním vyučování matematice se opírá o aplikování algoritmů, které jsou žákovi předloženy (obvykle učitelem) a jejichž použití pak žák na analogických úlohách procvičuje (sám nebo ve skupině).

Pro tyto úlohy jsme připravily dvě didaktické situace, z nichž jednu nyní představíme podrobněji. V obou je žákům dána možnost samostatného objevování strategií řešení.

Základní úlohou pro didaktickou situaci byla slovní úloha o dělení celku na dvě nestejně části, v níž jsou vztahy mezi částmi multiplikativní ($B = k \cdot A$) a je znám celek. Schematicky je struktura použitých úloh znázorněna na obr. 1.9.

Obr. 1.9



Matematická úloha byla zasazena do různých kontextů: dělení peněžního obnosu mezi dva lidi, ukládání kuliček do dvou krabic, rozlití vody do dvou nádob, rozdělení dětí do dvou bazénů na koupališti, počet kilometrů ujetých na kole ve dvou dnech na výletě.

Přenos nalezené strategie pro jiné typy situací byl sledován na úlohách ze stejných kontextů, ale vztahy mezi částmi byly aditivní ($B = k + A$). Pro zobecnění použité strategie byly použity úlohy s multiplikativními vztahy mezi třemi a čtyřmi částmi, v nichž byly vztahy mezi částmi vždy vázány na nejmenší část.

Pro použité úlohy existuje několik řešitelských strategií. V (Novotná, 2003) jsou podrobně popsány pro případ dělení celku na tři části. Omezme se pouze na aritmetické strategie.⁵ V dalším textu uvádíme popis jedné navržené zrealizované didaktické situace, její didaktický cíl, stručný scénář a první zkušenosti z jejího použití.

Celá výuková sekvence je rozdělena do čtyř etap, které popíšeme pouze stručně: V 1. etapě se žáci rozdělí do skupin. Každá skupina dostane zadání jedné úlohy a úlohu společně vyřeší. (*Situace akce*.) (Poznámka: Protože nelze zajistit, že všechny skupiny budou řešit úlohu stejně rychle, jsou připraveny další úlohy pro ty, kteří zadanou úlohu vyřeší rychleji.) Ve 2. etapě jednotlivé skupiny seznámí ostatní se svými řešitelskými strategiemi (*situace formulace*). Ve 3. etapě řeší skupiny úlohu na dělení celku na tři, případně čtyři části (*institucionalizace*). 4. etapa probíhá s časovým odstupem. Žáci řeší podobné úlohy formou testu. Cílem poslední etapy je ověření stability získaných znalostí a dovedností.

Tyto didaktické situace byly realizovány v půlené hodině matematiky v 6. ročníku základní školy ve třídě, která není specializovaná. Na celou výukovou sekvenci byla vyhrazena jedna vyučovací hodina. Třída, v níž byl experiment realizován, je vyučována matematice tradičním způsobem, v matematice se žáci před experimentem s konstruktivistickými přístupy nesetkali. Jedná se však o žáky zvědavé, zvyklé řešit úlohy aktivně a s poměrně velkým nasazením. Žáci pracovali ve dvou- a tříčlenných skupinách. Do skupin byli rozdělení s přihlédnutím k jejich výsledkům v matematice (podle informací vyučující matematiky v této třídě). Skupiny byly sestaveny tak, aby v každé byli jak žáci výborní v matematice, tak i žáci slabší. Úlohy o dělení celku na nestejně části představovaly pro žáky novou látku.

Nevyplnila se obava, že by „příkázané“ rozdělení do skupin, případně neobvyklost práce ve skupinách mohly u některých žáků vyvolat zápornou reakci, případně neochotu zapojit se do aktivity. Ve všech skupinách probíhala bohatá diskuse.

⁵ Očekávané aritmetické strategie: pokus – omyl, systematické vyčerpávání, aproximace, počet „jednotkových“ dílů, „falešná položka“ (zvětším-li jednu část o 1, změní se druhá část o p a celek o $p + 1$; protože celek se má rovnat C , musím za základní část vzít $C:p$).

Shrnutí zkušeností ze situace

Z pěti skupin byla ve třech skupinách nalezena úspěšná strategie (nezávisle na kontextu to byla ve všech případech strategie „počet jednotkových dílů“), ve dvou byl postup chybný (rozdělení celku na dva stejné díly, pak neúspěšná snaha o úpravy vedoucí ke správnému řešení). O jiné strategie se žáci nepokusili.

Po nalezení strategie žáci ve skupinách rychle řešili stejným postupem i další úlohy se stejnou strukturou. Kontext úloh ani velikost čísel v zadání se v diskusi neprojevili jako důležité. U úloh s aditivní strukturou měli žáci obtíže s modifikací jejich strategií pro novou matematickou situaci. Přejít k úlohám s aditivními vztahy zvládla správně v daném čase pouze jedna skupina, a to ta, která jako první našla úspěšnou strategii. K navržení úspěšné strategie použili na začátku grafické znázornění, pro další úlohy však už náčrt nedělali. Použili strategii „odečtu rozdíl ve velikostech částí od celku, zbytek rozdělím stejným dílem“.

Mimořádně úspěšné bylo formulování řešitelských strategií představiteli jednotlivých skupin. Žáci ze skupin, kde nebyla nalezena úspěšná strategie, se aktivně zapojili do diskuse a také představili „svou“ strategii. Při diskusi s ostatními odhalili důvody, proč jejich postup nevedl k nalezení správného výsledku.

Při zobecnění strategie na úlohy s multiplikativními vztahy a více částmi byla úspěšná stejná skupina jako v předchozím bodu, také vysvětlení správnosti postupu bylo velmi jisté a srozumitelné.

1.3.3 Shrnutí zkušeností

Obě představené didaktické situace se ukázaly jako motivující, žáci se do řešení aktivně zapojili. Výsledky předčily naše očekávání jak v oblasti formulování, použití různých reprezentací pro vyjádření myšlenek a pro ověřování správnosti použitých strategií a získaných výsledků, tak i v trvalosti získaných znalostí a dovedností.

2. Analýza a priori

2.1 Úvod

Jedním z nejdůležitějších nástrojů při přípravě výukových situací je analýza a priori. Provádí ji učitel před samotnou realizací výukové jednotky. Na základě popisu jednotky se snaží nejen připravit plán aktivit, ale také odhadnout vlastní průběh:

- navrhnout rozdělení hodiny do jednotlivých fází,
- zamyslet se nad možnými reakcemi a postoji žáků a rozmyslet si možné vlastní reakce (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy),
- zamyslet se nad strategiemi řešení problému, které se mohou v průběhu výukové jednotky objevit (jak správnými, tak chybnými),
- rozmyslet si, jaké vědomosti a poznatky jsou pro danou strategii nezbytné a které z nich budou žáci schopni spontánně aplikovat.

