Université Victor Segalen Bordeaux 2
Faculté des Sciences de l'Homme

Etude de la résolution des « problèmes verbaux » dans l'enseignement des mathématiques

De l'analyse atomique à l'analyse des situations

Note de synthèse
pour l'habilitation à diriger des recherches
présentée par

Jarmila Novotná

Département de Mathématiques et de Didactique des Mathématiques
Faculté de Pédagogie de l'Université Charles de Prague

Soutenue en 2003
Devant le jury formé de :

- Mme Michèle Artigue : Université de Paris VII
- M. Guy Brousseau : Professeur Emérite, Université Bordeaux 1
- M. Pierre Clanché : Université Victor Segalen Bordeaux 2
- M. André Rouchier : Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Aquitaine
- M. Bernard Sarrazy : Université Victor Segalen Bordeaux 2
- M. Petr Vopěnka : Université Charles de Prague

Laboratoire de Didactique et d'Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques
EA 2964 DAEST Université Victor Segalen Bordeaux 2
3, ter place de la Victoire, 33076 Bordeaux Cedex

Je tiens à remercier très particulièrement Guy Brousseau et Bernard Sarrazy qui ont permis de rendre claire pour les lecteurs français les modestes idées que je défends dans le texte.

Sommaire

Introduction

Dans cette introduction, je présenterai quelques éléments de ma « biographie scientifique » qui permettra de montrer les raisons pour lesquelles mon intérêt s'est porté sur l'enseignement des mathématiques, et plus particulièrement sur le rôle que les « problèmes verbaux » pouvaient assurer dans cet enseignement.

Le corps du texte de la note d'habilitation s'attachera à montrer, selon une présentation historique, les cadres théoriques et les principaux résultats que j'ai établis depuis 1987 sur cette question. Quatre grandes périodes seront ainsi abordées correspondant aux quatre parties de cette note :

- L'analyse comparative des stratégies de résolution (Partie 2) ;
- La méthode d'analyse atomique (Partie 3) ;
- De l'analyse atomique à l'analyse des stratégies de résolution des problèmes verbaux (Partie 4) ;
- De l'analyse des comportements à celles des situations (Partie 5).

Dans ces différentes parties, nous ne reprendrons que de façon synthétique les hypothèses, les conditions de l'observation et les résultats de nos recherches – nous renverrons, pour chacune d'elles, soit à des références bibliographiques, soit à des documents annexes qui détailleront ces protocoles. Nous nous limiterons donc ici à faire apparaître les résultats auxquels nous avons abouti, à pointer leurs insuffisances ou les questionnements qu'ils ont suscités ce qui permettra d'expliquer clairement l'évolution de nos cadres d'analyse et les nouvelles perspectives que nous nous fixons actuellement.

Eléments de biographie

A la fin de mes études universitaires en mathématiques pures en 1968, ma carrière professionnelle a débuté comme Maître-assistant au Département de la physique des réacteurs à l'Institut des Recherches Nucléaires de l'Académie Tchécoslovaque des Sciences. Mon travail consiste à élaborer, d'un point de vue mathématique, les résultats des expériences de mes collègues physiciens. Durant cette période, je m'intéresse particulièrement à la statistique, aux processus numériques – notamment à leur stabilité – et au traitement informatique des données. C'est durant cette période que je commence à participer aux séminaires de géométrie du Pr. Zbyněk

Nádeník au Département des Mathématiques et de Géométrie Descriptive de la Faculté de Construction de l'Université Technique Tchèque de Prague. C'est ainsi que je suis amenée à m'intéresser aux analogies des inégalités du type Wirtinger et de leurs usages en géométrie. Ces travaux ont constitué la base de mes études du 3e cycle (RNDr., CSc.) ; les résultats de ces diverses activités ont été intégrés dans ma thèse d'habilitation – qui me permis ultérieurement d'obtenir un poste de Maître de conférences – et ont été publiés dans diverses revues ou Actes.

En 1987, j'entre au Département de Mathématiques et de Didactique des Mathématiques de la Faculté de Pédagogie de l'Université Charles de Prague. Là j'entreprends un certain nombre de recherches relatives à des questions, pas vraiment unifiées, de didactique des mathématiques – parallèlement, jusqu'à 1992, je poursuivrais mes recherches en mathématiques pures.

En 1992, je débute une collaboration avec le CIRADE de l'Université de Québec à Montréal suite au congrès ICME 7. Nos premiers travaux portent sur l'étude comparée des stratégies arithmétiques et algébriques dans le cas de problèmes de partages inégaux. Cette première collaboration est importante puisqu'elle déterminera largement le thème de mes recherches ultérieures : la résolution des « problèmes verbaux ». Un second facteur renforcera cette orientation de recherche : l'arrivée de Milan Hejný au Département de Mathématiques et de Didactique des Mathématiques de la Faculté de Pédagogie de l'Université Charles. En effet, il proposa une méthode pour analyser les traces écrites des résolutions des élèves (« l'analyse atomique », Hejný, 1992). L'ambition de ce modèle d'analyse était de décrire le processus de la « pensée de l'élève » sur la base des traces écrites lors de leurs résolutions. Le principe de cette analyse repose sur l'atomisation des processus de résolution : il s'agit de décomposer ce processus en unités élémentaires appelées « atomes », ces atomes pouvant être « statiques » ou « dynamiques ». Mais les questions que posaient ce type d'analyse devinrent vite très complexes pour des raisons que nous exposerons plus loin ; je me suis orientée alors vers la recherche d'un modèle plus précis (Novotná, 2000a).

C'est en 1997, au congrès ERCME de Poděbrady, que je rencontre Pearla Nesher et Sara Herhskovitz de l'université d'Israël avec qui je collaborerais eu égard à un certain nombre de préoccupations et résultats communs. Cette ouverture m'a conduit à envisager de nouvelles perspectives de recherche de celle qu'avait permis d'initier l'analyse atomique de M. Hejný. J'ai présenté trois études relatives à la compréhension par les élèves des problèmes verbaux lors d'une conférence à ICME 9 en 1997 (« Students' levels of understanding of word problems. »). J'ai poursuivi dans cette voie, traditionnelle en République Tchèque, jusqu'en septembre 2002.

Ma « rencontre » avec la Théorie des situations didactiques en mathématiques (Brousseau, 1998) est relativement récente. Elle date de 1999, date à laquelle j'ai rencontré des collègues français à Prague – P. Clanché et B. Sarrazy de l'Université de Bordeaux 2) qui ont présenté leurs travaux 1999 à l'occasion de « *International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* » organisé à l'université Charles en août 1999 (Clanché, Sarrazy, 1999). Mais ce n'est vraiment qu'à compter de 2001, qu'a véritablement débuté ma collaboration avec l'équipe bordelaise de didactique des mathématiques et que date ma rencontre avec Guy Brousseau, l'initiateur de la théorie des situations. Les perspectives et les instruments d'études offertes par cette théorie m'ont permis de reprendre un certain nombre de questions que je me propose aujourd'hui d'examiner et que je présenterai dans la dernière partie de ce texte.

Partie I. Les problèmes verbaux dans l'enseignement des mathématiques

Dans la communauté didactique la notion de « word problem », souvent traduite en français par « problèmes verbaux », est peu commune, à tout le moins peu unifiée. Cette notion est en revanche plus utilisée dans le champ de la psychologie cognitive et recouvre un domaine de recherches très vaste – plus particulièrement dans le courant des théories du traitement de l'information. Si les travaux que je présenterai ici peuvent sous certains aspects présenter quelques analogies avec ces approches, leurs visées diffèrent fortement puisqu'il s'agit de mieux comprendre les rapports qui peuvent être établis entre les caractéristiques formelles (linguistiques et mathématiques) de ce type de problèmes et les procédures mises en œuvre par les élèves en vue de mieux comprendre certains phénomènes d'enseignement des mathématiques. Mon ambition est de produire un modèle d'analyse satisfaisant qui permettent de rendre compte des difficultés rencontrées des élèves en rapport avec les conditions et des effets didactiques de leur apparition et de leur contrôle, afin d'envisager quelques leviers possibles pour aider les enseignants à réguler, voire corriger, ces difficultés. Aussi, compte tenu de la place qu'occupe cette notion dans mes recherches je me propose dans un premier temps d'en faire une première présentation. Désormais nous utiliserons la traduction la plus courante dans la littérature en langue française : « problèmes verbaux ».

1.1 - **Les « problèmes verbaux »**

L'usage des problèmes verbaux dans l'enseignement n'est pas récent : ils étaient déjà utilisés dans l'antiquité. Une de leur caractéristique invariante est la présence d'éléments linguistiques pour formuler l'énoncé du problème ; cet énoncé décrit une situation sociale (une histoire) – le plus souvent désignée par l'expression « habillage du problème » – qui évoque des situations de la vie quotidienne censées être familières des élèves (« Maman va au marché, elle a acheté… » ; « Jean joue deux parties de billes… » etc.).

> Word problems are characterized as “problems where usually a certain real situation is described and the task of the solver is to determine answers to asked questions”. (Kuřina, 1989).
>
> A characteristic feature of a word problem is the use of words in the description of the problem. … A word problem should somehow refer to real-world context, that is, word problems are opposed to purely mathematical problems. (Semadeni, 1995).

Les problèmes verbaux sont donc des problèmes qui comportent des éléments de nature non-mathématiques par lesquels sont décrits des objets, des phénomènes ou des histoires (avec leurs propriétés et leurs relations diverses) :

> Under the term word problems in school mathematics, we understand such problems in which objects, phenomena and situations (with their diverse properties and relationships) from various non-mathematical domains occur. (Odvárko et al., 1990).

A l’école, les problèmes verbaux comportent au moins :

- un énoncé – qui permet de décrire brièvement l’histoire – dans lequel une donnée numérique (au moins) n’est pas explicitement donnée ;
- une question qui porte sur cet énoncé.

Le travail demandé à l’élève est de produire une réponse numérique à cette question, souvent accompagnée d’une phrase explicative ; cette réponse exigera l’utilisation des informations (numériques, relationnelles…) contenues dans l’énoncé (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

> Word problems can be defined as verbal descriptions of problem situations wherein one or more questions are raised the answer to which can be obtained by the application of mathematical operations to numerical data available in the problem statement. In their most typical form, word problems take the form of brief texts describing the essentials of some situation wherein some quantities are explicitly given and others are not, and wherein the solver - … - is required to give a numerical answer to a specific question by making explicit and exclusive use of the quantities given in the text and mathematical relationships between those quantities inferred from the text. According to this definition, a characteristic feature of word problems is the use of words to describe a (usually hypothetical) situation. (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

De ce point de vue, nous pourrions rapprocher la notion de « problèmes verbaux », telle que nous l’utilisons, avec celle de « *problem to find* » définie par Polya :

> The aim of a *problem to find* is to find (construct, produce, obtain, identify, …) a certain object, the *unknown* of the problem, satisfying the *conditions* of the problem which relate the unknown to the *data* of the problem". (Polya, 1962, 119).

Ainsi, compte tenu de ces premières définitions, dans les deux problèmes suivants, seul le premier sera considéré comme un problème verbal, le second comme un problème classique (algorithmisable) :

> **Problème n° 1** : « Les deux filles de M. Novák, Pauline et Marie, ont gagné ensemble 181 Kč (couronnes tchèques). La différence entre leurs gains est de 37 Kč. Combien de Kč chaque fille a gagné ? »
>
> **Problème n° 2** : « Résolvez l'équation quadratique : $x^2 + 3x - 7 = 0$. »

Dans les problèmes verbaux, la formulation de l'énoncé est fondamentale. En effet, comme le souligne Richard (1984, 228), « il est tout à fait injustifié de considérer que la formulation est accessoire, que dans le problème il y a la structure et le contenu […]. La formulation est une partie aussi essentielle du problème que les relations qui sont exprimées, dans la mesure où elle a un rôle déterminant dans la construction de la représentation du problème ». Ainsi, dans la perspective d'une recherche didactique Sarrazy (2002) a montré les effets didactiques associés à la variété de ces formulations notamment en termes de flexibilité dans l'usage que faisaient les élèves des algorithmes qui leur avaient été enseignés dans des situations nouvelles : plus la variabilité des professeurs à envisager des modalités différentes pour une même variable d'énoncé est élevée, plus leurs élèves, toutes choses égales par ailleurs, se montrent capable d'utiliser leurs connaissances dans des situations nouvelles (voire inhabituelles ou atypiques).

1.2 - L'usage des problèmes verbaux dans l'enseignement

La résolution des problèmes verbaux est un des rares des domaines de mathématiques scolaires qui exige la mathématisation des situations évoquées par l'habillage et le retour sur le contexte sémantique de l'énoncé.

Bien sûr, le plus souvent, l'élève ne perçoit pas immédiatement le modèle mathématique du problème ; une des tâches qui est dévolue à l'élève dans le contrat didactique est précisément de découvrir (ou de construire) ce modèle mathématique. Autrement dit, les algorithmes disponibles chez l'élève ne lui sont, dans cette étape fondamentale, d'aucune utilité. C'est précisément cette étape que nous nous proposons d'étudier.

Les thématiques (*i.e.* les contextes sociaux, les histoires… évoqués dans les problèmes), au-delà des intérêts strictement motivationnels qu'elles peuvent susciter chez les élèves, peuvent, ou non, favoriser la résolution du problème. Comme le rapporte Sarrazy (2002, 325) :

> « Selon la familiarité des élèves à l'égard de la thématique, les performances cognitives, pour des domaines d'activité très variés, diffèrent de façon significative. Par exemple, la capacité de mémoriser un texte en situation scolaire est fortement liée au niveau de connaissance initial des élèves dans le domaine considéré – Cf. Ehrlich, 1985, 173) ; et les problèmes d'arithmétique qui évoquent des situations familières s'avèrent mieux réussis que ceux qui se réfèrent à des situations non familières (Cf. Fayol, 1991, 265 ; Ehrlich, 1990, 52). »

L'usage didactique des problèmes verbaux apparaît donc comme un moyen pertinent, à tout le moins très utilisé par les professeurs, pour développer les compétences mathématiques de leurs élèves et conditionne ainsi leurs attitudes envers cette discipline. Ces problèmes leur donnent la possibilité de « voir et juger » par eux-mêmes indépendamment de ce que leur professeur exige d'eux, d'analyser et de comprendre l'usage des connaissances mathématiques qui leur ont été enseignées. Ils permettent aussi de développer leur capacité à utiliser leurs connaissances mathématiques dans des domaines extra-mathématiques et contribuent ainsi à les aider à reconnaître, comprendre et mémoriser des notions, des méthodes et des résultats des mathématiques (Blum & Niss, 1991). Enfin, ils contribuent à développer leurs habiletés à sélectionner les informations nécessaires, à travailler de façon créative et de développer des procédures heuristiques (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Certains *élèves* préfèrent résoudre des problèmes classiques (facilement algorithmisables – tel celui que nous avons cité plus haut) que des problèmes verbaux au-delà même des difficultés communes pour ces deux types de problèmes (Novotná, 2000a). Quelques raisons peuvent être invoquées à cette préférence :

- Dans les problèmes verbaux, l´élève peut ne pas comprendre le contexte sémantique ou ne pas percevoir la vraisemblance du contexte social évoqué dans l'énoncé ; dans ce cas il peut refuser de résoudre le problème – comme a pu le montrer J. Adda (1976, 1987) par exemple ;
- Pendant la lecture de l´énoncé ou des essais de résolution successifs, l´information sélectionnée par l'élève peut être altérée pour des raisons diverses

(la longueur du texte, le type de langage utilisée, un trop grand nombre des informations…).