Analýza a priori má tedy pro učitele velkou informační hodnotu: Poukazuje na případná úskalí hodiny, na možné obtíže žáků při řešení úlohy.

2.2 Úloha Puzzle

Analýzu a priori si nyní přiblížíme na úloze „Puzzle“. Tato úloha byla převzata z publikace (Brousseau, N. et G., 1981), kde je součástí alternativního způsobu výuky desetinných čísel a zlomků a určena desetiletým žákům. Cílem úlohy je procvičit základní operace se zlomky a desetinnými čísly a jejich aplikace při zvětšování geometrických útvarů.

V následující ukázce bude tato úloha využita jako motivace pojmu poměr u dvanáctiletých žáků. Podrobněji viz (Hrabáková, 2005a).

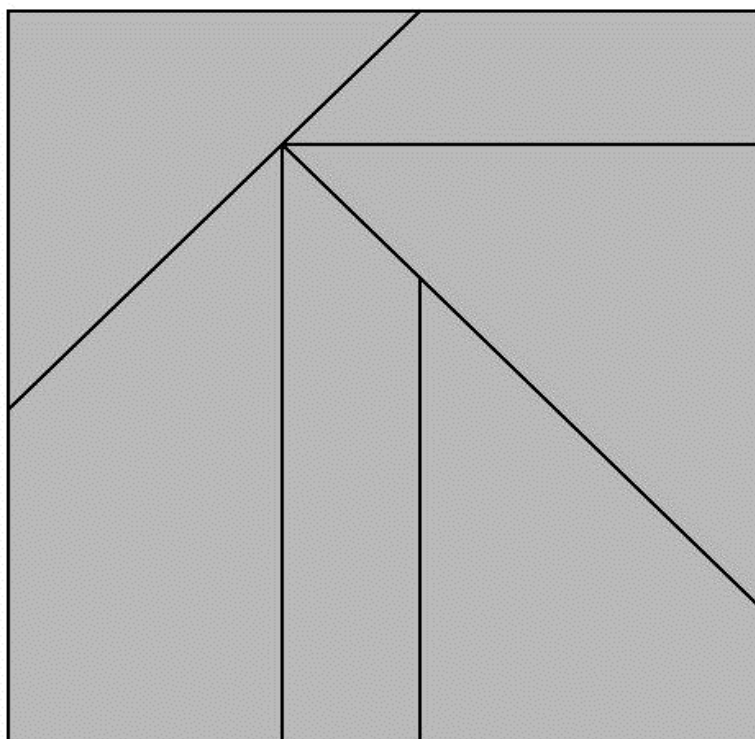
Pokyny k úloze Puzzle

- § „Zde máte puzzle. Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky, větší než je tento model. Musíte se držet následujícího pravidla: úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm. Každá skupina obdrží jednu skládanku. Každý žák vyrobí jednu nebo dvě části. Až skončíte, měli byste být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem.“
- § Děti pracují ve čtyř až pětičlenných skupinách. Po krátké poradě ve skupince se rozdělí a každý pracuje na své části skládanky.
- § Učitel vyvěsí (nebo nakreslí na tabuli) zvětšenou skládanku.
- § Učitel na tabuli napíše: $4\text{ cm} \rightarrow 7\text{ cm}$.

Pomůcky

- Pět sad stejných skládanek (obr. 2.1)
- Barevné papíry na výrobu zvětšených skládanek
- Papíry na pomocné výpočty a úvahy
- Náhradní pravítka, nůžky

Obr. 2.1



2.3 Analýza a priori úlohy Puzzle

Zaměříme se na analýzu a priori pro tyto charakteristiky:

- typ úlohy
- řešitelské strategie

Typ úlohy

- **cíl úlohy**

„Vaším úkolem bude vyrobit podobné skládanky ...“ Děti mají za úkol vytvořit svou vlastní skládanku – tj. zjistit potřebné rozměry, jednotlivé díly narýsovat a vystříhnout. Musí přitom respektovat dané výchozí podmínky: „úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm“, i cílové podmínky: „být schopni sestavovat ty samé obrazce jako s modelem“.

- **charakter zadání**

Zadání se skládá ze 3 částí : *slovní* – pokyny učitele
materiální – model skládanky
vizuální – nákres modelu na tabuli, zaznamenaný údaj

Projev učitele je pomalý, jasný, stručný, učitel nepoužívá odbornou matematickou terminologii.

Zadávání úlohy je důležitým momentem, všechny děti musí pochopit, co mají dělat, učitel už totiž dál do jejich práce nezasahuje – nejvýše povzbudí, napomene, dohlédne, aby všechny děti pracovaly.

- **znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání**

Jedná se spíše o znalosti všeobecné, nikoliv matematické. Dítě musí rozumět slovu *puzzle*, *úsek*, *model*, *obrazec*. Musí si umět zadání „přeložit“ do matematického jazyka (zvětšit, $4\text{ cm} \rightarrow 7\text{ cm}$)

- **obtíže v chápání zadání**

Děti musí dávat velký pozor, zadání je pouze slovní, nikoliv písemné. Nejobtížnější částí zadání je „úsek o velikosti 4 cm na modelu musí na vaší skládance měřit 7 cm“. Zde ale pomůže náskres na tabuli a zapsání klíčového údaje $4\text{ cm} \rightarrow 7\text{ cm}$.

Řešitelské strategie

K úspěšnému vyřešení úlohy máme k dispozici strategie aritmetické a geometrické. Klíčovou roli zde přitom hraje předchozí znalost/neznalost poměru.

- **geometrické strategie G**

správné strategie:

- a) zobrazit všechny dílky puzzle ve stejnolehlosti s koeficientem $7/4$
- b) zobrazit celý čtverec ve stejnolehlosti s koeficientem $7/4$, následně zobrazit potřebné úseky a puzzle dorýsovat
- c) pomocí redukčního úhlu zjistit zvětšené délky všech/jen některých rozměrů

nesprávná strategie:

- d) přidat ke všem stranám 3 cm

• **aritmetické strategie A**

správné strategie:

- a) zvětšit v poměru 7 : 4

a1) násobit zlomkem $\frac{7}{4}$

a2) násobit desetinným číslem 1,75

- b) využít trojčlenku:

$$4 \text{ cm} \dots\dots\dots 7 \text{ cm}$$

$$\uparrow 3 \text{ cm} \dots\dots\dots x \text{ cm} \uparrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 5,25 \text{ cm}$$

- c) použít „selský rozum“:

$$4 \rightarrow 7$$

$$2 \rightarrow 3,5$$

$$1 \rightarrow 1,75 \text{ atd.}$$

nesprávná strategie:

- d) „přičíst trojku“ ke všem rozměrům

G a) , G b)

Znalosti: poměr, stejnolehlost, dělení úsečky na n dílů (redukční úhel), rýsování bez použití pravoúhlého trojúhelníku a kružítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: „Je nutné zobrazovat všechny části skládanky?“ Takto se zamyslí zkušenější řešitelé a pomocí stejnolehlosti zobrazí jen ty nejnutnější části. Zbytek buď dorýsují, nebo dopočítají.

G c)

Znalosti: poměr, redukční úhel (pomocná polopřímka), přenášení úsečky, rýsování mnohoúhelníků pomocí pravítka.

Možná úskalí: volba vhodného úhlu pro dělení úsečky, nepřesné rýsování.

Otázky: Jaké rozměry jsou nutné? Jaké zbytečné?

G d)

Znalosti: přesné rýsování.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák na to může přijít sám: např. zvětšuje trojúhelník, přidá 3 cm k jedné straně, ke druhé, pak změří třetí a zjistí, že „to nevychází“.

A a)

Znalosti: násobení zlomků (a1), násobení desetinných čísel (a2), problematika zaokrouhlování.

Možná úskalí: převod zlomku na číslo s desetinnou čárkou, předčasné zaokrouhlování, násobení desetinných čísel/zlomků.

A b)

Znalosti: znalost trojčlenky, správné určení tří členů a neznámé, úprava lineární rovnice.

Možná úskalí: chybná úprava lineární rovnice.

A c)

Znalosti: základní operace s celými a desetinnými čísly.

Schopnosti: logické uvažování, představivost, předchozí zkušenost.

Možná úskalí: početní chyby (např. dělení, násobení).

A d)

Znalosti: přičítání přirozeného čísla k přirozenému číslu.

Možná úskalí: strategie je nesprávná, žák by to měl zjistit v závěrečné fázi, kdy bude chtít zvětšený útvar narýsovat.

2.4 Srovnání analýzy a priori s výsledky experimentu

Experiment byl proveden 3. a 4.11.2003 na Gymnáziu V. Hraběte v Hořovicích v sekundě osmiletého gymnázia. Experiment proběhl při cvičení z matematiky, kdy jsou žáci rozděleni do dvou skupin (12 a 13 žáků) podle cizích jazyků. Celá aktivita tedy proběhla dvakrát za sebou.

Při zadávání úlohy se nevyskytly žádné potíže. Žáci byli na skupinovou práci zvyklí, nepřekvapila je. Pozorně poslouchali pokyny, k zadání úlohy neměli žádné dotazy. Vysvětlujeme si to tím, že jazyk úlohy nevyžaduje odborné matematické znalosti, ale spíše znalosti všeobecné. Dalším faktorem je také věk žáků a jejich zkušenost s řešením slovních úloh. V sekundě už takové zkušenosti mají.

V analýze a priori jsme předpokládali, že se může objevit osm strategií, čtyři geometrické a čtyři aritmetické.

Strategie G a), b) a c) vyžadují znalost poměru a stejnolehlosti. Strategie A b) předpokládá znalost trojčlenky. S poměrem, stejnolehlostí ani trojčlenkou se žáci sekundy ještě nesetkali, tyto strategie se v žádném případě neobjevily.

Žáci vymysleli celkem pět různých strategií, dvě z nich (S 2 a S 4) jsme v analýze a priori nepředpokládali.

- **S 1: přidat ke všem rozměrům 3 cm**

Tato strategie v analýze a priori odpovídá strategii G d). Jedná se o nesprávnou strategii. Všechny skupiny ji vzaly v úvahu. Vysvětlujeme si to tím, že zvětšování „o x cm“ je žákům bližší než zvětšování „x-krát“. Častěji se s ním setkávají jak v běžném životě, tak ve škole.

- **S 2: rovnice**

Tuto strategii jsme v analýze a priori nepředpokládali. Jde o nesprávnou strategii. Domníváme se, že žáci byli ovlivněni předchozí látkou – řešení slovních úloh, kde rovnice používali. Proto se snažili tento postup aplikovat i na úlohu puzzle. Rovnici ale sestavili chybně.

- **S 3: vynásobit všechny rozměry číslem 1,75**

Tato strategie odpovídá strategii A a2).

Je zajímavé, že všichni, kdo použili tuto strategii, počítali s desetinným číslem 1,75, a nikoliv se zlomkem $7/4$. Domníváme se, že žáci desetinným číslům více důvěřují. Setkávají se s nimi v každodenním životě. Ve škole s nimi pracují od pátého ročníku. Zlomky se podrobněji probírají až v sedmém ročníku. Žáci s nimi nemají takovou zkušenost. Počítání s desetinnými čísly upřednostňují před zlomky.

- **S 4: zvětšení o 75 %**

Tato strategie nás velmi překvapila. Žáci se totiž ve škole s procenty ještě nesetkali. Podle slov paní učitelky byla procenta pro žáky velmi zajímavou problematikou a žáci byli nedočkaví, až se o nich dozví více. Vysvětlujeme si to faktem, že procenta jsou v dnešní době všude kolem nás: DPH 5 %, sleva o 20 %, volná paměť na disku C je 30 % atd.

Strategii s procenty úspěšně použila pouze jedna skupina (č. 5). Velmi blízko správnému postupu byl také jeden žák ze skupiny č. 2.

Po experimentu jsme s žákyní ze skupiny č. 5, která strategii vymyslela, povídali. Zajímalo nás, kde se o procentech dozvěděla. Řekla, že o procentech s ní mluvil tatínek a vysvětlil jí, že procento je setina. Zbytek už vymyslela sama.

- **S 5: „selský rozum“**

Tato strategie odpovídá strategii A d) v analýze a priori. Použila ji pouze jedna skupina.

2.5 Závěr

Úloha Puzzle byla pro naše úvahy vybrána především pro svoji bohatost – zasahuje jak do geometrie tak do aritmetiky, mohou ji řešit nejen žáci sedmých ročníků ZŠ, ale i žáci starší.

V závěru jsme své strategie konfrontovali se strategiemi žáků, kteří úlohu řešili. Není samozřejmě možné, abychom v analýze a priori předvíдали všechny řešitelské strategie, i přesto nás analýza velmi obohatila. Umožnila nám podívat se na úlohu z jiného pohledu, pohledu žáka, řešitele úlohy. Zamýšleli jsme se nad tím, jaké musí mít předchozí znalosti, s jakými obtížemi se může setkat, jaké strategie může použít.

Cílem této kapitoly bylo ukázat čtenáři analýzu a priori jako užitečný nástroj, který učitelé pomůže při přípravě a tvorbě vyučovací jednotky. Zároveň čtenáři naznačujeme postup, jak je možné analýzu a priori provádět.