- Enfin, l´élève peut comprendre le contexte évoqué et les informations présentes dans l'énoncé, mais ne perçoit pas le modèle mathématique qui lui permettrait de résoudre le problème.

Ainsi, les professeurs doivent souvent faire face à un certain nombre d'interrogations relatives à l'usage didactique de ce type de problèmes et n'ont, le plus souvent, aucun instrument qui leur permettrait d'y répondre :

- Quels sont les obstacles qui empêchent l'élève de dépasser les difficultés utiles (didactiquement) pour la résolution du problème ?
- Comment reformuler l'énoncé ou les questions pour ne laisser à la charge de l'élève que les difficultés utiles à son apprentissage ?

Rendl (2001) montre bien comment les enseignants sont démunis face à ce point aveugle du contrat : « Les enfants savent calculer, disent-ils, mais ne savent pas utiliser leurs connaissances dans les problèmes verbaux » ; aussi pensent-ils que « les enfants ne pensent pas ».

Mes propres observations dans les classes tchèques montrent que pour les raisons précitées (et d'autres), les élèves – mais aussi les enseignants – préfèrent les problèmes dans lesquels l'usage d'un algorithme de résolution adéquat est évident, où ils peuvent déterminer cet algorithme sans aucune équivoque. Les professeurs peuvent ainsi se décharger de la délicate et difficile négociation du sens et leur tâche se limite à repérer les moments d'occurrence d'une erreur et à évaluer la « justesse » d'une résolution. Sous la pression du contrat, et en l'absence de moyens et d'instruments didactiques de négociation du sens des connaissances en jeu, les professeurs sont souvent conduit (nécessairement) à développer des effets Topaze – en proposant à leurs élèves des problèmes facilement algorithmisables tout en leur indiquant de façon discrète l'algorithme à utiliser. Dans ce cas, le travail de l'élève se limite à mettre en œuvre l'algorithme correspondant aux indices présents dans l'énoncé (les mots ou expressions utilisés, la forme de question, et parfois même des illustrations fort suggestives quand ce n'est pas le titre même du chapitre du manuel qui oriente l'élève sur le choix qu'il doit réaliser). En conséquence, les élèves tchèques sont de moins en moins capables de résoudre correctement des problèmes verbaux dont la formulation est différente de celle à laquelle ils sont habitués, et se trouvent démunis face à des problèmes atypiques, non habituels, ou présentés dans un contexte non-familier. Ces difficultés sont évidemment moins fréquentes dans les classes où les enseignants proposent à leurs élèves des problèmes verbaux non algorithmiques.

L'objet de l'étude étant maintenant posé, je me propose de présenter (chronologiquement) les cadres théoriques, les analyses des divers résultats et leurs interprétations que j'ai établis sur cette question depuis 1992 ainsi que les raisons de leur évolution.

Partie II. L’analyse comparative des stratégies de résolution des problèmes verbaux

1.1 - L’analyse comparative

En 1992 j’ai commencé à coopérer (et Marie Kubínová s’est bientôt jointe à moi) avec l’Université de Québec à Montréal au CIRADE (Nadine Bednarz et Bernadette Janvier) sur *l’étude comparative des stratégies arithmétiques et algébriques d’élèves pour les problèmes de partages inégaux au niveau de collège avant et après l’introduction de l’algèbre scolaire*. Le but de cette recherche était de trouver dans quelle mesure la nature arithmétique / algébrique de l’énoncé influence le choix de stratégies de résolution de l’élève. Disons-le d’emblée, une telle influence n’a pas pu être montrée.

Un autre but était d’essayer de trouver les causes des différences de résultats découvertes au Canada et en Tchécoslovaquie et attachées aux différences entre les enseignements de l’algèbre dans les deux pays. (Pour plus d’informations et les résultats détaillés, voir (Kubínová, Novotná, Bednarz, Janvier & Totohasina, 1994).) Nous avons reçu du CIRADE la liste des stratégies prévues, divisée dans les catégories suivantes : stratégies arithmétiques, algébriques, celles dans lesquelles des éléments algébriques sont utilisés mais où la solution est arithmétique et celles qui sont de nature algébrique sans indications explicites. Une autre subdivision opposait les différents processus mathématiques de solution (commencer par le nombre des parts – ou par la grandeur d’une part).

1.2 - Les résultats de l’analyse comparative

L’analyse comparative a fait apparaître des différences dans l’utilisation des stratégies et dans le traitement formel de l’énoncé.

Certaines de ces différences pouvaient être attribuées directement à des différences de culture et probablement de pratique didactique.

Ainsi les élèves tchèques ont utilisé en plus grand nombre des résolutions du type « solutions arithmétiques avec des éléments algébriques utilisés » et nous avons attribué ce fait aux pratiques habituelles des professeurs tchèques. La part de ces méthodes uniformes, demandées par les enseignants déjà au niveau primaire paraissait plus grande chez les élèves tchèques. De la même façon, il apparaissait plus fréquemment des traces écrites de solutions incomplètes, ou non justifiées, inspirées visiblement par des méthodes enseignées mais non comprises par les élèves. Par contre, la population des élèves tchèques présentait un ensemble varié et nombreux de stratégies non prévues *a priori*. Par exemple celle qui consiste à envisager des réponses possibles à la question posée, et à l'utiliser pour calculer une valeur donnée dans l'énoncé, puis à tenter de corriger la tentative pour s'approcher de la valeur connue avec des stratégies d'approximation plus ou moins sophistiquées. Cette méthode est habituellement rejetée par les enseignants qui redoutent d'encourager leurs élèves à répondre « au hasard » sans utiliser la méthode standard. (Le fait observé que les élèves qui utilisaient cette méthode dans un premier exercice l'utilisaient dans tous les autres, pourrait leur donner raison.)

Les différences de méthodes d'enseignement utilisées pour l'introduction de l'algèbre dans les deux pays se manifestaient de la même façon dans l'utilisation des éléments algébriques.

Puisque nous ne pouvions mettre en évidence que des différences de résolution attribuables à des différences d'enseignement, il nous est apparu en conclusion que la connaissance des processus intellectuels de l'élève pendant la résolution des problèmes, exigeait des analyses différentes.

Or en 1993, Milan Hejný a initié notre équipe à la méthode d'analyse atomique des processus de solution, qu'il était en train d'élaborer et qui promettait de répondre à cette attente.

Partie III. L’analyse atomique des problèmes de partages inégaux

1.1 - Les principes de la méthode d’analyse atomique

La méthode A.A. est un type de microanalyse « basé sur deux idées : l’atomisation des de l’ensemble des solutions écrites par les étudiants et l’analyse comparative » (Hejný, 1992, 66).

Elle prévoit (1) dans un premier temps l’identification dans les traces écrites des étudiants des plus petites parties interprétables comme relation mathématique formelle (« atomes ») et (2) l’identification d’une activité mentale ou d’une grappe (cluster) d’activités mentales dont cette relation résulterait (« atome dynamique »). Ces couples « formule / activité » sont identifiés (3) comme appartenant à un certain ensemble de types de solutions (organigramme de résolution), établi *a priori* ou imaginés d’après les résultats. Ils constituent le « sous ensemble représentatif » (des solutions possibles). Les types de solutions observés sont alors interprétés et comparées du point de vue de leur validité et d’un certain nombre de caractères (4 et 5) (« phénomènes ») tels que « la compréhension de la tâche, la qualité des dessins, les notations utilisées, les stratégies de résolution, les mauvaises conceptions… la structure logique, le type de raisonnement… ».

En fait le traitement direct de la totalité des traces produites par une cohorte d’élèves se révélant trop complexes, il fallait travailler avec de petits échantillons de réponses, puis étendre (6) ces observations à l’ensemble de l’échantillon et éventuellement modifier la liste de l’ensemble représentatif des solutions.

A la suite de quoi (7) :

> « A synthetic view should be used to gain a deep inside into different aspects of the task solving process. So we should:
> a) give a profound characterisation of each sample solution. Indicate particularly where it is strong and where it is weak,
> b) look for a method how to help a student to remove his/her weakness. »
> (Hejný, 1995, 138).

1.2 - L'analyse atomique des problèmes verbaux

Nous avons eu l'espoir que cette approche nous permettrait de découvrir indirectement, ou au moins de deviner, certaines des activités intellectuelles de l'élève.

Nous espérions, de plus, pouvoir classifier ces types de solutions d'après les variables suivantes :

- la fonction dans la procédure de résolution ou des grappes d'activités (traitement de l'énoncé, mathématisation, calcul, vérification, réponse),
- le rapport aux demandes de l'enseignant (les formes prescrites ou acceptées des éléments des traces écrites),
- le rapport au système éducatif (les algorithmes enseignés ou les solutions personnelles, l'utilisation des seules connaissances mathématiques ou liées à un contexte étranger aux mathématiques),
- la forme des descriptions de solutions (procédurales ou déclaratives) (Hejný, 1992, 76).

Avant de considérer les moyens de réaliser ces études expérimentales à propos des problèmes verbaux que je continuais à vouloir étudier, il fallait résoudre des tâches « techniques » : par exemple, établir une méthode de détermination des atomes de ce genre de textes, méthode qui ne figurait pas dans les travaux de Hejný.

Dans le modèle de Hejný, les atomes statiques étaient des formules (pas nécessairement atomiques puisqu'elles peuvent contenir des symboles logiques) et les atomes dynamiques, des théorèmes comme arguments de démonstration – tous, objets identifiables assez facilement. Dans un calcul formel très court, comme celui étudié par Hejný dans l'algèbre du début du collège, le nombre de ces objets restait assez faible (15 AS et 9 AD). Dans les problèmes verbaux que nous avions déjà obtenus effectivement, les éléments identifiables étaient beaucoup plus nombreux et variés : textes (justifications verbales, identification d'objets), éléments de schémas, termes, formules, calculs numériques, etc. Chacun relevant de règles syntaxiques et de sémantiques diverses. (Novotná et al., 1995), (Novotná et al., 1996a), (Novotná et al., 1996b).

Pour essayer de dresser l'organigramme de résolution il a fallu déterminer des étapes et retrouver pour chacune les indices écrits qui les accompagnaient. Nous avons donc dû regrouper ces indices en molécules, de façon à conserver si possible un sens aux unités obtenues.

Une « molécule » joue le rôle d'un atome dans la méthode initiale mais elle est composée d'un agrégat d'indices. Alors que dans l'exemple de Hejný, les atomes sont des objets mathématiques bien définis (des formules d'algèbre) et assez simples, les relations « élémentaires » mobilisées dans un problème verbal sont beaucoup plus variées et appartiennent à des répertoires divers (objets du milieu non mathématique et mathématique, formulation d'opérations, de fonctions, de mesures, de relations, illustrations iconiques etc.)

De même les instruments de passage d'une molécule à la suivante sont de différentes natures : relation de sous-tâche à tâche, possibilité effective de calcul, utilité dans le projet, possibilité de formuler le résultat, vérification, justifications heuristiques ou logiques, arguments didactiques… et nous avons dû les classer en « pas tactiques » et en « pas méta-tactiques » identifiés respectivement aux objets statiques et dynamiques de la théorie. Ce travail constituait une mise à l'épreuve de l'analyse atomique, du seul point de vue de son applicabilité.

1.3 - Résultats de l'analyse atomique

Il est résulté de notre travail que :

- le recueil et le traitement des objets de l'observation nous est apparu comme réalisable conformément au programme, mais au prix d'un très grand nombre d'adaptations, de compléments et de précisions plus ou moins opportunistes.
- Chacun de ces systèmes ne prenait à son compte qu'une partie seulement des informations souhaitées : l'élaboration de l'énoncé ou le choix de stratégie de résolution, ou le diagnostic des erreurs dans la résolution et leur possible re-éducation, ou le travail avec le contexte et l'utilisation des expériences de la vie. Ce qui augmentait considérablement le nombre des unités et des objets à prendre en considération. (Novotná et al., 1995, 1996a.)
- La pratique de la méthode nous a conduit à une « connaissance » beaucoup plus intime des réponses des élèves (avantages, défauts, caractères).

- En particulier nous avons obtenu les observables nécessaires aux conjectures suivantes.
- Nous avons identifié aussi entre autres un certain nombre de solutions comme pouvant relever de conceptions – correctes ou non – de l'*ensemble* du problème posé.
- Mais ce n'était pas le produit d'un traitement explicité dans le modèle où rien ne nous permettait d'objectiver ces connaissances.

Pour obtenir les classifications espérées et étudier les variables évoquées plus haut, il restait alors à confronter ces « résultats théoriques » à des données expérimentales : problèmes proposés à des cohortes d'élèves, questionnaires à des professeurs etc.

Cette deuxième étape de nos recherches posait des problèmes nouveaux :

- la première difficulté était que modèle de Hejný ne précisait pas comment il fallait pratiquer cette confrontation. Il ne produisait aucune question sur la contingence et ne donnait par conséquent aucune prévision de faits précis et observables, qui auraient pu aboutir à des méthodes statistiques classiques.
- De plus, nous avons pu établir que de nombreuses solutions différentes dépendaient de conceptions d'ensemble sans grand rapport entre elles : partages égaux corrigés par essais successifs, modélisation et rectification, représentations figurées, résolutions algébriques. Ce fait rendait inutile le regroupement dans un même « organigramme de résolution » car nous le savons aujourd'hui, les élèves passent rarement par un raisonnement atomique d'une solution à une autre.
- Mais la nature même des objets qu'elle nous avait conduit à construire paraissait une source de difficultés en particulier par le nombre des objets et des variables qu'elle proposait de considérer en même temps.
- Et pour ces vues partielles nos codages fournissaient des nombres de catégories de solutions possibles énormes. Comme nous avions l'intention de confronter ce codage avec la contingence de notre corpus pour en tirer des interprétations, il nous fallait limiter ce que nous espérions être un « modèle » pour l'adapter à la taille de notre cohorte. La quantité d'information contenue

dans la contingence ne justifiait pas un modèle aussi complexe. Dit autrement les éléments du codage perdaient toute signification concrète observable.

Il nous est alors apparu qu'il serait préférable de rechercher des questions mieux adaptées à un plan d'expérimentation.