3. Překážky

V následující kapitole se budeme věnovat důležitému jevu, kterým jsou překážky v kognitivním vývoji, se kterými se žáci mohou setkat. Stručně se nejprve zmíníme o jednotlivých typech překážek a jejich významu. Poté se zaměříme na to, jak překážky vytipovat a nakonec jak je překonávat, resp. jak je využít v přípravě konkrétní didaktické situace.

3.1 Úvod

Jedním ze základních pojmů TDS je překážka, která nám pomůže lépe pochopit kognitivní vývoj jedince. Překážku můžeme definovat jako soubor chyb vztahujících se k předcházejícím znalostem. Tyto chyby jsou stále a opakují se. K opakování dochází u nějakého jedince v čase, nebo u mnoha jedinců (tj. „děti obvykle dělají tuto chybu“), a také v historii.

Překážkou je znalost, neboť existuje oblast, v níž je tato znalost užitečná, pravdivá a lze ji úspěšně použít. Tato oblast je obvykle velice dobře jedinci známa a znalost je ověřena mnoha zkušenostmi. V novém kontextu však tato znalost selhává a dává špatné výsledky; odolává sporům, se kterými je konfrontována, a tak zabraňuje vytvoření „lepší“ znalosti. Znalost – překážka se objevuje stejným způsobem, kdykoli se jedinec dostává do obdobné situace. Zde můžeme postihnout rozdíl mezi překážkou a obtíží. Obtíž není způsobena jinou znalostí, ale neznalostí nebo chybějící dovedností apod. Je-li jednou překonána, už se neopakuje. (Zde pochopitelně není řeč o zapomínání.)

Znalost jakožto překážka má tendenci se lokálně přizpůsobit s tím, že ona sama je měněna, jak nejméně je to možné. Důvodem je to, že překážka je znalost vztahující se k nějakému pojmu, tj. k matematickému pojmu, který souvisí s celou množinou situací, kde tato znalost dává smysl, a s celou skupinou významů, které jedinec může spojovat s tímto pojmem, a s mnoha nástroji, tvrzeními a algoritmy, které jedinec může používat při práci s tímto pojmem (Brousseau, 1997). Podobně také v (Radford, 1997) nebo (Spagnolo a Čížmár, 2003).

Překážky vyskytující se při vyučování matematiky mohou mít různé důvody. Jejich příčiny lze klasifikovat do tří skupin:

- *ontogenetický původ* (jsou spojeny s vlastní kognitivní kapacitou studenta odpovídající danému vývojovému období);
- *didaktický původ* (výběru didaktických stylů a strategií nebo na volbě vzdělávacího systému) a
- *epistemologický původ* (vztahují se k samotnému procesu nabývání znalostí; jsou to překážky, kterých se nemůžeme a ani bychom se neměli vyvarovat, neboť mají fundamentální formativní funkci pro danou znalost; právě tyto můžeme nalézt v historii samotného pojmu).

V následující části se budeme věnovat konkrétním překážkám, které lze pozorovat v uchopování různým vybraným pojmům, jako je nekonečno, resp. přímka a bod (s jevem nekonečno se setkáváme implicitně – např. bezrozměrný, resp. nekonečně malý bod – i explicitně – např. nekonečně dlouhá přímka), dále pojmům přirozené a racionální číslo (např. násobení nulou).

3.2 Překážky a jev nekonečno v geometrii – hledání překážek

Pojem epistemologické překážky bychom mohli srovnat s paradoxem⁶. Paradoxy provázejí lidské myšlení od antiky, přesněji od doby, kdy lidé začali vědomě užívat rozumové uvažování pro získávání nových poznatků. Paradoxy se velmi často objevovaly ve spojitosti s pokusy o formalizaci nekonečna a často to byly právě paradoxy, které posunuly pojetí nekonečna dále. Velice známé jsou Zenonovy aporie, které jsou krásným příkladem procesu překonávání paradoxu - překážky.

Zamyslíme-li se, co může být největší překážkou pro pochopení nekonečna, pravděpodobně nás nepřekvapí, že je to znalost konečného. Právě s konečností máme mnoho zkušeností. Všechny děje, všechny objekty, všechny procesy, se kterými se v běžném životě setkáváme, jsou konečné. Mnohdy si ani neuvědomujeme, že využíváme právě znalosti o konečnosti.

Například některé vlastnosti konečných množin, jako „část je menší než celek“, kterou postuloval i Eukleides ve svých *Základech*, chybně přenášíme na nekonečné množiny a odmítáme výsledky, které nekonečné množiny přinášejí.⁷ Znalost, že část je vždy menší než celek je správná, pokud pracujeme s konečným množstvím, ale nesprávná, pokud pracujeme s množstvím nekonečným. Vystavení této znalosti kontextu nekonečných množin dovoluje nejen charakterizaci toho, co je nekonečná množina, ale také dovolí hlubšímu porozumění konečným množinám. Znalost konečného splňuje tedy všechny požadavky kladené na překážku v porozumění nekonečnu.

Nyní se budeme věnovat dvěma důležitým projevům nekonečna, se kterými se žák na 2. stupni základní školy (resp. student na střední škole) setkává – „nekonečně velké“ a „nekonečně malé“.

3.2.1 Přímka – nekonečně dlouhá

Do jaké míry dítě rozumí tomu, že přímka je nekonečně dlouhá? Můžeme očekávat, že tato znalost o přímce není rozhodně jednoduchá a že dítě musí překonat nějaké překážky. Jak mu můžeme pomoci? Lze se poučit z role paradoxů, kterou sehrály (a sehrávají) ve vývoji matematiky, a pokusit se navodit stav rozporu ve znalostní struktuře jedince. Mohou nám k tomu dopomoci i tzv. nekorektní otázky. Pokusíme se odhadnout odpovědi a znalosti, které k nim byly použity.

Otázka: Je delší přímka nebo polopřímka? (O3.2.1.1)	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
<i>Přímka je delší než polopřímka.</i>	<i>část je menší než celek</i>
<i>Nelze určit, která je delší.</i>	<i>přímka i polopřímka jsou nekonečné část je menší než celek</i>
<i>Obě jsou stejně dlouhé.</i>	<i>přímka i polopřímka jsou nekonečné</i>

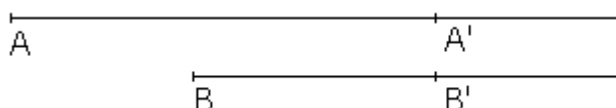
⁶ Paradox je „neočekávané, překvapující tvrzení, zdánlivě protismyslné a odporující běžným soudům, pokládaným za správné“. Slovo paradox se skládá ze dvou částí „para“ a „doxa“. „Doxa“ je z řeckého názor, mínění nebo také výklad. Je to protiklad k „epistémé“, neboli vědění, které je trvalé a neměnné. Předpona „para“ značí mimo, vedle nebo proti (Akademický slovník cizích slov, 1995).

⁷ G. Galilei (1564-1642) ve své práci *Dialog o dvou hlavních systémech světa v Discorsi* se odvažuje pracovat s aktuálním nekonečnem, ale svých výsledků se zalekl, neboť přímo „odporovaly zdravému rozumu“. Podobně reagují i současní studenti.

Se všemi z těchto odpovědí se setkáváme u žáků základních škol i u studentů středních škol. S odpovědí, že delší je polopřímka, jsme se nikdy nesetkali⁸ a ani ji nepředpokládáme. Z našeho hlediska je velmi důležitá druhá z odpovědí. Zde se jedinec do vnitřního konfliktu pravděpodobně již dostal. K navození rozporu i k jeho překonání lze pokračovat dalšími otázkami:

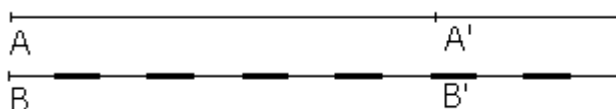
Která z polopřímek je delší? (O3.2.1.2)

Obr. 3.1



Máme dvě polopřímky. Jednu z nich rozdělíme na dílky (jak je naznačeno na obrázku) a každý druhý dílek obarvíme. Je delší polopřímka AA' nebo obarvená část polopřímky BB'? (O3.2.1.3)

Obr. 3.2



Třetí polopřímku opět rozdělíme, ale na menší dílky a obarvíme každý druhý. Opět se ptáme, zda je delší obarvená část polopřímky BB' nebo obarvená část třetí polopřímky. (O3.2.1.4)

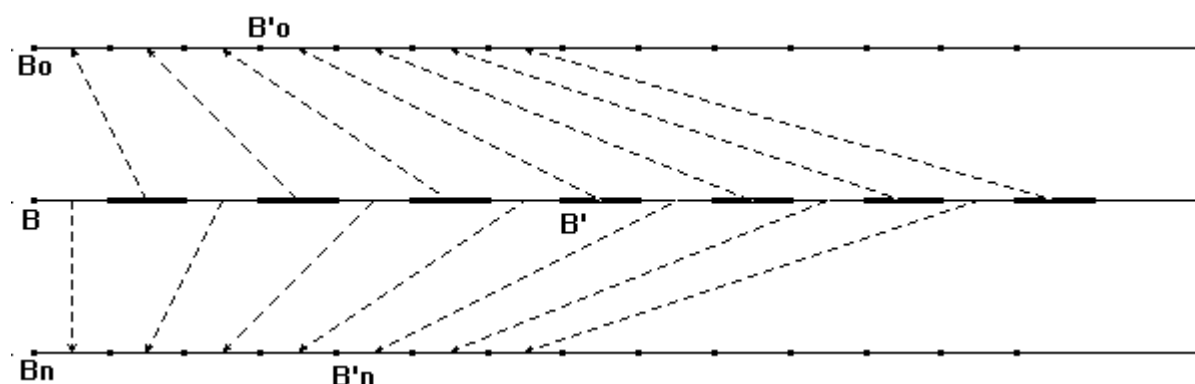
Tyto úvahy můžeme rozvíjet a následně konfrontovat jednotlivé odpovědi. Jednotlivé otázky se snaží přivodit konflikt, který je výše zmíněn jako rozpor dvou znalostí:

přímka i polopřímka jsou nekonečně dlouhé ... část je menší než celek.

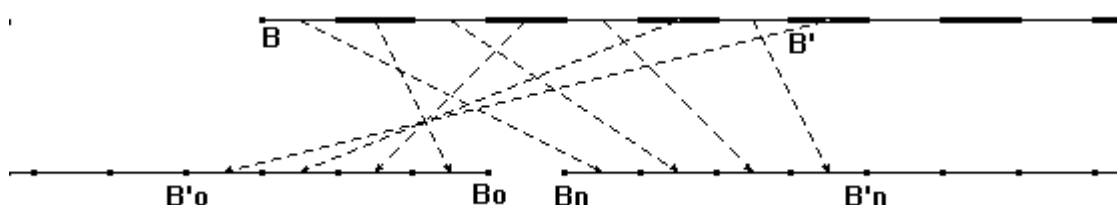
Jak již bylo řečeno, k překonávání překážek může být právě navození situace, kdy se původní znalost začne projevovat jako překážka, tedy vytvoříme kontext, ve kterém znalost selhává. Pokud si jedinec uvědomí přítomnost překážky, udělal nejdůležitější krok v jejím překonávání. K navození situace nám poslouží zmiňované otázky (O3.2.1.1-4), které můžeme dále rozvíjet. Např. u otázky (O3.2.1.2) změníme situaci tím, že polopřímku BB' posuneme „před“ polopřímku AA' . V otázce (O3.2.1.3) lze provést myšlenkový pokus, pokud obarvené části polopřímky BB' z polopřímky vyjmeme a „srazíme k sobě“. Tak nám vznikne opět polopřímka (kterou bude tvořit polovina polopřímky BB'), označme ji $B_oB'_o$. Zbylou, neobarvenou část přímky BB' můžeme také „srazit k sobě“. Opět vznikne polopřímka (také polovina původní polopřímky BB'), označme ji $B_nB'_n$. Tak můžeme klást otázku, zda jsou obě polopřímky, $B_oB'_o$ a $B_nB'_n$ stejně dlouhé nebo je některá delší. Popřípadě v myšlenkovém pokusu můžeme pokračovat a polopřímku $B_oB'_o$ otočit a posunout tak, aby ležela na stejné přímce jako $B_nB'_n$ a měla opačnou orientaci. Pokud navíc ztotožníme body B_o a B_n , pokryjeme celou přímku. Polopřímky $B_oB'_o$ a $B_nB'_n$ ale vznikly z jediné polopřímky (nic jsme nepřidávali ani neubírali). Popsané myšlenkové pokusy ilustrují obr. 3.3 a 3.4.

⁸ O experimentech podrobněji v (Prokopová, 2003).

Obr. 3.3



Obr. 3.4



Je zřejmé, že žák/student, který chápe nekonečnost přímky, resp. polopřímky, procesně (a tedy i potenciálně) argumentuje u otázek (O3.2.1.2-4) i v jejich rozšířeních tak, že jsme „s jednou přímkou vždy o nějaký krok napřed“. Zdá se tedy, že procesní – potenciální porozumění nekonečnu může také hrát roli překážky pro porozumění nekonečnosti přímky.

K navození debat, které jsou samy o sobě pro žáky/studenty přínosné, i když nenajdou uspokojivou odpověď, mohou posloužit následující úlohy a jim podobné.