1.4 - Résultats collatéraux

En suivant la procédure de l'analyse atomique, j'ai identifié, par étude clinique :

a) Les influences suivantes sur les modes de résolution

- La formulation de la demande : dans plusieurs cas individuels, la modification de la formulation de la demande a provoqué le rejet de la stratégie de partages égaux et permis la tentative de proposer des parts inégales en rectifiant les parts égales. (Novotná, 1995).
- La longueur du texte de l'énoncé (les textes longs ont diminué le nombre des élèves qui ont saisi toutes les relations pertinentes).
- La forme de l'énoncé du point de vue de la forme statique (la situation décrite dans l'énoncé ne changeait pas dans le temps) et dynamique (la situation décrite dans l'énoncé changeait dans le temps) : une épreuve proposée à 29 étudiants de 16 ans (commencement du lycée technique) composée de deux problèmes de même structure mathématique mais différents par la forme – statique *vs* dynamique – (les noms et le contexte ont été changés) devait éprouver 3 types d'influence (Novotná & Kratochvílová, 1998) :
  - le type de l'énoncé choisi comme le premier à résoudre (aucune différence significative n'a été trouvée) ;
  - les stratégies utilisées (la plupart des solutions étaient les solutions algébriques, mais les formes des équations étaient différentes), dans le cas dynamique les équations construites copiaient dans la plupart des cas la formulation, ce qui ne se manifestait pas dans le cas statique) ;
  - la reconnaissance explicite de la similitude des deux problèmes (dans la plupart des cas les étudiants ont traité les problèmes comme deux problèmes indépendants).

b) *Les stades de transition de l'arithmétique à l'algèbre*

J'ai identifié dans les traces écrites les stades suivants (Novotná, 1997b) :

- L'utilisation d'une lettre pour désigner plusieurs valeurs (la lettre est le symbole d'une inconnue générale pour l'élève, il ne distingue pas entre les valeurs inconnues) ;
- L'utilisation d'une ou plusieurs lettres dans la phase de traitement de l'énoncé sans les utilisant pendant le processus suivant (Je l'expliquais comme un essai à satisfaire les conventions scolaires) ;
- L'utilisation consciente pour désigner les valeurs inconnues et pour décrire les relations entre les données, mais la résolution purement arithmétique ;
- L'utilisation des lettres dans la résolution algébrique.

c) *L'utilisation des langages de référence* (Novotná & Kubínová, 1999)

Les élèves disposent de divers langages de référence avec lesquels ils peuvent produire différents modèles écrits. Plusieurs hypothèses peuvent être avancée pour expliquer la sélection d´un langage de référence :

- L'élève ne connaît pas tous les langages de référence utilisables et toutes leurs possibilités ;
- Il connaît différents types de langages de référence, mais n´est pas capable de les exploiter également – du fait, par exemple, que certains sont moins habituels que d'autres ;
- Eu égard à ses expériences précédentes, il semble opérer des choix préférentiels à l'égard de ceux dont il a l'habitude ;
- Il ne repère pas la pertinence d'un certain type de langage de référence à l'égard du problème qu'il doit résoudre.

Prenons comme exemple le problème suivant :

> Petr, David et Jirka jouent billes. Ils ont 198 billes en commun. Petr a 6 fois plus de billes que David et Jirka 2 fois plus de billes que David. Combien billes possède chaque garçon ?

- Modèle écrit lexical :

En commun ... 198

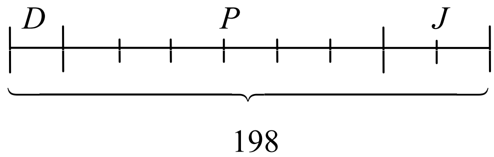
David ... x

Petr ... 6 fois plus que

Jirka ... 2 fois plus que

Chacun ... ?

- Modèle écrit graphique :



La construction d´un modèle écrit du problème représente l´action effective de l’élève ; tout se passe comme si un « dialogue » entre l´élève et l´énoncé s’établissait selon le schéma est suivant :

Création du modèle mental de l´énoncé

↓

Sélection du langage de référence

↓

Traduction de l´énoncé
dans le langage de référence

Langages verbaux et géométriques

Même si le système standard de résolution des problèmes verbaux est l’algèbre, j’étais persuadée que l’utilisation des langages symboliques non-algébriques pouvait contribuer à diminuer leurs difficultés notamment pour ceux qui avaient une faible compréhension de l’algèbre.

Pour éprouver cette hypothèse, nous avons présenté deux langages différents pour traiter des problèmes verbaux de partages inégaux et nous avons comparé leur résolution du point de vue du traitement des informations.

Deux types de traitement ont été distingués :

- *Le traitement série* correspond au cas où un processus activé doit se terminer avant que le prochain ne commence ;

- *Le traitement parallèle* correspond au cas où plusieurs processus (voire tous) se déroulent simultanément. (Cf. Eysenck, 1993).

Ces deux types de processus sont utiles pour décrire les processus de résolution de problèmes verbaux[1] ; le passage d'un traitement de type série à un traitement de type parallèle représente un changement qualitatif dans la résolution.

Pour illustrer ce qui précède, nous présentons ci-après les résultats obtenus avec des problèmes verbaux de partages inégaux de trois types différents :

- *multiplicatifs* : les relations entre les parts sont seulement multiplicatives,
- *additifs* : les relations entre les parts sont seulement additives,
- *mixtes* : les relations entre les parts sont des deux types.

> Problème A : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Petr a 6 fois plus de billes que David et Jirka a 2 fois plus que David. Combien de billes a chacun d'eux ?
>
> Problème B : Trois filles de M. Novák, Pavla, Dana et Marie, ont 181 Kč (couronnes tchèques) au total. Marie a de 37 Kč plus que Pavla et Dana a de 14 Kč plus que Marie. Combien Kč a chaque fille ?
>
> Problème C : 380 élèves ont inscrit dans trois cercles sportifs. Tous les trois cercles se rencontrent en même temps. Trois fois plus d'élèves sont dans le cercle de basket que dans le cercle de gymnastique, dans le cercle de natation il y a deux fois plus d'élèves que dans le cercle de basket. Combien élèves y a-t-il dans chaque cercle ?
>
> Problème D : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Petr a 6 fois plus de billes que David et 3 fois plus que Jirka. Combien de billes a chacun d'eux ?
>
> Problème E : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Jirka a 2 fois plus de billes que David et Petr 3 fois plus que Jirka. Combien de billes a chacun d'eux ?
>
> Problème F : Beda a 4 fois plus de timbres que Jirka et 7 fois plus que Standa. Si Beda a 504 timbres, combien timbres ont les garçons en tout ?

---

[1] Ces deux modalités de traitement d'informations sont présentes dans l'histoire humaine des mathématiques avant l'époque grecque (cf. Hejný et al., 1990). A cette époque, les mathématiques apparaissaient sous formes de manipulations : les comptes étaient exécutés par déplacement de petites pierres. Le comptage prenait la forme d'actions séquentielles. Ultérieurement, Pythagore remplacera cette succession d'actions par une figure décrivant l'ensemble des relations identifiées. La figure donne alors une information complète (mais souvent dans une forme assez compliquée). Contrairement à l'approche en série précédente celle-ci peut être qualifiée de parallèle.

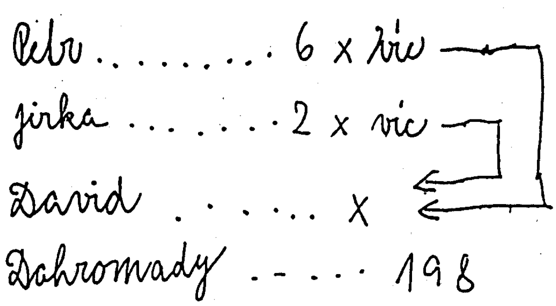
<u>Problème G</u> : Marie avait eu de 10 Kč plus que Pavla. Toutes les deux filles ont reçu l'argent de plus. Pavla a doublé sa quantité, Marie a reçu 20 Kč. Maintenant Marie et Pavla ont la même quantité de Kč. Combien Kč avait chaque fille eu au commencement ?

- *Langages de références verbaux*

Un langage de référence verbal est composé des éléments suivants (exemple pour le problème A)

		Exemples
T :	quantité totale d'objets	*198 billes en tout*
P_i, $i=1,\dots,n$:	la quantité d'objets du participant i	*David … x*

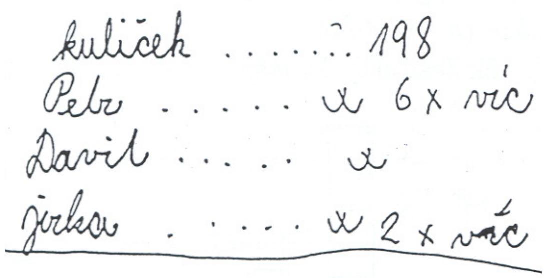
flèches pour les relations entre les parts T, P_1, …, P_n



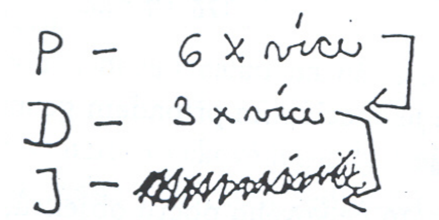
Le processus de construction d'un modèle de l'énoncé par utilisation du langage verbal est de type « traitement série ». En effet, habituellement, l'élève lit l'énoncé (une ou plusieurs fois) puis enregistre les informations l'une après l'autre. Les obstacles liés aux modèles verbaux ont été décrits dans Novotná (1995, 1997a, 2000a, 2000b). Notons que les obstacles les plus fréquemment rencontrés sont :

- l'utilisation incorrecte des lettres (Problème A),
- la compréhension incorrecte des relations (Problème C),
- le changement de la structure (Problème D),
- la forme trop compliquée du modèle dans le cas où le nombre des parts est élevé.

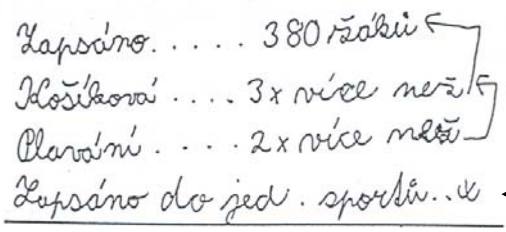
Problème A


kuliček 198
Petr ..... x 6 x víc
David x
Jirka ..... x 2 x víc

Problème D


P – 6 x více
D – 3 x více
J –

Problème C


Zapsáno..... 380 žáků
Košíková ... 3 x více než
Plavání ... 2 x více než
Zapsáno do jed. sportů.. x

← *Inscrits dans les sports indiv. … x*

- ***Langages de références graphiques***

Le langage de référence est composé de segments ou d'autres figures géométriques.

		Représente
L :	segment	quantité totale d'objets
L_i, $i=1,\ldots,n$:	segments	quantité d'objets du participant i

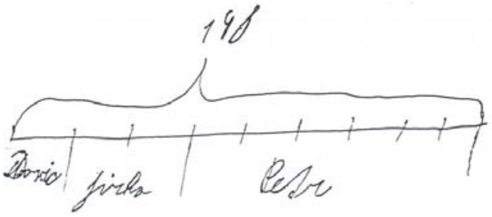
Lettres ou mots spécifiant les segments

Les relations entre les parts sont représentées par des longueurs différentes des segments ; les relations entre les parts et le tout par la correspondance entre la somme des longueurs L_i et la longueur de L. Les règles de construction de ce modèle sont :

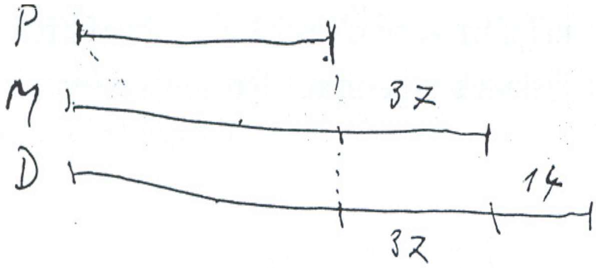
- $L_i > L_j$ dans le cas où $P_i > P_j$ (P_i … la quantité d'objets du participant i),
- $|L_i|/|L_j| = P_i/P_j$ (cas multiplicatif), $|\,|L_i| - |L_j|\,| = |P_i - P_j|$ (cas additif),
- $|L| = |L_1| + |L_2| + \ldots + |L_n|$.

Exemples

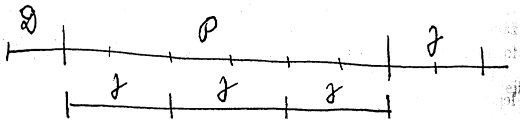
Exemple 1, Problème A



Exemple 2, Problème B



Exemple 3, Problème D



Remarques

1) La forme du modèle graphique peut varier du cas le plus simple (d'un segment représentant la totalité, divisé dans les segments représentant les parts – Cf. Exemple 1, Problème A), au cas de plusieurs segments placés côte à côte (Exemple 2, Problème B). L'information disponible dans le deuxième cas est souvent plus détaillée, le premier cas représente les relations entre le tout et les parties de façon plus nette.

2) Plusieurs autres symboles peuvent être aussi utilisés dans les modèles géométriques (par exemple le symbole pour représenter le tout dans le modèle du Problème A, Exemple 1).

3) Dans les situations réelles, les longueurs des segments ne sont pas désignées précisément, elles permettent de décrire habituellement l'idée de la structure.

La traduction de l'énoncé en langage graphique exige des traitements parallèles même si la première phase est habituellement de type série (le nombre de segments à utiliser…). Néanmoins, une description complète de la structure est fondamentale pour représenter les relations entre les longueurs des segments. On note ici une grande différence avec la traduction de l'énoncé par une légende verbale dans laquelle la prise en compte de la structure n'est pas nécessaire pour construire un modèle écrit.

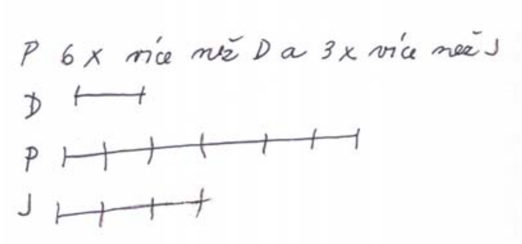
Nos expériences ont montré que l'utilisation d'un langage graphique, peut conduire les élèves à ramener un problème dont la structure est complexe à un problème ayant une structure plus simple (voir Exemple 3, le changement du Problème D au Problème A).

Les obstacles liés aux modèles graphiques sont exposés dans Novotná (1995, 1997a, 2000a, 2000b). Les plus représentatifs sont :

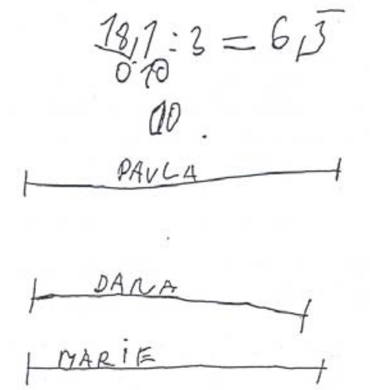
- une représentation incorrecte des relations entre les longueurs des segments L_i, L_j (Exemple 4, Problème D),
- une traduction incorrecte des relations additives / multiplicatives (Exemple 6, Problème A),
- l'utilisation d'un langage graphique non adapté aux problèmes à résoudre (Exemple 7, Problème F),
- l'utilisation formelle du langage graphique sans en comprendre la structure.

Exemples

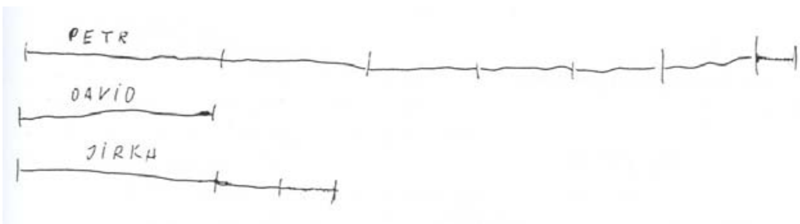
Exemple 4



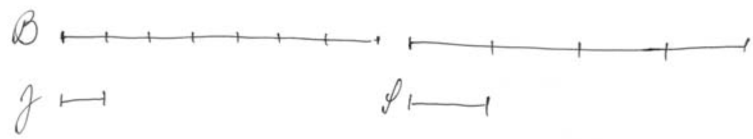
Exemple 5



Exemple 6 (transfert incorrect des relations additives)

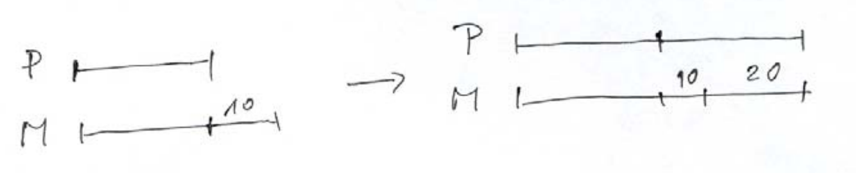


Exemple 7



Remarques :

1) L'utilisation des langages graphiques guide vers la stratégie de résolution : « commencer avec le nombre des parts » ou « estimer les nombres demandés par l'énoncé et les corriger pour satisfaire les conditions posés par l'énoncé ».
2) Il existe des problèmes pour lesquels le modèle élaboré par l'utilisation d'un langage graphique donne directement le résultat sans que l'élève soit contraint de passer par un calcul (Exemple 8, Problème G).