U3.2.1.1 Je dána přímka a bod, který na ní neleží. Sestrojte čtverec, jehož jeden vrchol je daný bod a druhý vrchol leží na dané přímce a který (a) má nejmenší možný obsah; (b) má největší možný obsah. (Podrobně v Jirotková, 2003.)

U3.2.1.2 Jsou dány dvě kolmice. Sestrojte kružnici, jejíž střed leží na jedné z přímek a druhá z přímek je její tečnou a která má největší možný obsah. Popište co nejpodrobněji situaci kolem bodu dotyku kružnice a její tečny.

3.2.2 Bod – nekonečně malé

Nekonečno skryté v geometrickém bodu může být pro dítě ještě mlhavější než nekonečno nesené délkou přímky. Nekonečnost přímky lze přijmout snadněji, neboť ji necháváme zmizet mimo náš obzor. Avšak bod leží celý před námi a přes to může být nedosažitelný.

Cokoli, co známe z reálného světa, má nějaký rozměr. Ale i většina z toho, s čím se dítě setkává ve školské geometrii, má rozměr. Bod je něco, co s těmito objekty úzce souvisí, ale co tutostrana 26

vlastnost nepřebírá. Žáci proto velmi často o bodu přemýšlí jako o významném místě jiného objektu, např. vrchol trojúhelníku, nebo ho ztotožňují s geometrickým obrázkem, např. tečkou.

Opět se pokusíme formulovat provokativní otázku, která by mohla vyvolat vnitřní konflikt, poté vyslovíme možné odpovědi a znalosti, které by k nim mohly vést.

Otázka: Máme úsečku AB o velikosti 5 cm. Představme si (v hlavě), že ji rozstříhneme na menší a větší část v poměru 2:3. Jaké geometrické objekty získáme? Pojmenujme je. (O3.2.2.1)	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Získáme dvě úsečky AC a CB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost I)
Získáme dvě úsečky AC a DB.	Úsečka má dva krajní body. (Možnost II)

S úsečkou jako rovnou čarou se dvěma krajními body pracuje už Euklides a nepřipouští, že by krajní bod mohl chybět.

Otázka: ad I) Jak to, že bod C existuje dvakrát? Jak to, že je na dvou různých místech. (O3.2.2.2)	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Jeden bod C přejmenujeme na bod D.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení.
Bod C jsme rozstříhli.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.
Oba body C jsou jediným bodem, jen je pokaždé umístěn jinde.	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).
Otázka: ad II) Kde byly body C a D původně na úsečce AB? (O3.2.2.3)	
Předpokládané odpovědi:	Znalost
Body C a D byly těsně vedle sebe, úsečku jsme rozstříhli právě mezi nimi.	Úsečka má dva krajní body. Dva různé body mají různé označení. Body na úsečce lze jeden po druhém oddělovat.
Body C a D byly původně jediný bod na úsečce AB (překrývají se).	Úsečka má dva krajní body. Bod odpovídá pozici (na původní úsečce).
Body C a D spojením vytvoří jediný bod na úsečce AB.	Úsečka má dva krajní body. Bod je objekt, který lze dělit.

Otázky, předpokládané odpovědi⁹ a uvažované znalosti naznačují, že dítě, které řeší tento problém, se dostává na tenký led. Žák na ZŠ nemá prostředky pro řešení takových úloh, ale ani středoškolský student, který se setkal s otevřenými intervaly, často tuto zkušenost nepřenáší do geometrického kontextu úsečky. Žák je tak nucen pracovat se svými představami o úsečce a bodu. Některé jeho představy o objektech ho mohou dovést k takovým odpovědím, které budou pro něho samotného nepřijatelné, a tím motivovat snahu takové znalosti překonat.

⁹ Všechny zde uvedené předpokládané odpovědi byly v rozhovorech zaznamenány. Více v (Prokopová, 2003).

Opět uvedeme možné navazující otázky, které problém dále rozvedou a zdůrazní rozpory.
Jestliže jsou body C a D těsně vedle sebe, ale jsou různé, existuje ještě něco mezi nimi. Pokud ne, existují tedy dva různé body, které nejde spojit úsečkou nebo neexistuje střed mezi nimi?

Argumentace lze převést do aritmetiky, kdy úsečku nahradíme částí číselné osy a body čísly.

Jestliže se body překrývají, nepodařilo se úsečku rozstříhnout, protože dvě části, které vznikly, mají společný bod. Lze to udělat tak, aby byly rozstřižené?

Jestliže body C a D byly původně jediným bodem, který jsme rozstříhli, jak takový bod vypadá. A jak vypadá rozstřižením nově vzniklý bod?

Otázky mají navodit takový kontext, který by odhalil slabiny stávající znalosti – představě o bodu a úsečce, a tak nejen upozornil na možnou překážku, ale ukázal směr, jak ji překonat. Podobně jako v předcházející podkapitole může být pro připravovanou situaci výchozím bodem některá z následujících úloh a jim podobné.

U3.2.2.1 Je dán čtverec ABCD. Na jeho stranu BC umístíte bod X tak, aby trojúhelník ABX měl (a) největší možný obsah; (b) nejmenší možný obsah.

U3.2.2.2 Je dána kružnice. Vepište do ní pravidelný mnohoúhelník, který má (a) nejmenší možný obsah, resp. nejmenší možný počet vrcholů; (b) největší možný obsah, resp. největší možný počet vrcholů.

V následující kapitole se budeme věnovat tomu, jak odhadnout překážku vycházející ze zkušeností s tzv. „obvyklou chybou“ z výuky a jak s ní dále pracovat.

3.3 Přirozená čísla jako překážka

Zajímavá z pohledu TDS je častá „chyba“ (v následujících řádcích se budeme snažit čtenáře přesvědčit, že se nejedná o chybu) $0 \cdot 3 = 3$. Důvod, proč nepřijmeme tezi, že se jedná o chybu, tkví v tom, že ti samí žáci, kteří výše uvedeným způsobem násobí, vypočítají správně $3 \cdot 0 = 0$. Důvod je v tom, jak takový žák chápe násobení, tedy násobení přirozeným číslem. Výpočet $3 \cdot 0$ pro něj znamená výzvu „vezmi 3krát 0“, čemuž je dobře porozuměno jako $0 + 0 + 0 = 0$. Ovšem v tomto pojetí je výzva $0 \cdot 3$ chápána jako „vezmi 0krát 3“. Mám-li něco „brát několikrát“, musí toto množství „existovat“. Tato znalost tedy vede k produkci chybné odpovědi.

Nabídneme některé možné návody, jak žákovi pomoci tuto překážku překonat.