Conclusion

Dans nos expériences sur les problèmes de partages inégaux, nous avons observé que le langage graphique a été rarement utilisé par les élèves s'il n'était pas préalablement présenté par le professeur[2].

L'analyse des solutions produites par les élèves a permis de valider notre hypothèse initiale : l'utilisation d'un langage graphique influence significativement le choix de la stratégie de résolution consistant à « calculer la part la plus petite ».

J'ai attribué les différences d'utilisation de ces deux langages de référence au fait que les langages verbaux mettent principalement l'accent sur les relations bilatérales tandis que la compréhension de la structure globale est beaucoup plus favorisée par l'utilisation des langages graphiques.

Ces faits d'observation clinique auraient pu être soumis à des épreuves statistiques, mais l'ampleur de la tâche nous a paru excessive par rapport à l'intérêt et à l'usage pratique des conclusions.

[2] Dans les manuels tchèques contemporains, les langages graphiques ne sont pas utilisés. C'est donc seulement sur l'initiative des enseignants qu'ils sont enseignés aux élèves.

Partie IV. De l’analyse atomique à l’analyse des stratégies de résolution des problèmes verbaux

Ces recherches et les précédentes avec le CIRADE avaient permis de conjecturer que des formulations différentes pouvaient engendrer des modifications significatives des stratégies de résolution chez les élèves. Ce phénomène est bien connu des professeurs. Mais il s’agissait alors, pour moi, de mieux comprendre les raisons de ces différences et d’élaborer des instruments d’étude que l’analyse atomique ne m’avait pas fourni pour repérer (et éventuellement savoir comment réguler) les obstacles engendrés par la structure formelle des habillages. L’hypothèse directrice que j’avais alors adoptée était la suivante : le repérage par l’élève de cette structure (correcte ou non) pourrait s’expliquer par leurs expériences précédentes relativement à des problèmes d’un même champ conceptuel (par exemple : problèmes de partages inégaux à 2, 3… parts, etc.).

1.1 - Utilisation des expériences précédentes des élèves

Il est assez généralement accepté que les performances des élèves dans la résolution de problèmes s’accroissent lors de la répétition des rencontres avec des problèmes-types, dans la mesure où les élèves peuvent utiliser leurs expériences précédentes (EP) (Eysenck, 1993). J’ai désigné par « *effet positif du transfert* » le cas où la « qualité » de la résolution s’accroît avec l’utilisation de EP. J’ai étudié (Novotná, 1997c), un exemple de cet effet à propos de la résolution de problèmes verbaux de partages inégaux par l’utilisation de modèles graphiques de la structure en jeu.

Les problèmes suivants ont été utilisés pour nos observations :

> <u>Problème H</u> : Deux filles de M. Novák, Pavla et Marie, ont 181 Kč au total. Marie a de 37 Kč plus que Pavla. Combien Kč a chaque fille ?
>
> <u>Problème I</u> : Trois filles de M. Novák, Pavla, Dana et Marie, ont 181 Kč (couronnes tchèques) au total. Marie a de 37 Kč plus que Pavla et Dana a de 14 Kč plus que Marie. Combien Kč a chaque fille ? (Problème B du texte précédent.)

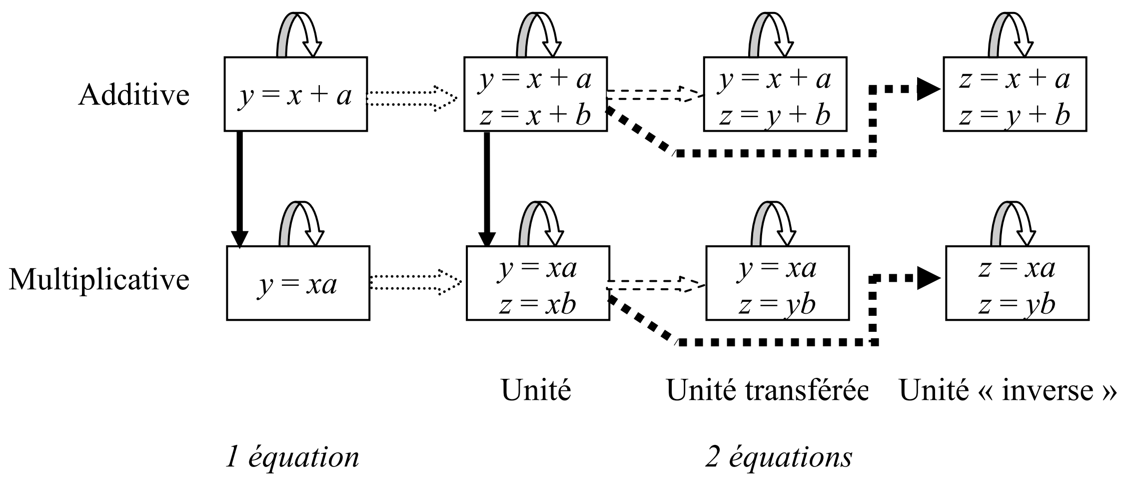
<u>Problème J</u> : Pendant une excursion de trois jours avec les bicyclettes, Jirka a fait 181 km au total. Le premier jour il a fait de 37 kilomètres plus que le deuxième jour, le troisième jour de 14 kilomètres plus que le deuxième jour. Combien de kilomètres a-t-il fait chaque jour ?

<u>Problème K</u> : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Petr a 6 fois plus de billes que David et Jirka a 2 fois plus que David. Combien de billes a chacun d'eux ? (Problème A du texte précédent.)

<u>Problème L</u> : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Petr a 3 fois plus de billes que Jirka et Jirka a 2 fois plus que David. Combien de billes a chacun d'eux ?

<u>Problème M</u> : Peter, David et Jirka jouent aux billes. Ils ont 198 billes en tout. Petr a 6 fois plus de billes que David et 3 fois plus que Jirka. Combien de billes a chacun d'eux ?

Ces problèmes ont été choisis pour examiner l'utilisation des EP pendant des transitions mono-paramétriques. Dans chacun des problèmes, le total est donné, il est demandé aux élèves de trouver les parts. Dans les schémas ci-dessous, ces problèmes sont représentés par leurs modèles mathématiques (systèmes d'équations décrivant la structure du problème posé ; le total n'est pas indiqué).



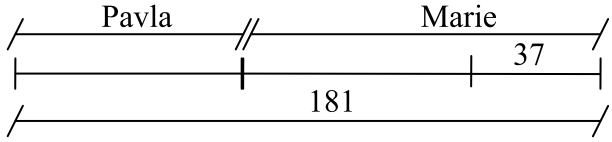
Les transitions mono paramétriques sont indiquées par un codage chromatique des flèches.

Nous nous sommes assurée auprès de l'enseignant que les élèves n'avaient eu aucune expérience précédente avec l'utilisation de la visualisation par des segments.

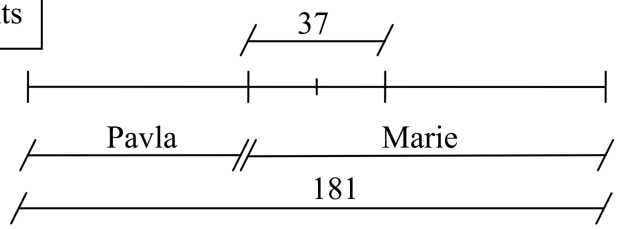
Chaque expérience débutait par une visualisation collective (deux élèves avec l'expérimentateur) du problème A par les segments.

Deux réalisations possibles ont été utilisées :

Par la portion unitaire



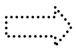
Par le nombre des participants



Remarque : Le modèle géométrique « par la portion unitaire » supporte le transfert de EP pour les problèmes avec plus de parts.

Après une résolution avec de succès du problème A, un autre problème (H à M) a été présenté.

 Ayant résolu un problème avec succès, l'élève sait utiliser ses EP avec la même structure mais dans un autre contexte. L'élève réitère seulement la procédure qu'il a utilisée précédemment.

 Ayant résolu un problème avec succès, l'élève sait utiliser ses EP dans le cas du changement des nombres des parts mais seulement avec le même type des relations.

 Ayant résolu un problème avec succès, l'élève sait utiliser ses EP dans le cas du changement des types de relations (des additives aux multiplicatives), mais avec la même structure des rapports entre les parts.

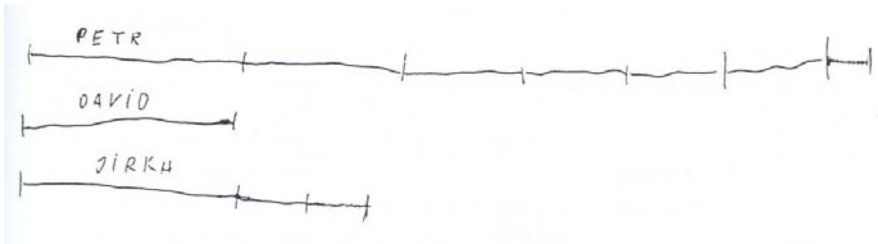
Ayant résolu un problème avec succès, l'élève sait utiliser ses EP dans le cas du changement de la variante du problème. Le niveau de difficulté des deux transitions n'est pas équivalent. Pour les élèves utilisant les stratégies de résolution arithmétique, la transition vers l'unité « inverse » est plus demandant que la transition vers l'unité transférée.

Remarque : on remarque que l'utilisation des segments pour visualiser la structure du problème facilite ces types de transition.

Les exemples suivants permettent d'illustrer des utilisations erronées de EP.

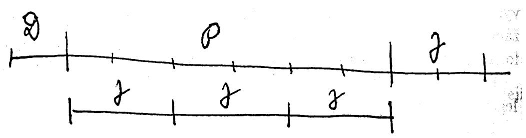
Du Problème J au Problème K (type du transition ⟶)

incorrect



Du Problème K au Problème M (type du transition ▪▪▪▶)

correct



Conclusion

Nos résultats permettent de montrer que l'élève peut :

- soit ignorer ses EP et aborder alors le problème sans aucun lien avec le problème précédent. La connaissance ainsi acquise est alors isolée dans la structure de connaissance de l'élève.
- soit utiliser ses EP ; l'élève considère alors le nouveau problème comme une simple transformation du problème précédent. La connaissance ainsi acquise pouvait alors être considérée comme une « connaissance stratégique » qui lui permettait d'élaborer une stratégie gagnante pour un problème nouveau de la même famille.

C'est dans ce contexte de recherche qu'a débuté ma collaboration avec Pearla Nesher et Sara Herhskovitz en 1997.

1.2 - L'analyse des influences sur les stratégies de résolution des problèmes verbaux

Les travaux de Nesher et Herhskovitz

Avant le commencement de notre coopération, Pearla Nesher et Sara Herhskovitz avaient publié des études présentant les variables introduites par W. Kintsch, P. Nesher et d'autres (les détails lexicaux, les relations sujet – prédicat, les relations référence – comparé, etc.) et montrant leur influence sur le niveau de difficulté des différentes variantes de certains problèmes.[3]

Malgré le nombre grandissant de travaux publiés et de variables étudiées, les processus qui déterminent le passage de la lecture d'un énoncé à la construction du modèle mathématique qui le résout restent dans une « boîte noire ». Les facteurs qui influencent ces processus, bien que plus faciles à étudier expérimentalement sont assez mal répertoriés. Enfin la façon dont les variables cognitives expliquent l'adaptation du résolveur aux conditions de l'énoncé reste énigmatique.

Facteurs qui influencent le choix de la donnée initiale et des fonctions dans un problème verbal (Nesher, Hershkovitz & Novotná, 2003)

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressées aux facteurs qui pouvaient déterminer le choix de la variable indépendante dans les résolutions algébriques des variantes d'un même problème de partages inégaux (le total donné, les relations multiplicatives entre les parts). Notre approche était basée sur l'utilisation des variables introduites par W. Kintsch, P. Nesher et sur le corpus résultant de l'analyse atomique. Nous avons tenté d'étudier l'influence de ces variables sur le niveau de difficulté des variantes d'un même problème. Mais je dois avouer que compte tenu de la quantité de variables en jeu qu'il fut alors très difficile (sinon impossible) de déterminer les variables cognitives qui pourraient expliquer les processus susceptibles d'éclairer la « boîte noire» dans laquelle se produirait le passage entre la lecture de l'énoncé et le modèle mathématique élaboré par l'élève.

---

[3] Pour les informations plus détaillées voir par exemple (Hershkovitz, Nesher & Novotná, 2002).

La structure du problème

Notre but essentiel était d'identifier des éléments constitutifs d'un problème qui conditionnent sa résolution. Dans la première phase de notre travail commun, notre recherche a eu comme but de comprendre quelles variables (cognitives) affectaient le choix, dans l'énoncé, de la donnée initiale en fonction de laquelle les autres inconnues sont exprimées (la stratégie), dans le processus de comparaison. Ce choix influe sur la complexité de la forme sous laquelle l'équation se présente.

La question est : « Lesquelles de ces variables affectent le choix de la donnée initiale dans le processus de résolution des problèmes de comparaison ? »

Nous avons retenu un problème de partages en trois parts inégales entre lesquelles les relations de comparaison s'expriment sous forme multiplicative. Sur cette base on peut construire 24 variantes du problème en considérant[4]:

- le changement de l'ordre des relations (3),
- leurs manifestations dans la langue naturelle (moins, plus) (2),
- la nature et de l'ordre des relations entre les parts, choisies pour décrire la situation, (4).

Pour chaque variante, nous avons déterminé les valeurs de leur structure interne (relations présentées, schéma de relations) et de leur structure externe (ordre de présentation des relations, type de la relation sujet – prédicat, mots manifestant les relations).

La complexité des stratégies mises en œuvre peut être décrite à l'aide d'un indice fondé sur l'expression des comparaisons à une donnée de référence, figurant dans la solution. En effet, chaque relation exprime une part en fonction d'une autre ; suivant celle qui est retenue comme référence, l'expression de la relation prend une forme plus ou moins facile à concevoir. Au cours de la résolution l'élève peut être conduit à utiliser cette fonction initiale telle qu'elle est dénotée dans l'énoncé (d), ou à utiliser la fonction inverse de cette fonction (i), ou à la composer avec une (c) ou plusieurs autres fonctions. L'indice de complexité d'une résolution, spécifique de ce genre de problèmes, est alors défini :

---

[4] Pour les informations plus détaillées voir (Hershkovitz, Nesher & Novotná, 2002).

- en attribuant à chacune des relations utilisées, une *contribution* à la complexité qui dépend de la transformation que l'élève a dû faire subir à l'expression de la relation initiale pour l'utiliser, contribution (d) = 1 ; contribution (i) = contribution (c) = 2
- en faisant la somme des contributions attachées par ce moyen à chacune des étapes de la résolution

Notre *hypothèse* était que les résolveurs (professeurs ou élèves) choisiraient pour chaque variante la stratégie (la donnée initiale en particulier) qui offre le niveau de complexité minimal et que les écarts à ce principe peuvent être expliqués par l'ordre des informations dans l'énoncé et par les expressions lexicales (plus et moins).

Nous avons organisé une pré-expérimentation avec un échantillon de 104 enseignants résolvant chacun 4 problèmes. Cet échantillon était réparti en groupes de façon à équilibrer les réponses sur 12 des 24 variantes.

L'expérience elle-même portait sur un échantillon composé de deux groupes : un groupe de 167 enseignants (niveau primaire) et un groupe de 132 élèves de 15 ans qui étaient en train d'apprendre la résolution des équations avec une inconnue. Chaque groupe était réparti dans 6 sous-groupes dont les membres résolvaient chacun 4 problèmes. Les 24 variantes étaient elles-mêmes réparties en six épreuves de 4 problèmes attribuées de façon aléatoire aux groupes de résolveurs. *Chaque variante a ainsi été résolue à peu près par 30 enseignants et 20 élèves*.

Résultats

a) Les solutions non-algébriques. Les professeurs (résolveurs « experts ») qui n'utilisent pas la résolution algébrique recourent à une solution arithmétique. Il semble que les élèves (résolveurs « non-experts ») n'ont pas cette ressource : très peu tentent une solution arithmétique et ceux-là échouent. (Nesher, Hershkovitz & Novotná, 2003).

Mais notre intérêt s'est d'abord porté sur les solutions algébriques. Ces solutions consistent à produire un modèle mathématique sous forme d'une équation à une inconnue.

b) L'analyse des solutions algébriques

Les expériences ont montré que chaque variante a provoqué des préférences stratégiques différentes. On ne peut donc considérer la résolution comme une traduction (du matériau linguistique au modèle mathématique) mais bien comme une élaboration conceptuelle. Mais la question de savoir sur quelle base s'établissait cette élaboration demeurait.

La stratégie la plus fréquente était le choix de la part la plus petite. Cela peut être expliqué par le fait que ce choix demande les calculs avec les nombres naturels seulement.

Les paramètres identifiés comme influençant principalement le choix de la stratégie ont été :

- le niveau de complexité minimal
- et la préférence des expressions avec « plus »

ensuite intervenaient les variables : « ordre des informations » et « possibilité de transformer facilement « moins » en « plus » »,

La comparaison entre les solutions algébriques des enseignants et celles des étudiants a montré que ces deux populations réagissent de façon similaire dans les mêmes circonstances mathématiques.

Ce résultat paraît intéressant en tant qu'il peut orienter l'étude vers des groupes de variables agissant de concert, sur des problèmes similaires du point de vue de la fonction d'une même notion mathématique – c'est à dire sur des variables de la « situation » dans laquelle le sujet agit -, et à peu près indépendants des caractères des sujets). Les caractéristiques de la situation permettent de rendre compte des conduites des sujets indépendamment de leur niveau cognitif. Ainsi la caractérisation de la « pensée du sujet » semblerait donc beaucoup moins déterminante pour comprendre les phénomènes d'incorporation des connaissances mathématiques que celle des situations dans lesquelles ces sujets sont placés.

Conclusions sur l'étude des facteurs qui déterminent les stratégies de résolution

Déjà les nombreux et intéressants résultats signalés ci-dessus ont été obtenus grâce à la confrontation d'hypothèses et de concepts théoriques adéquats avec des corpus résultant de l'activité effective de « résolveurs » humains. De nombreux faits relevés pourraient faire l'objet de vérifications statistiques.

J'envisage :

- de continuer ces recherches en analysant les solutions arithmétiques de notre problème ;
- de chercher à savoir si le choix de la donnée initiale dans le problème est influencé par les mêmes facteurs que dans le cas algébrique ;
- d'approfondir ou d'éclairer l'analyse des corpus recueillis par divers traitements statistiques.

Les premiers résultats indiquent que la variable la plus importante pourrait être la *consistance* de la stratégie choisie pour tous les problèmes résolus. (Novotná, Hershkovitz & Nesher, 2003). Cette étude de cas va continuer.

Les objections à une recherche en didactique, limitée aux facteurs cognitifs

Mais les interventions auprès des professeurs qui pourraient résulter de ces études n'apparaissent pas aussi satisfaisantes.

En effet :

a) Les professeurs conçoivent ou utilisent et conduisent des situations (leçons, problèmes exercices, scénarios etc.) qui déterminent des processus : des suites d'interactions, d'effets et de relances. Ils contrôlent, corrigent et régulent le déroulement de ces processus. C'est donc par leur rôle dans ces situations spécifiques du savoir en cours d'enseignement que les variables psychosociologiques peuvent apparaître comme des variables didactiques (celles dont le professeur peut fixer les valeurs et en contrôler l'évolution).

b) L'aide que peuvent leur apporter les chercheurs doit se traduire en terme de décisions mais surtout de *conditions de possibilités ou d'optimalité dans la conduite de ces processus*. Aucune recherche ne peut déterminer des conditions fixes qui permettraient au professeur d'ignorer le déroulement des événements particuliers qui se déroulent et s'enchaînent dans sa classe. Aucun précepte pédagogique ne permet d'ignorer le contenu cognitif de l'enseignement. Le fait de rapporter des résultats à des conditions et à des variables, isolées, fixes, ou impossibles à réguler, ou en tout cas qui ignorent leur action dans ces processus ne peut qu'inciter les professeurs à des conduites inadaptées.

c) Multiplier les avertissements au professeur, qui, pour chaque nouveau problème de mathématiques, tendraient à lui signaler la nécessité de connaître une multitude de possibilités d'erreurs et d'interprétations afin de les prévenir ou de les corriger, et laisser entendre que ledit professeur devrait répondre à chacune par des décisions spécifiques (de l'erreur) et électives (différentes et adaptées à chaque élève) ne peut que dresser un obstacle insurmontable au plus petit acte d'enseignement. Il apparaît que le chercheur doit assumer la responsabilité de l'effet de ses injonctions, de ses conseils et même de ses informations en direction de l'enseignement, dans la mesure où ses travaux ne lui permettent pas d'en prévoir les effets.

Ce sont là quelques unes des raisons pour laquelle je me suis intéressée à des travaux de didactique dérivant de la théorie des situations didactiques en mathématiques (Brousseau, 1998a).

1.3 - Un modèle d'interaction entre l'élève résolvant un problème et le professeur

Dans un travail datant de 1999, une tentative pour décrire les processus mentaux des élèves avait abouti à la conception d'une table d'analyse chronologique des écrits des élèves (des arrêts, des reprises, des réussites ou des échecs), puis à celle d'un organigramme « universel » de résolution (lecture de l'énoncé, tentatives de modélisation, confrontation avec les conditions de l'énoncé etc.). (Novotná, 2000b).[5]

Il est apparu alors que ce qui visait à décrire un processus mental de l'élève en fait inaccessible pourrait être une description très plausible des possibilités d'intervention pour les professeurs, adaptées à leur « épistémologie de travail » avec les élèves. L'étude de cette hypothèse (envisagée précédemment[6]) et de ses conséquences pourrait fournir un instrument d'étude théorique sur les possibilités de faire bénéficier les réponses des professeurs des apports des recherches en sciences cognitives.

Il s'agit donc d'accompagner la poursuite des travaux entrepris avec P. Nesher des recherches nécessaires à leur usage dans la pratique des professeurs.

---

[5] Cf. Egalement le texte (non publié) de l'annexe 6 dans lequel nous présentons de façon détaillée ces résultats.

[6] Nadine Milhaud (1980). *Le comportement des maîtres face aux erreurs des éleves*. Université Bordeaux 1.

Partie V. De l'analyse des comportements à celles des situations

J'ai commencé à collaborer avec l'équipe bordelaise de didactique des mathématiques en 1999. Nos échanges se sont intensifiés à partir de 2001 sur les rapports entre résolution de problèmes et enseignement des mathématiques (G. Brousseau). Comme nous l'avons entrevu dans la partie précédente, ces discussions ont ouvert de nouvelles perspectives pour aborder un certain nombre de questions que les modèles précédents ne me permettraient pas de traiter. Cette collaboration est récente ; je ne peux donc pas présenter ici des résultats de recherche établis dans le cadre de la théorie des situations didactiques et des instruments méthodologiques qui l'accompagnent[7] mais je me propose faire état de ce que ce cadre théorique me permettra d'étudier ou de reformuler.

Les perspectives ouvertes par cette collaboration peuvent se décliner selon deux axes.

Le premier axe consistera à préciser davantage que je ne l'ai fait jusqu'alors la nature des liens qui peuvent être établis entre les modèles d'action du sujet, les connaissances à lui enseigner et l'action didactique effective du professeur. Cette question m'apparaît aujourd'hui fondamentale ; en effet, décrire l'action du sujet résolvant un problème, inventorier les variables susceptibles d'expliquer ces décisions… est une chose ; étudier les conditions didactiques de la transformation de ces modèles d'action dans le sens d'une appropriation par l'élève des connaissances visées en est une autre. C'est une question fondamentale pour l'enseignement et ouverte pour la recherche en didactique. La théorie des situations didactiques offre un cadre approprié pour ce type d'étude. Je ne doute pas de l'intérêt de première question et de son utilité, mais il m'apparaît aujourd'hui que sa pertinence est subordonnée à la seconde, que ce soit pour l'enseignement des mathématiques ou dans la perspective d'une étude du fonctionnement des systèmes didactiques. Le premier axe consistera

[7] Notamment l'usage des analyses de données (ACP, AFC, A. hiérarchique et A. implicative)

donc à interpréter les questions qui me préoccupent depuis un certain nombre d'année dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Si je devais formuler la teneur de ce premier axe, je pourrais dire qu'il s'agira, non pas de modéliser la pensée de l'élève mais d'étudier les conditions d'émergence et de transformation de cette « pensée » de telle façon qu'elle s'accorde avec les conduites attendues par les professeurs. Je souhaite coopérer dans cette voie avec certains membres de l'équipe Bordelaise qui ont déjà travaillé sur des questions relativement proches (A. Rouchier, D. Broin-Ferguson dont une intéressante thèse récente porte sur l'analyse des « problèmes d'arithmétique et d'algèbre scolaire »).

Le deuxième axe sera davantage centré sur l'analyse des situations. Le choix d'un problème par un professeur est déterminé par des exigences didactiques pour lesquelles il est mandaté par l'institution.

- A quelles conditions ce problème peut-il engendrer des effets didactiques ?
- Quelles connaissances fait-il travailler de la part des élèves ?
- Quelles pourront être la nature des régulations des erreurs des élèves ?

Quels types de contraintes ces choix didactiques imposeront au professeur ?... ...
En d'autres termes, il s'agira d'étudier les relations entre ce que font effectivement les élèves, les conditions dans lesquelles ils le font, les attentes du professeur et les systèmes de régulations de ces conduites.

Sur cette question, j'ai commencé à collaborer avec B. Sarrazy sur la question des effets de la variabilité des énoncés de problèmes sur les phénomènes de contrat didactique et sur la flexibilité de l'usage par les élèves des algorithmes enseignés. (Sarrazy, 2002). En effet, nous avons observé que au delà des différences inter-individuelles, les élèves de certaines classes s'avèrent plus sensibles que d'autres aux effets de contrat engendrés par la formulation des problèmes verbaux (effets des variables évoquant les contextes, l'ordre des données, les relations logico-mathématiques…). Son étude rejoint un certain nombre de résultats que j'ai moi-même établis à propos des problèmes de partages inégaux : les professeurs se différencient fortement dans leur capacité à opérer des variations pertinentes dans la conception des énoncés de problèmes qu'ils soumettent à leurs élèves. Ces différences de variabilité lui permettent d'expliquer ces différences de sensibilité des élèves à l'égard des implicitations mobilisées au sein du contrat didactique:

> « Plus la variabilité d'un professeur est élevée, plus l'élève est conduit à s'interroger sur le domaine de validité de ses connaissances par le jeu décontextualisation / recontextualisation introduit par ces variations, et plus faibles sont ses chances d'être sensible au contrat didactique en n'établissant pas un rapport quasi univoque entre une règle, un algorithme, et ses conditions d'application. Réciproquement, plus la variabilité d'un professeur est faible, plus la probabilité que l'élève résolve le problème par une simple analogie ou en se fiant aux seuls aspects formels de l'énoncé sera élevée, et plus fortes seront les chances que l'élève soit sensible aux implicats du contrat. » (Sarrazy, *id.*).

Cette hypothèse me semble cohérente avec l'idée d'une fonctionnalité didactique du contrat, étudiée en didactique des mathématiques par Chevallard (1988) par exemple et permet d'envisager de façon nouvelle et plus large la question des effets didactiques de l'usage des problèmes verbaux dans l'enseignement des mathématiques scolaires.

Partie VI. Conclusion générale

Au final de cette synthèse, nous ne reviendrons pas sur les résultats présentés dans le corps du texte proprement dit, nous nous limiterons à discuter deux questions, selon nous, essentielles, relatives au rôle :

A. des mathématiques dans l'éducation ;

B. des problèmes de partages inégaux dans les mathématiques scolaires.

A – Les nouvelles technologies de l'information ont considérablement influencé de nombreux secteurs de la vie sociale, et ont engendré un changement brutal de son organisation. Cette influence s'est manifestée, entre autres, par un nombre imposant d'informations accessibles à tous – du moins à ceux qui savent les obtenir. On comprend, dès lors, l'impérieuse nécessité de permettre aux individus d'apprendre non seulement à s'orienter dans ce labyrinthe informationnel mais aussi, et surtout, de les utiliser correctement. Nous pensons que les didacticiens des mathématiques ont ici un rôle non négligeable à tenir et peuvent contribuer à l'étude et à la définition de dispositifs adéquats pour réaliser, à tout le moins faciliter, ces adaptations.

Les disciplines scolaires peuvent se répartir (*grosso modo*) en deux grands groupes : le premier regrouperait les disciplines qu'on pourrait qualifier d'événementielles ; le second regrouperait celles qui exigent l'usage de processus créatifs. Apparemment personne ne doute que les mathématiques appartiennent au second groupe. En effet, même si elles comportent une dimension algorithmique importante, elles sont loin de s'y réduire car l'algorithme ne saurait épuiser la question de son usage dans des situations nouvelles, autrement dit de sa signification – cette créativité restant toujours sous la responsabilité de l'élève ; comme l'a bien montré G. Brousseau (1998), le professeur peut légitimement l'espérer ou l'attendre mais ne saurait l'exiger. Tel est le point aveugle du contrat didactique qui divise, tout en les articulant, les zones de leurs responsabilités respectives dans le contrat et fonde épistémologiquement la dévolution.

La résolution des problèmes est au cœur même de l'enseignement des mathématiques : elle est tout à la fois l'instrument et le critère de leur apprentissage. Mais, nous l'avons en partie vu au cours de cette note de synthèse, cette proposition appelle un certain nombre de questions :

- Quelles propriétés doivent posséder les problèmes pour permettre aux élèves de développer leur créativité ? Ces propriétés sont-elles suffisantes ?
- Quel(s) critère(s) peut-on se donner pour décider si les connaissances enseignées ont été incorporées par les élèves ? L'intérêt de cette question est didactiquement central car apprendre des mathématiques ne saurait se réduire à la stricte reproduction, par les élèves, des algorithmes enseignés ; comme le résume Sarrazy (2002), dans les situations scolaires « les conduites 'spontanées' des élèves sont, consciemment ou non, jugées, valorisées, renforcées, ignorées, condamnées, par les professeurs à l'aune de critères [propres à leur épistémologie spontanée], par lesquels les élèves apprennent à vérifier la conformité de l'usage qu'ils font des règles qu'on leur a enseignées. On voit bien alors l'intérêt d'examiner la manière dont les professeurs définissent et manipulent ces critères pour appréhender ce que les élèves peuvent comprendre de ce qui est juste ou faux, licite ou non, légitime ou pas, bref de ce que peut représenter, pour eux, faire des mathématiques. 'Montre-moi la situation', pourrait-on dire, 'et je te dirai ce qu'ils pourront *éventuellement* apprendre.' » (Sarrazy, 2002, 73).
- Quelles doivent être les propriétés des situations pour déterminer les difficultés que l'élève peut surmonter « seul » (sans aide externe) et celles qui exigent une intervention explicite de l'enseignant ? En d'autres termes, sous quelles conditions, est-il possible d'envisager la négociation d'un « véritable » contrat didactique ?
- Quelles connaissances permettraient aux professeurs d'identifier et de traiter raisonnablement les difficultés de leurs élèves ?