- 0krát je méně než 1krát 3, proto výsledek musí být menší než 3,
 podobně $1 \cdot 3 = 3 < \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5 < \frac{1}{10} \cdot 3 = 0,3 < \frac{1}{100} \cdot 3 = 0,03 < \dots$
- 0krát 3 je (1-1)krát 3 a to je 1krát 3 mínus 1krát 3, tedy 0
- $0 \cdot 3 = 3 \cdot 0 = 0$

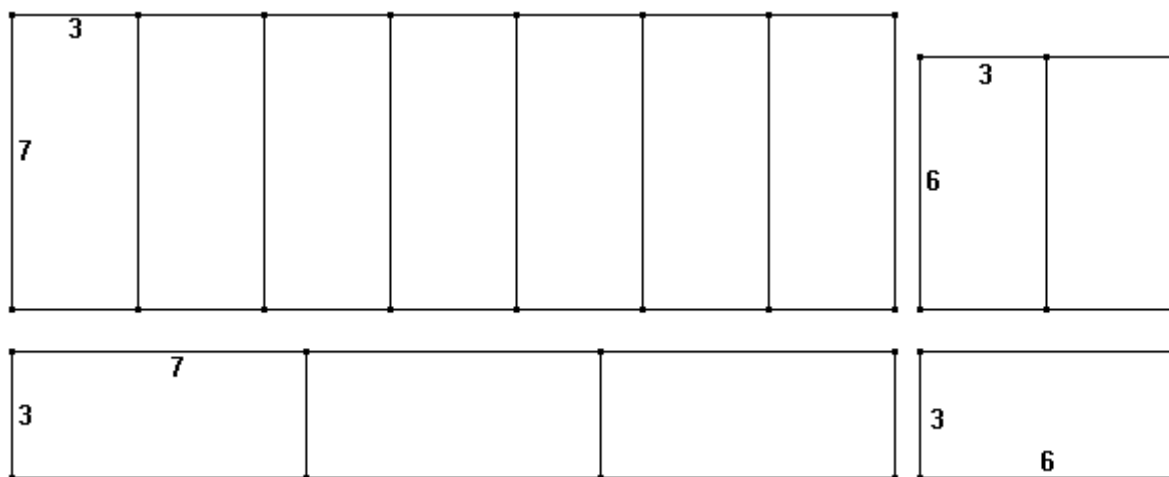
Žádná z těchto možností nám nezaručí okamžitou nápravu, ani to, že se chybná odpověď nebude znovu opakovat v jiné situaci. To je ale charakteristický rys překážky. Pokuste se sami navrhnout další způsoby, jak překážku překonat. Pamatujte, že není žádný univerzální způsob, který by vyhovoval každému žákovi. Další poznámky v (Brousseau, 1997).

Podobně se lze zabývat pojmem desetinného čísla. Pokud je desetinné číslo zavedeno jako ‚celé číslo opatřené desetinnou čárkou‘ vycházející například z metrické soustavy, může se tato znalost projevovat jako překážka při násobení desetinným číslem (násobení tak ztrácí smysl), při propojení pojmu zlomek a desetinné číslo (mezi těmito pojmy není propojení, pokud se zavádějí desetinná čísla výše zmíněným způsobem), při porozumění rozložení množiny racionálních čísel (vlastnosti množiny celých čísel, tj. např. izolovanost jejích prvků, se přenášejí i na množinu racionálních čísel).

Hledání poměru dvou stran obdélníku: Návrh přípravy situace.

Pracujeme s papíry (v dostatečném množství) ve tvaru obdélníku, jejichž strany jsou v nějakých daných poměrech, např. 3:7 (nesoudělná čísla), 6:7 (násobek předcházejícího), 6:8 (soudělná čísla), 1:10 (příprava na desetinná čísla), 1:2 (‚snadný‘ poměr). Úkolem žáků je zjistit, v jakém poměru jsou strany daných obdélníků, přičemž nesmějí používat měřítko (viz obr. 3.5-6). Pokud žáci vyřeší tento úkol, mají vyjádřit délky jednotlivých stran za pomoci jednotky, kterou bude představovat některá z daných délek stran. Jednotky budeme volit různě. Ať je ale zvolíme jakkoli, uspořádání velikostí stran bude vždy stejné. Nyní můžeme zavést/použít desetinné číslo jako jiné vyjádření toho, co jsme zjistili. V některých případech to bude snadné, jindy obtížné, nebo ho nebudeme umět najít.

Obr. 3.5-6



Při volbě jednotkové strany označené v obrázku číslem 3 dostaneme jednotlivé délky 1j., 2j. a $\frac{7}{3}$ j.; pokud zvolíme jako jednotkovou stranu označenou číslem 6, pak jednotlivé délky budou 1j., $\frac{1}{2}$ j. a $\frac{7}{6}$ j.

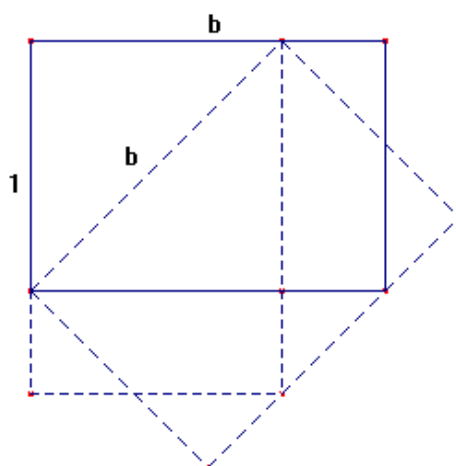
V podobné činnosti můžeme pokračovat při zavedení iracionálního čísla. Dané obdélníky nahradíme papírem formátu A4, popřípadě A5 (v dostatečném množství). Úkol je stejný jako v předcházejícím návrhu. Má se zjistit, v jakém poměru jsou délky stran obdélníku A4 (A5).

V tomto případě se však opakováním dříve použitého postupu nelze dopracovat přesného výsledku. Lze se mu jen přibližovat (což může být dobrou propedeutikou k pojmu limita posloupnosti). Nalezený výsledek – iracionální číslo (strany jsou v poměru $\sqrt{2}:1$) je tak chápán jako číslo, které nelze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel (viz obr. 3.7a 3.8). Podrobněji v (Prokopová, 2005).

Obr. 3.7

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15					

Obr. 3.8



Umístění zlomku mezi dvě čísla: Návrh přípravy situace

Jak jsme zmínili výše, častou potíží s porozuměním racionálním číslům souvisí s uspořádáním a hustotou množiny $\mathbb{Q}$. Pomoci nám může následující hra, která má několik úrovní.

- Umístí zlomek mezi dvě celá čísla, která nenásledují za sebou. Např. umístí číslo $\frac{5498}{31}$

mezi dvě celá čísla, která následují za sebou. (Pozn.: Pokuste se předem odhadnout, jaké strategie by použili vaši žáci. Totéž udělejte u dalších výzev. Pomoci vám může postup popisovaný v kapitole 2.)