Même si nos travaux peuvent contribuer à apporter localement quelques éléments de réponses pour certaines de ces questions, ou permettent d'entrevoir quelques pistes d'études, elles sont loin d'être résolues. Il me semble que la théorie des situations et l'approche anthropo-didactique telle qu'elle est développée au DAEST peuvent fournir quelques instruments utiles pour leur étude.

B. – Bon nombre de recherches présentées dans cette note de synthèse se sont centrées sur l'usage didactique des problèmes verbaux. Les raisons de ce choix ont été exposées au chapitre 2 de la première partie. Nous nous proposons maintenant de justifier le choix des problèmes de partages inégaux et d'en montrer l'intérêt d'un point de vue didactique.

Dans l'enseignement des mathématiques, et au-delà des différences structurelles de son organisation dans divers pays, les problèmes verbaux sont très souvent utilisés par les professeurs. Parmi eux, les problèmes de partages inégaux occupent une place non négligeable dans les manuels de mathématiques et dans leur enseignement. La mise à jour des raisons de cette importance, permettra de justifier l'intérêt particulier que nous leur avons accordé.

a) Mathématiques scolaires

Comme le souligne Broin (2002, 31) « le traitement arithmétique et le traitement algébrique des questions de mathématiques scolaires ne sont ni cognitivement, ni didactiquement équivalents. ». Dans le cas des problèmes de partages inégaux, cette différence est particulièrement marquée : puisque leur traitement arithmétique ou algébrique imposent des stratégies de résolution différentes (Bednarz & Janvier, 1994).

Dans l'enseignement des mathématiques, l'algèbre est souvent présentée aux élèves comme un moyen de résolution nouveau et plus efficace. Mais pour les élèves de l'école élémentaire ou pour ceux du début du collège, la résolution de ce type de problèmes n'est pas vraiment nouvelle – ils possèdent déjà des expériences de résolution arithmétique ; c'est une des raisons pour laquelle, ces types de problèmes sont intéressants eu égard aux continuités / discontinuités que leur usage introduit dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre.

b) Variabilité du raisonnement pour les problèmes de partages inégaux

Les problèmes de partages inégaux constituent aussi un milieu riche du point de vue de la variabilité possible de leurs structures : les données (connues et inconnues) et les relations réciproques. Par exemple les types de relations entre les parts (multiplicatives, additives ou mixtes), le nombre des parts, les éléments connus (le total, une / plusieurs parts, les relations entre parts) et inconnus (la somme de certaines parts / de toutes les parts, d'une / plusieurs parts) … . Ces variables permettent d'agir de façon significative sur l'évolution des stratégies de résolution des élèves. Leur modification, même modérée, permet d'obtenir des problèmes pour lesquels un raisonnement de type « arithmétique » ou de type « algébrique » est ergonomiquement optimal. On peut donc considérer que le répertoire des stratégies de résolution arithmétiques et algébriques s'avère ici relativement pertinent.

Les variables cognitives, didactiques, les variables attachées à la formulation[8] peuvent prendre des valeurs soit critiques, soit stables et favoriser ainsi les sauts informationnels au sens défini par G. Brousseau :

> « Une connaissance est le résultat d'une adaptation de l'élève à une situation S qui "justifie" cette connaissance en la rendant plus ou moins efficace, des connaissances différentes conduisant à des apprentissages et à des exécutions de tâches ayant des complexités différentes. Suivant les valeurs des variables pertinentes de S, on peut imaginer que l'on associe à chaque connaissance utile dans S, une surface d'efficacité (ou de coût). L'enveloppe supérieure de ces surfaces peut ménager des maxima, séparés par des cols (ou toute autre singularité). Donc pour faire créer par l'élève une certaine connaissance, l'enseignant "doit" choisir les valeurs qui rendent cette connaissance optimale par rapport aux connaissances concurrentes ; il faut alors progresser par sauts et non de façon régulière. » (G. Brousseau, 1998a, 141).

c) Variabilité du contexte sémantique

Nous l'avons vu, la formulation du problème (le choix du langage de référence…) et plus particulièrement le contexte évoqué par le problème n'est pas didactiquement neutre : il peut infléchir de façon significative la réussite ou l'échec de la résolution des élèves par la détermination des stratégies associées à ces formulations. Cet aspect a été particulièrement souligné par Janvier (1989) :

> Il ressort principalement de ces travaux de recherche [e.g. (Vergnaud, 1983b), (Freudenthal, 1983)] que la **contextualisation des calculs** détermine souvent les algorithmes utilisés. En d'autres mots, leurs résultats suggèrent l'existence d'une arithmétique contextuelle dont les objets sont des quantités

[8] Ces variables peuvent engendrer dans certains contextes des effets de contrat. Par exemple les élèves 'savent' que le professeur n'utilise pas habituellement de données inutiles, redondantes, que toutes les données nécessaires à résolution sont présentes dans l'énoncé, etc.

> ou des grandeurs issues du contexte plutôt que les nombres abstraits. (Janvier, 1989, p. 4).
>
> Il faut donc que l'enseignement se renouvelle de manière à retenir l'utilisation de situations permettant la solution en classe de problèmes significatifs. En d'autres termes, l'enseignement des mathématiques (jusqu'au niveau secondaire 3 ou 4 en tout cas) consisterait à familiariser les élèves avec un grand nombre de contextes généraux et englobants. … En fait, cette familiarisation du contexte et de sa mathématique sous-jacente devrait se faire d'une manière lente et progressive. (Janvier, 1989, 17).

La question des effets (en terme de facilitation par exemple) de la vraisemblance de l'histoire évoquée par l'habillage est fréquemment discutée dans les travaux de recherche (didactiques ou non). Les auteurs semblent assez partagés sur cette question.

Certains considèrent que l'acquisition de connaissances mathématiques peut être facilitée par l'évocation d'un contexte proche de l'expérience quotidienne des élèves. Cette idée pourrait être étayée par la Théorie de l'Apprentissage Social (Bandura, 1977) selon laquelle le développement des compétences est considéré comme une acquisition associée à un processus de structuration de l'expérience. C'est le cas par exemple de Toom (1999) qui distingue deux motifs d'utilisation didactique des problèmes verbaux dans l'enseignement : soit en vue d'*applications* d'algorithmes enseignés, soit en vue de susciter des *manipulations mentales*. Il observe que les *applications* – basées sur des situations proches de la vie quotidienne (« real-word problems ») – ont des effets significatifs sur la motivation apparente des élèves. En revanche, dans le cas de la « manipulation mentale », seules des situations fictives sont soumises aux élèves c'est-à-dire des situations en rupture avec celle de la vie quotidienne (« non-real-word problems »). Dans ce cas, seule la structure mathématique en jeu est motivante. Toom constate que la plupart des problèmes standards soumis aux élèves dans le contexte scolaire sont sans aucun rapport avec leurs expériences de la vie quotidienne au sens où, dans la vie quotidienne, l'élève n'aurait aucun besoin de rechercher la réponse demandée et où les « conditions réelles » sont si compliquées que le élèves ne sauraient les résoudre avec les connaissances mathématiques dont ils disposent.

D'autres auteurs semblent plus réservés sur cet effet facilitateur. C'est le cas par exemple de Adda (1981, 1985) qui souligne l'importance de l'influence du contexte dans la production d'une réponse et les confusions entre signifiant et signifié qui en résultent. Par exemple, la question « Qu'est-ce que Paris ? » recevra des réponses fort différentes selon que l'on soit en classe de géographie ou de vocabulaire. Dans le premier cas, on pourra s'attendre à la réponse « capitale de la France » et « un mot de cinq lettres » dans le second. Pour Adda, comme pour Sarrazy (1995), le maître ne peut pas expliciter l'origine de ces difficultés. Les habillages, selon Adda, mettent en scène un « faux concret » et conduisent à donner aux élèves « une représentation romanesque des mathématiques » et donc « revient à fausser totalement la relation entre l'enfant et les mathématiques ». Aussi, le maître, ne pouvant exclure ces incompréhensions et malentendus ne peut être que vigilant à l'égard de ces dysfonctionnements. Mais, comme le remarque Sarrazy (1996) « peut-on parler réellement de dysfonctionnements lorsque ceux-ci sont irréductibles ? ». C'est la raison pour laquelle la théorie du code invoquée par Adda, lui semble insuffisante pour rendre compte de ces phénomènes conversationnels ; ces « malentendus » trouvent une explication satisfaisante dans le cadre théorique du contrat tel qu'il a été défini par G. Brousseau.

C'est d'ailleurs dans cette même perspective théorique, que Clanché & Sarrazy (1999) ont montré que la transposition des pratiques sociales dans le champ scolaire (*via* les habillages) peuvent amplifier des effets de contrat s'opposant à la conceptualisation des connaissances visées par le professeur. Pour eux « la question des rapports entre l'expérience quotidienne 'réelle' et l'expérience quotidienne scolaire présuppose qu'il existe une analogie structurelle entre les *formes de vie* scolaires et sociales et que cette analogie pourrait être identifiée par les élèves. » (*id.*). A partir d'une analyse d'une leçon conduite dans un cours préparatoire kanak, les auteurs montrent que la leçon se structure par des oscillations successives entre des contextualisations externes (centrées sur la compréhension de la narration – dominant en début de séquence) à des contextualisations internes (centrées sur la situation d'enseignement elle-même — dominant en fin de séquence). Cette dynamique « contextualisation interne-externe » conduit les élèves, non pas à établir le lien entre l'histoire racontée dans l'énoncé et le problème arithmétique qu'ils doivent résoudre mais à « switcher » entre deux cadres didactiques (comprendre l'histoire / comprendre ce qu'il faut faire pour répondre à la question posée) et permet aux auteurs de corroborer leur hypothèse initiale relative au statut didactique d'une fonctionnalisation sociale en référence à leur expérience quotidienne.

L'ensemble de ces travaux permet de réaffirmer l'importance de cette question. Si les problèmes de partages inégaux offrent une grande diversité quant aux contextes possiblement évocables, il convient d'être extrêmement attentif aux effets que ces contextes peuvent engendrer sur les conduites des élèves et sur les contrats qu'ils sollicitent. Je pense que cette question n'est pas épuisée et mérite d'être re-travaillée dans la perspective théorique que nous avons tenté de définir dans cette note en vue de mieux comprendre les difficultés des élèves dans leur appropriation des connaissances mathématiques et de proposer aux professeurs, le cas échéant, des instruments d'analyse didactique qui leur permettraient de mieux comprendre ce que font leurs élèves et, conséquemment, d'élaborer des dispositifs *ad hoc* pour réguler les difficultés d'apprentissage ainsi identifiées.

Bibliographie

Adda J. (1976). Difficultés liées à la présentation des questions mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, n° 7. 3-22.

Adda J. (1981). Quelques aspects de la relation aux mathématiques chez des enfants en situation d'échec scolaire dans l'enseignement élémentaire. *Revue de phonétique appliquée*, n° 57. 59-64.

Adda J. (1985). Pragmatique et questionnements scolaires en mathématiques. In : *Discourse : Essays in Educational Pragmatics*. Eds. M. Spoelders et al. Leuven (Belgique) : Acco. 223-230.

Adda J. (1987). Erreurs provoquées par les représentations. *Publication Université de Sherbrooke (Canada)*, Rencontre CIEAEM, doc. ronéo. 6 p.

Artigue M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9/3. 281-308.

Bandura, A. (1977). *Social Learning Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Bednarz, N., Janvier, B. (1994). The Emergence and Development of Algebra in a Problem Solving Context: An Analysis of problems. In: *Proceedings Int. Group for the Psychology in Mathematics Education*. Lisbonne.

Blum W., Niss M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, n° 22. 37-68.

Broin, D. (2002). *Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires*. [Thèse pour le doctorat.] Université Bordeaux 1.

Brousseau G. (1998a). *Théorie des situations didactiques*, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Grenoble : La pensée sauvage, 395 p., coll. Recherches en didactique des mathématiques.

Brousseau G. (1998b). *La théorie des situations didactiques et ses applications*. Cours donné à Montréal pour l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 56 p.

Brousseau G. (2001). Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Actes du Colloque International Rallyes Mathématiques, jeux, compétitions, clubs, et leurs retombées sur l'enseignement et l'image des mathématiques.* Commission Inter-Irem Rallye à Toulouse 15-17 Juin 2001.

Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique* : deux études sur les notions de contrat et de situation, (doc. ronéo.). Aix Marseille : IREM, n° 14. 92 p.

Chevallard Y., Johsua M.-A. (1991). *La transposition didactique :* du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble : La pensée sauvage. 240 p.

Clanché P., Sarrazy B. (1999). Contribution to the study of the links existing between real daily experience and daily scholar experience as regards the teaching of mathematics : Example of an "additional structure" within a first year group in Kanak school. In: *SEMT 99*. Eds. M. Hejný, J. Novotná. Praha: UK-PedF. 41-49.

Ehrlich S. (1985). La compréhension de textes par les enfants. In : *Psychologie développementale : problèmes et réalités*. Eds. J. Bideaux, M. Richelle. Mardaga. 161-178.

Escarabajal M.-Cl. (1984). Compréhension et résolution de problèmes additifs. *Psychologie Française*, n° 29. 247-252.

Eysenck M.W. (1993). *Principles of Cognitive Psychology.* Hove, Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Co.

Hejný M. et al. (1990). *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava, SPN. [*Théorie de l'enseignement des mathématique*]

Hejný M. (1992). Analysis of Student's Solutions of the Equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$. *Acta Didactica Univ. Comenianae, Mathematics,* Issue 1. 65-82.

Hejný M. (1995). Atomic Analysis (AA). In: *ERCME 97*. Praha, Prometheus. 137-138.

Hershkovitz S., Nesher P., Novotná J. (2002). Cognitive Factors Affecting Problem Solving. In: *Proceedings CERME 2*. Ed. J. Novotná. Praha: UK-PedF. 466-475.

Janvier, C. (1989). Contextualisation et représentation en mathématiques. *Séminaire sur la Représentation*, No. 50, Montréal: UQAM, CIRADE.

Julo J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques* : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement, Rennes : PUR. 255 p. coll. Psychologies.

Kubínová M., Novotná J., Bednarz N., Janvier B., Totohasina A. (1994). *Strategies used by students when solving word problems*. Publikace KMDM, 9. Praha.

Kuřina F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha, SPN. [*Art de voir en mathématiques*]

Maier H. (1988). Du concept de compréhension dans l'enseignement des mathématiques. In : *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Ed. C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage. 29-39.

Nesher P., Hershkovitz S., Novotná J. (2003). Situation Model, Text Base and What Else? Factors Affecting Problem Solving. Accepté pour *Educational Studies in Mathematics*. (Voir Annexe 5.)

Novotná J. (1995). Analysis of Text Comprehension in Pupils' Solutions to Word

Problems Via Atomic Analysis. In: *SEMT 95*. Eds. M. Hejný, J. Novotná. Praha, UK-PedF. 114-117.

Novotná J. (1997a). Geometrical Models in Solving Word Problems That Include the Division of the Whole Into Parts (Theory and Practice). In: *Proceedings Interakcja teorii i praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i średniej*. Ed. J. Tocki. Rzeszów, VSP. 109-119. (Voir Annexe 1.)

Novotná J. (1997b). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: *ERCME 97*. Eds. M. Hejný, J. Novotná. Praha: Prometheus. 98-102.

Novotná J. (1997c). Using Geometrical Models and Interviews as Diagnostic Tools to Determine Students' Misunderstandings in Mathematics. In: *SEMT 97*. Eds. M. Hejný, J. Novotná. Praha: Prometheus. 61-67.

Novotná J. (1998). Cognitive Mechanisms and Word Equations. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, Vorträge auf 32. Tagung für Didaktik der Mathematik* vom 2. bis 6.3.1998, München. Ed. M. Neubrand. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker. 34-41.

Novotná J. (1999). Pictorial Representation as a Means of Grasping Word Problem Structures. Psychology of Mathematical Education, 12. http://www.ex.ac.uk/~Pernst/. (Voir Annexe 3.)

Novotná J. (2000a). Analýza řešení slovních úloh. Praha, UK–PedF. 126 p. [*Analyse des résolutions des problèmes en mots*]

Novotná J. (2000b). Students' levels of understanding of word problems. In: *ICME 9. Abstracts of Plenary lectures and Regular Lectures*. Ed. H. Fujita. Tokyo/Makuhari, Japan. 96-97. (Les Actes en cours de publication.) (Voir Annexe 4.)

Novotná J., Hershkovitz S., Nesher P. (2003). Cognitive Factors Affecting Problem Solving at the Pre-Algebraic Level. In: *CERME 3*, Bellaria, Italy, 28.2.-3.3.2003. (En cours de publication.)

Novotná J., Kratochvílová, J. (1998). Paralela teoretické studie výzkumníka a přímého pozorování učitele. In: *XVI. vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu*. Ed. J. Zlatník. Vyškov: VVŠPV. 263-272. [*Parallèle de l'étude théorique du chercheur et l'observation directe de l'enseignant, Actes du XVI*[e] *colloque sur la direction des processus de préhension*]

Novotná J., Kubínová, M. (1999). Wie beeinflusst eine Visualisierung der Aufgabenstellung den Prozess der Lösung einer Textaufgabe. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999*, Vorträge auf 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999, Bern. Ed. M. Neubrand. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker. 397-400. (Voir Annexe 2.)

Novotná J., Kubínová M., Fonová A., Jirotková D., Kratochvílová J., Matyášová,M., Skalická L., Špilauer J. (1995). *Static atoms in the solving process of one word problem.* Publikace KMDM, 10. Praha, UK-PedF.

Novotná J., Kubínová M., Fonová A., Kratochvílová J., Matyášová M., Skalická L. (1996a). *Dynamic atoms in the solving process of one word problem.* Publikace KMDM, 11. Praha, UK-PedF.

Novotná J., Kubínová M., Fonová A., Jirotková D., Kratochvílová J., Matyášová M., Skalická L., Špilauer J. (1996b). Atomic Analysis of One Word Problem. In: *Proceedings Short Presentations, ICME 8*, Sevilla, Spain. 289.

Odvárko O. et al. (1990). *Metody řešení úloh*. Praha, SPN. [*Méthodes de résolution des problèmes*]

Polya G. (1962). *Mathematical Discovery*. John Wiley & Sons.

Polya G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème*, [traduit de l'américain par C. Mesnage], 2ème éd. aug. Paris : Dunod. 237 p.

Rendl M. (2001). Solving mathematical verbal tasks with primary school pupils. In: *La transmission du savoir comme problème culturel et identitaire - The Transmission of Knowledge as a Problem of Culture and Identity*. Eds. M. Kučera, J.-Y. Rochex, S. Štech. Praha, Karolinum. 207-220.

Richard J.-F. (1987). L'approche cognitive dans la résolution de problèmes à l'école. In: *Résolution de problèmes en mathématique et en physique*. Eds. J. Colomb, J.-F. Richard. I.N.R.P. Coll. rapports de recherches. 12. 277-281.

Richard J.-F. (1984). La construction de la représentation du problème. *Psychologie Française.* 29-21. 226-230.

Rouchier A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/2, 177-196.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. [Note de synthèse.] *Revue Française de Pédagogie,* n° 112. 85-118.

Sarrazy B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique* : Rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois. [Thèse pour le doctorat.] Université Bordeaux 2, Mention Sciences de l'Education. 775 p.

Sarrazy B. (1997). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17/2. 135-166.

Sarrazy B. (2002). Effects of variability on responsiveness to the didactic contract in problem-solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Psychology of education*. XVII. 4, 321-241.

Semadeni Z. (1995). Developing children's understanding of verbal arithmetical problems. In: *SEMT 95*. Eds. M. Hejný, J. Novotná. Praha: UK-PedF. 27-33.

Sierpinska A. (1997). *La compréhension en mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Université. 186 p.

Toom, A. (1999). Word Problems: Applications or Mental Manipulatives. *For the Learning of Mathematics*, 19, 1. 36-38.

Vergnaud G. (1983a). *L'enfant, la mathématique et la réalité* : Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Berne : Peter Lang, 217 p.

Vergnaud, G. (1983b). Multiplicative Structures. In: *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Eds. R. Lesh, M. Landau. New York: Academic press: 127-174.

Vergnaud G., Durand C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de pédagogie*. 36. 28-43.

Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000). Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger Publ.

Wallace G. (1921). The art of thought. New York, Hartcourt, Grace World.

Annexes

Annexe 1

Novotná J. (1997a). Geometrical Models in Solving Word Problems That Include the Division of the Whole Into Parts (Theory and Practice). In: *Proceedings Interakcja teorii i praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i średniej*. Ed. J. Tocki. Rzeszów, VSP. 109-119.

Annexe 2

Novotná J., Kubínová, M. (1999). Wie beeinflusst eine Visualisierung der Aufgabenstellung den Prozess der Lösung einer Textaufgabe. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999*, Vorträge auf 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999, Bern. Ed. M. Neubrand. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker. 397-400.

Annexe 3

Novotná, J. (1999). Pictorial Representation as a Means of Grasping Word Problem Structures. *Psychology of Mathematical Education*, 12. http://www.ex.ac.uk/~Pernst/.

Annexe 4

Novotná J. (2000b). Students' levels of understanding of word problems. [Regular lecture.] In: *ICME 9.* Ed. H. Fujita. Tokyo/Makuhari, Japan. (En cours de publication.)

Annexe 5

Nesher P., Hershkovitz S., Novotná J. (2003). Situation Model, Text Base and What Else? Factors Affecting Problem Solving. Accepté pour *Educational Studies in Mathematics*. (Texte sans tables et figures: http://www.kluweronline.com/issn/0013-1954, Forthcoming Papers)

Annexe 6

Novotná J. (2002). *Instruments pour l'analyse des traces écrites*. Extrait de la présentation « De l´étude du comportement à celle de situations » à l'Université Bordeaux 2, DAEST, 23. Septembre 2002.

Annexe 1

Interakcja teorii i praktyki nauczania matematyki, WSP Rzeszów, 1997

Jarmila Novotná
Charles University, Prague

GEOMETRICAL MODELS IN SOLVING WORD PROBLEMSTHAT INCLUDE THE DIVISION OF THE WHOLE INTO PARTS (THEORY AND PRACTICE)

One of the main fields of human activities is information-processing. It should be already developed in the school-age, esp. in mathematical education.

In [1] some major assumptions of the information-processing approach are summarized:

- Information made available by the environment is processed by a series of processing systems (e.g. attention, perception, short-term memory). These processing systems transform or alter the information in various systematic ways (e.g. three connected lines are presented to our eyes, but we see a triangle).
- The aim of research is to specify the processes and structures (e.g. long-term memory) that underline cognitive performance.
- Information processing in people resembles that in computers.
- Two types of processing are studied in [1]:
- *serial processing* (one process is completed before the next begins),
- *parallel processing* (some or all processes occur at the same time).

It is virtually certain that both serial and parallel processes are required for solving a given problem or task. Parallel processing occurs more frequently when a student is highly skilled. It seems likely that parallel processing is often used during problem solving.

The analogy to the two types of information-processing is also present in human history in the pre-Greek and Greek mathematics [2]. The nature of pre-Greek mathematics was manipulative, calculations were performed by moving small stones. Hints for solvers were given in the form of a succession of actions, where after performing one action, the following one was activated. It is a typical serial approach. Pythagoras replaced the succession of actions with one figure bearing the identified relationships. The figure gives the complete information (but often in a very complicated form). This is a typical parallel approach (Gestalt in German).

The passage from serial to parallel processing is pedagogically very important, it represents a qualitative change.

The grasping and solving processes will be studied in this article and illustrated with one type of word problems dealing with the division of a whole into parts. Word problems form one of the broadest areas in mathematical education. The standard symbolic system used for solving word problems is algebra [3]. The use of other symbolic languages or intuition in the grasping word problem may help to develop a solver's creativity and to overcome major difficulties caused by the wrong understanding of algebra. Two different symbolic languages for grasping the assignment of word problems dealing with the division of a whole into parts will be presented and compared from the point of view of the information-processing organization.

1. Types of studied word problems

In 1992, the cooperation between CIRADE (UQAM, Montreal, Canada) and the Department of Mathematics and Mathematical Education (Faculty of Education, Charles University, Prague) concerning arithmetical and algebraic word problems began. The com-

mon research investigates strategies used by pupils when solving word problems dealing with the division of a whole into parts [4],[5].

The problems presented to students were of three types (with two, three or four participants):

multiplicative: the relationships among parts are only multiplicative;

additive: the relationships among parts are only additive;

mixed: the relationships among parts are of both types.

The following six problems will be used to illustrate results of our research.

Problem A:
Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles together. Petr has 6 times more marbles than David and Jirka has 2 times more marbles than David. How many marbles has each boy got?

Problem B:
The fee that two Mr. Novak's daughters, Pavla and Marie, got, is 181 CZK together. Marie has got by 37 CZK more than Pavla. How many crowns has each daughter got?

Problem C:
380 students have enrolled in three sport clubs. All the clubs have their meetings at the same time, three times more students in the basketball club than in the gymnastics one, in the swimming club by 114 students more than in the basketball one. How many students have enrolled in each sport club?

Problem D:
Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles together. Petr has 6 times more marbles than David and 3 times more marbles than Jirka. How many marbles has each boy got?

Problem E:
Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles together. Jirka has 2 times more marbles than David, Petr 3 times more marbles than Jirka. How many marbles has each boy got?

Problem F:

Beda has 4 times more stamps than Jirka and 7 times more stamps **than Standa**. In case that Beda has 504 stamps, how many stamps will all boys have together?

Problem G:
Marie had by 10 CZK more than Pavla. Both of them got money. Pavla succeeded to double her amount, Marie got 20 CZK. Now, both have the same amount. How many crowns has each of them got at the beginning?

2. Grasping and solving processes

In [1] encoding, transformation and storage processing stages are mentioned (illustrated with the process of identifying one letter). Applying this system to the solving of word problems mentioned in chapter 1, we can describe the stages of the grasping and solving processes as follows:

- *an encoding stage* = grasping the assignment (not necessarily ccompanied by a written record),
- *a transformation stage* = transfer from the discovered relationships to the language of mathematics + the mathematical solution to the discovered mathematical problem,
- *a storage stage* = transfer of mathematical results into the context + giving the answer to the original problem.

3. Encoding stage

When grasping the assignment, the solver absorbs a sequence of differently graded information. The whole stage has four basic levels [9]:

a) *grasping separate atoms* during the first reading the problem,
b) *searching for and reaching unifying view*,
c) *looking for and finding all relationships* relevant to the solving process,

d) *getting the overall insight* (finding how all the pieces of information are mutually connected).

The nature of levels a) to c) is mainly serial, level d) has mostly a parallel character.

The use of legends is strongly influenced by a teacher's demands and pupils' habits. The legend can have different forms from the detailed rewriting of the assignment to a slightly more clearly organized form (called here a word legend) on one side and a considerably shortened record such as draught (called here a graphic legend) on the other side. The choice of an appropriate legend can help to get insight into the problem structure during the solving process.

3.1. Word legends

3.1.1. Language

The language of word legends consists of the following basic atoms (examples for the problem A):

		Examples
T:	total number of objects,	*All of them 198 marbles*
P_i, $i=1,...,n$:	i-th participant's number of objects,	*David ... x*
A:	arrows expressing relationshipsamong atoms $T, P_1, ..., P_n$.	

Example of a legend for problem A:

Irena
together ... 198
David ... x
Petr ... 6 times more than
Jirka ... 2 times more than

3.1.2. Serial and parallel features

The process of building up a word legend is serial. A student usually reads the assignment (once or more times) and tries to record information at levels a) to c).

Example (assumed legend decomposition of Irena's legend):

		Level
	together ... 198	a)
	Petr ...	a)
	Jirka ...	a)
	David ... x	b)
(Petr ...)	*6 times more*	c)
(Jirka ...)	*2 times more*	c)
	arrows	c), resp. d)

3.1.3. Main obstacles

Obstacles connected with the use of word legends are described in [6] and [8]. Let us summarize the typical ones:

- *incorrect use of letter labelling* (see Slavka, problem A),
- *incorrect understanding of relationships* (see Roman, problem D),
- *use of incorrect atoms* (see Josef, problem D „*everyone has*"),
- *confused final form of the legend* especially in case of a larger number of participants and complicated problem structure.

Examples:

Slavka *Petr ... 6x more than and 3x more than*
David ... x
Jirka ... x

Roman *Petr 6x more than*
David ... 3x more than

	Jirka	
Josef	*together*	*... 198 marbles*
	Petr	*... 6 times more than*
	David	*... x*
	Jirka	*... 3 times less than*
	every one has	*... y*

3.2. Graphic legends

We will work here with segment models, i.e. graphic models where line segments are used for expressing relationships among parts, and parts and the whole. The use of other graphic models is similar.

3.2.1. Language

The language consists of the following basic atoms:

	Represents
line segments: L,	total number of objects,
L_i, $i=1,\dots,n$,	i-th participant's number of objects,

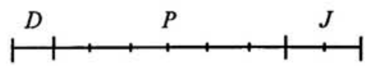
letters or words labelling line segments.

Relationships among parts are represented by different length of segments, relationships between parts and the whole are represented by the fact that the sum of length of all segments L_i must equal the length of L. The rules for constructing the model are:

- $L_i > L_j$ for the case, that the i-th participant's number P_i is larger than the j-th participant's number P_j,
- $\frac{|L_i|}{|L_j|} = \frac{P_i}{P_j}$ (multiplicative case), $||L_i| - |L_j|| = |P_i - P_j|$ (additive case),
- $|L| = |L_1| + |L_2| + \dots + |L_n|$.