- Umístí zlomek mezi dva zlomky. Pokus se navrhnout co nejmenší interval.
- Umístí daný zlomek do co nejmenšího možného intervalu.
- Umístí zlomek mezi dvě desetinná čísla. Pokus se najít co nejmenší interval. Podobně v (Spagnolo a Čížmár, 2003).

Výše navrhované náměty pro tvorbu situací lze využít jak k frontální výuce, tak k výuce, která klade důraz na zodpovědnost žáka/studenta za (své) učení, tj. obsahuje fázi a-didaktické situace. Jsou vhodné především pro skupinovou práci. K jejich přípravě lze dobře využít metod, které byly popsány v předcházejících kapitolách 1 a 2.

3.4 Závěr

Tato kapitola měla přiblížit pojem překážka ve smyslu znalosti, která v novém kontextu brání získání znalosti „lepší“. V čl. 3.2 jsme se zabývali konkrétními znalostmi o bodu a přímce související s jevem nekonečna, abychom si demonstrovali způsob vyhledávání a analýzy překážek. Pokusili jsme se předpovědět, jaké znalosti by mohly hrát roli překážky, a formulovali jsme několik problémových otázek, které mohou posloužit jednak jako diagnostický nástroj, ale také jako prostředek k překonání překážek. Jev nekonečno byl vybrán proto, že jsme přesvědčeni, že nabízí bohaté možnosti pro rozvoj myšlení jedince. Geometrický kontext byl vybrán proto, že se s ním dítě ve škole setkává již na prvním stupni, i když z počátku implicitně. Proto lze dobře sledovat možné překážky, které mají tendenci se v čase opakovat.

V čl. 3.3 jsme se věnovali tomu, jak pracovat s překážkou a jak ji využít pro přípravu didaktických situací. To jsme ukázali na dvou „obvyklých chybách“ – násobení nulou a chápání desetinných čísel jako celých čísel s desetinnou čárkou. Zároveň jsme podali konkrétní návrhy, jak tyto překážky překonávat. K přípravě hodiny pak lze využít těch principů, které byly formulovány v kapitole 1 Didaktické situace a v kapitole 2 Analýza a priori.

Úvaha na rozloučenou s textem

Na závěr zdůrazníme, že cílem aktivit, úloh a výzev, které jsme v textu představili, není to, aby žák uspokojivě odpovídal na uvedené otázky, ale aby konfrontoval své znalosti a představy. Tedy jediným cílem je, aby přemýšlel a konstruoval své poznatky a tím se rozvíjel. Zcela by naše snažení pozbylo smyslu, kdybychom mu odpovědi prozradili. Pak by překážka nemohla být překonána, pravděpodobně by se projevila později znovu. Proto je nezbytné, aby odpovědnost za učení nesl také žák sám, což je princip a-didaktické situace. Nelehkým úkolem učitele (mimo jiného) je, aby odhaloval principy získávání poznatků a na jejich základě připravoval takové didaktické situace, kterými by převzetí zodpovědnosti za vlastní vzdělávání svým žákům umožnil.

Literatura

- Brousseau, G.: *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 1997.
- Euklides: *Základy (Elementa)*. Překlad F. Servít. Praha: JČMF. 1907.
- Hrabáková, H.: *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF. 2005a.
- Hrabáková, H.: Analysis A Priori of The “Puzzle” Activity. In Novotná, J. (Ed.). *Proceedings SEMT 05*. Praha: UK-PedF. 2005b. s. 349.
- Novotná, J.: *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta. 2000.
- Novotná, J.: Ukázky analýzy a priori pro slovní úlohy. In Dvořák, P., Herman, J. (Eds.). *Sborník z JŠDS Vrabcov, jaro 2003*. Praha: UK-PedF, OR Didaktika matematiky. 2003. s. 31-54.
- Pelantová, A., Novotná, J.: Nepodceňujeme naše žáky? Objeví žáci samostatně strategie řešení slovních úloh? In Ausbergerová, M., Novotná J. (Eds.). *IX. Setkání učitelů matematiky ze všech typů škol*. JČMF – ZU Plzeň. 2004. s. 229-235.
- Petráčková, V., Kraus, J. a kol.: *Akademický slovník cizích slov*. Praha: Academia. 2005.
- Prokopová, M.: Students' Conception of a Point and its Relation to a Straight Line: A Comparison of Phylogenesis and Ontogenesis. In *Prace Naukowe: Matematyka IX*. Czestochowa: Wyzsa Sokola Pedagogiczna. Wydawnictwo WSP. 2003.
- Prokopová, M.: Geometrie papíru A4. In *Letní škola učitelů matematiky a fyziky 2004*. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta UJEP. 2005.
- Radford, L.: On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17, 1. Vancouver: FLM Publishing Association. 1997. s. 26-33.
- Složil, J.: *Teorie didaktických situací v české škole. Dělitelnost přirozených čísel v 6. ročníku ZŠ*. [Diplomová práce.] Praha: UK-PedF. 2005a.
- Složil, J.: Didactical situations – A Different Way of Teaching Mathematics. In Novotná, J. (Ed.). *Proceedings SEMT 05*. Praha: UK-PedF. 2005b. s. 361.
- Spagnolo, F., Čížmár, J.: *Komunikácia v matematike na strednej škole*. Brno: Masarykova univerzita. 2003.

Témata seminárních prací

1. Didaktické situace – návrhy a realizace

Zvolte téma školské matematiky, pro které navrhnete didaktickou situaci tak, aby byly zahrnuty všechny její hlavní části. Situaci následně realizujte ve třídě. Její průběh a výsledky vyhodnoťte hlavně z pohledu splnění plánovaných cílů a vyvolaných změn v jednotlivých fázích situace.

2. Překážky a analýza a priori

- a) Překážky v budování pojmu funkce.
- b) Překážky v budování základních planimetrických pojmů.
- c) Překážky v uchopování a řešení rovnic.
- d) Překážky v uchopování číselných oborů, v budování pojmu číslo.
- e) Překážky v budování pojmu procento.

K jednotlivým tématům na základě často se opakujících chyb (u velkého počtu žáků, které se opakují i v jednotlivých ročnících ZŠ a mnohdy přetrvávají i dále) nalezněte možné znalosti – překážky pojící se k vybranému pojmu/vybraným pojmům. Navrhněte činnosti, které napomohou jejich překonávání. Formulujte úlohy, včetně návodných a navazujících úloh s řešením pro jejich překonávání. Navrhované činnosti ukotvěte v plánu výuky. U navrhovaných úloh vypracujte analýzu a priori řešitelských postupů žáků.