Examples:

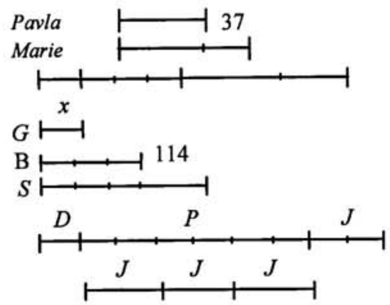
Problem A: *Ivan*



Problem B: *Jana*

Problem C: *Radek*

Problem D: *Zlata*



Notes:

1. The form of segment legend can vary from the simplest case of one line segment, representing the whole, divided into corresponding parts (example Ivan) to the form of several line segments placed one next to another or one beneath another (example Radek). The information provided by the last form is often more detailed, the first one expresses the relationships between parts and the whole in a more expressive way.
2. Several other symbols can be used in segment legends, e.g. a special symbol for labelling the basic line segment (example Radek), numbers labelling the known relations.
3. In the real situation, the length of line segments should not be drawn precisely, it is sufficient if the sketch gives the idea of the structure.

3.2.2. Serial and parallel features

Segment legends have several parallel processing features but the first phase of the process is usually serial (a number of line segments to be used, ...). However the relationships between the lengths of segments are to be found, the complete description of the problem structure plays a key role. This is an important difference in comparison with word legends, where the situation when the solver is not able to discover problem structure even if he/she has recorded all

data is not rare.

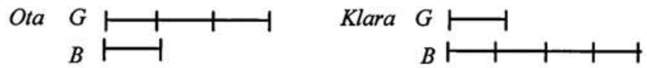
Our experiments show that problems of a rather complicated structure can be reformulated using segment legends (example Zlata, problem A → problem D). In this way, they become easier.

3.2.3. Main obstacles

The nature of obstacles connected with the use of segment legends is different from those mentioned in 3.1.3. We have discovered the following ones (only the most frequent will be mentioned here):

- *incorrect representation of mutual relationships* between the lengths of segments L_i, L_j (see Ota, problem C)
- *wrong representations of additive and multiplicative relationships* (see Klara, problem B)
- *use of segment models for problems which are not suitable* for this form of grasping the structure (problem E)
- *formal use* of line segments without understanding the real structure.

Examples:



Notes:

1. Graphic records lead to strategies „start with the unit number for one part" or „estimate and balance numbers according to the structure of the assignment".

2. There are problems where the use of segment legend gives directly the result without any further calculations.

Example: Problem G

4. Conclusions

In our experiments, only a few students tried to record the assignment graphically. A graphic record could be of great help for a student when grasping the text, however it is not often used in Czech schools and textbooks.

Differences between the completeness and expressive power of word and segment legends and the possibilities of overcoming a solver's obstacles and misunderstandings of the problem structure by segment models are studied in [7]. We can conclude that word legends stress mainly bilateral relationships. The lack of global insight can be reduced by using graphic legends.

It is necessary to emphasize that we do not expect that the use of graphic legends becomes an universal tool for solving word problems. But giving students the opportunity to get acquainted with various methods and to choose the appropriate method or the combination of methods for himself/herself is highly recommended.

References

[1] Eysenck M.W., *Principles of Cognitive Psychology*, Hove, Lawrence Erlbaum Associates Ltd. 1993.

[2] Hejný M. et al., *Teória vyučovania matematiky*, Bratislava, SPN 1990.

[3] Hejný M., *Zmocňování se slovní úlohy*, Pedagogika 4, 1995.

[4] Kubínová M. Novotná J., Bednarz N., Janvier B., Totohasina A., *Strategies Used by Students When Solving Word Problems*, Report 9, Prague, Faculty of Education, Charles University 1994.

[5] Kubínová M., Novotná J., *Strategie žákovských řešení slovních úloh, jejichž základem je dělení celku na části*, In, Proceedings XIII. colloquium řízení osvojovacího procesu. VVŠPV, Vyškov 1995, pp. 76-90.

[6] Novotná J., *Analysis of Text Comprehension in Pupils' Solutions to Word Problems Via Atomic Analysis*, In: Proceedings SEMT 95. Ed. M. Hejný, J. Novotná, Prague, Faculty of Educatiom, Charles Univesity, 1995.

[7] Novotná J., *Použití grafického modelu pro uchopení slovní úlohy zabývající se dělením celku na části*. In: Proceedings XIV. colloquium řízení osvojovacího procesu. VVŠPV, Vyškov 1996. In print.

[8] Novotná J., *Grasping of a Structure of a Word Problem via Atomic Analysis. Submitted for publishing by the British Journal of Educational Studies*, Blakwell Ltd., UK.

[9] Novotná J., *Research in Didactics of Mathematics in the Czech Republic*, In: Proceedings ICME8. Sevilla 1996. In print.

Annexe 2

Jarmila NOVOTNÁ, Marie KUBÍNOVÁ, Prag

Wie beeinflusst eine Visualisierung der Aufgabenstellung den Prozess der Lösung einer Textaufgabe

1. Einleitung

Textaufgaben für Schüler findet man in allen Lehrbüchern und Arbeitsheften in allen Unterrichtgegenständen, also nicht nur in Mathematik, sondern auch in Physik, Chemie, ... Ihr Vorteil ist, dass die Aufgabenstellung oft wie die Beschreibung eines wirklichen Sachproblems formuliert ist, welchem die Schüler in ihrer Umgebung begegnen. Dadurch wird die Aufgabenstellung, die für die Schüler auf den ersten Blick schwer ist, meist akzeptabler und verständlicher präsentiert, weil der Schüler den wechselseitigen Zusammenhang und die Verbindung zwischen der "normalen" Welt und der "Schultheorie" sieht (Kubínová, 1998).

Forschungergebnisse haben bewiesen (dies gilt nicht nur für Textaufgaben in anderen Gegenständen sondern auch in Mathematik), dass Textaufgaben für Schüler zu den schwierigsten Aufgaben gehören. Oft fürchten sich Schüler vor solchen Aufgaben, bevor sie die Aufgabe lesen und mit der Lösung beginnen. Oft ist es dadurch gegeben, dass manche Schritte, die für die erfolgreiche Lösung notwendig sind, unterlassen oder unterschätzt sind. Aus unserer Sicht ist der Schritt, der für den Schüler wahrscheinlich der schwierigste ist, das Ersetzen des komplizierten Systems (des Textes) bei entsprechendem Niveau, das einfacher für die Aufgabenlösung ist. Es handelt sich um den Transfer des Textes in die entsprechende Sprache (zum Beispiel in die Sprache der Mathematik, der mathematischen Symbole und Operationen), die ihnen die Benutzung des passenden Algorithmuses, der für die Lösung passend ist, ermöglicht.

In diesem Zusammenhang ist die Frage, welche Mittel der Schüler benutzt, besonders wichtig um diese Transformation zu realisieren. Die Analysen der Lösungen der Schüler haben gezeigt, dass im traditionellen Schema der Textrezeption (z.B. Gavora, 1992) man noch den Prozess der Transformation des Textes in eine andere Form in Betracht ziehen muss.

In dem folgenden Text werden wir unter dem Begriff Textaufgabe nur solche Textaufgaben verstehen, die für den Mathematikunterricht konstruiert wurden.

2. Textaufgabenkodierung (Novotná, 1999, S. 17-19)

In unserer Forschung konzentrieren wir uns auf das Verständnis der Aufgabenstellung, wenn der Schüler die meisten Informationen, die zum Lösen der Aufgaben notwendig sind, gerade aus dem Text gewinnt. Der Text ist daher für den Schüler der Grundsatz zur Kommunikation.

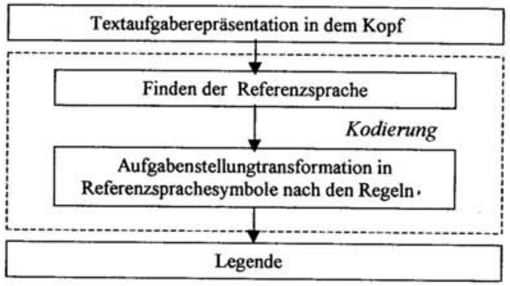
Das erste Abbild des Textes wird im Kopf des Schülers gebildet. Der Schüler gestaltet sich Ideen, die er nachher mündlich oder schriftlich wiedergeben kann (aber nicht muss). Die Kopfrepräsentation genügt dem Löser nicht immer. Folgende Gründe können dafür sprechen:

- ➢ Der Schüler braucht seine Ideen zu veröffentlichen, weil zum Beispiel die Aufgabenstruktur zu kompliziert ist und er nicht fähig ist, die Komplexität des Problems im Kopf darzustellen, um ein ausreichendes Verständnis zu gewinnen.
- ➢ Er braucht seine Repräsentation jemandem mitzuteilen, weil es zum Beispiel von ihm gefordert wird.
- ➢ Die Transformation seiner Repräsentation der Textaufgabe nach außen hilft dem Schüler seine früheren Erfahrungen zu aktivieren.

Unter der **Kodierung** der Textaufgabenstellung verstehen wir die Textaufgabenumformung in ein passendes System (eine **Referenzsprache**), das übersichtlicher und ökonomischer die Daten, Bedingungen und das Unbekannte des gelösten Problems aufzeichnet. Diese Aufzeichnung werden wir als **Legenden** bezeichnen.

Die Referenzsprache enthält die Grundsymbole und Regeln für die Legendenbildung. Der Schüler hat nicht nur eine Referenzsprache zur Verfügung, sondern es existieren verschiedene Referenzsprachen. Darum können verschiedene Legenden für eine Aufgabe gebildet werden. Die Wahl einer Referenzsprache ist zum Beispiel dadurch beinflusst, dass der Schüler nicht alle möglichen Kodierungsweisen kennt oder er kennt sie, aber kann nicht mit allen in der gleichen Weise arbeiten oder hat manche nicht eingeübt, oder dass er einer Kodierungweise den Vorzug gibt, die unpassend ist, nicht bemerkt, dass die neue Aufgabe der zuvor gelösten nicht ähnlich ist.

Die Legendebildung verläuft gewöhnlich nach folgendem Schema:



3. Unsere Forschungsresultate

Nicht alle Aufgaben, die der Schüler beim Unterricht oder in Lebensituationen trift, sind Typenaufgaben. Oft sieht man erst bei der Lösung, ob der Schüler zu dem Transfer der Strategie, die in seiner Erkenntnisstruktur niedergelegt ist, fähig ist oder ob er lieber ganz andere Mittel wählt, um das Nichtstandardproblem zu lösen. Die richtige Auswahl der Referenzsprache die der Schüler nicht nur zur Verfügung hat, sondern die er im richtigen Moment aktivieren kann, beeinflusst den Erfolg.

Die Referenzsprache, die die Schüler am meisten für die Aufgabenstellungkodierung benutzen, ist die graphische Darstellung. Der Schüler kann seine Form der graphischen Notierung spontan wählen (**spontane Darstellung**), oder seine Wahl kann mehr oder weniger durch die fertigen Schemata, die er zur Verfügung hat, beienflusst werden (**leitende Darstellung**).

Der Fall der leitenden Darstellung wurde zum Beispiel in (Novotná, 1997a), (Novotná, 1997b), (Novotná, 1998) analysiert, für den Fall der spontanen Darstellung, siehe (Novotná & Kubínová, 1998).

Spontane Darstellung

Textaufgabenschema (Novotná & Kubínová, 1998): Eine Kiste mit der Keramik wurde in einen Laden gebracht. In der Kiste waren k kleinere Kistchen, jede kleinere Kiste enthielt s Schachteln, in jeder Schachtel waren m kleinere Schachteln, jede kleinere Schachtel enthielt p Päckchen, jedes mit v Vasen. Wieviele Vasen waren in der Kiste?

Bemerkung: Die Aufgabenstellung wurde nach dem Alter der Schüler (8 bis 15 Jahren) von einer arithmetischen Form über gemischte arithmetisch-algebraische Formen bis zu einer reinen algebraischen Aufgabenstellung modifiziert. Die graphischen Darstellungen haben nicht die Schüler der dritten, vierten, fünften und neunten Klasse benutzt, sondern die Bilder haben die Schüler der sechsten, siebten und achten Klasse gezeichnet (für die folgende Darstellungen: $k = 8$, $s = k$, $m = 5$, $p = 4$, v).

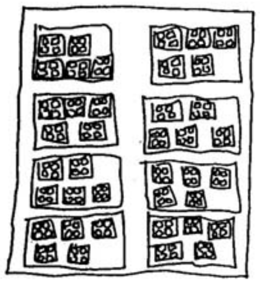
Die gezeichneten Objekte waren meist als Rechtecke notiert. Manche Schüler haben bis zur Benutzung der Linien als Anschaung eines Objektes abstrahiert. Manche Schüler haben verschiedene Farben für verschiedene Umschlageschichten benutzt.

- ➢ Unter einer **Prozessaufgabenstellunglegende** verstehen wir jede solche Schüleraussage, in der er graphisch veranschaulicht, dass er mindestens einige Umschläge ausgepackt hat [Roman, Alter 14].
- ➢ Unter einer **Konzeptaufgabenstellunglegende** verstehen wir jede solche Schüleraussage, in der der Schüler den Text als einen Komplex erfasst und die Objekte in der grossen Kiste dargestellt hat [Tom, Alter 14].

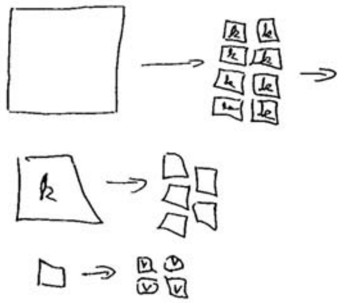
In beiden Fällen haben wir drei verschiedene Stufen der graphischen Darstellung unterschieden:

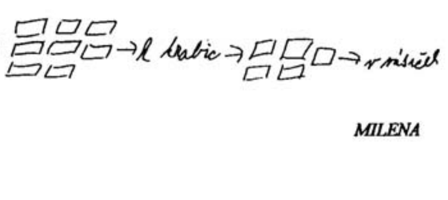
- ✓ Der Schüler benutzt die Visualisierung nur um den Lösungprozess zu starten oder zur Evidenz der Schichten des Auspackens.
- ✓ Der Schüler manipuliert mit schematisch dargestellten Objekten während der ganzen Lösung und in allen Auspackungsschichten.
- ✓ Der Schüler ersetzt in einigen Auspackungsschichten die schematisch-graphische Darstellung der Objekte bei arithmetischen/algebraischen Operationen, es erscheint Abstraktionshebung.
- ➢ Unter einer **Konzept/Prozessaufgabenstellunglegende** oder **Prozess/Konzeptaufgabenstellunglegende** verstehen wir jede solche Schüleraussage, in der mindestens ein Übergang zwischen den beiden explizit oder implizit erscheint [Milena, Alter 14].

ROMAN



TOM





MILENA

4. Schlussbemerkung

In dem Artikel haben wir uns auf die Analyse der Aufgabenstellungtransformation konzentriert. Die Frage des Einflusses der Wahl der Referenzsprache auf die der mathematischen Lösungsmittel bleibt offen.

Literatur

Gavora, P. (1992). *Žiak a text*. Bratislava, SPN.

Kubínová, M. (1998). *Slovní úlohy v učebnicích matematiky pro druhý stupeň ZŠ*. In: Proceedings 6. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Mariánské Lázně 1998. Plzeň, ZČU, S. 153-154.

Novotná, J. (1997). *Using Geometrical Models and Interviews as Diagnostic Tools to Determine Students' Misunderstandings in Mathematics*. In: Proceedings SEMT 97. Praha, Prometheus 1997, S. 61-67.

Novotná, J. (1997). *Geometrical Models in Solving Word Problems That Include the Into Parts (Theory and Practice)*. In: Proceedings Interakcja teorii I praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i sredniej. VSP Rzeszów 1997, S. 109-119.

Novotná, J. (1998). Cognitive Mechanisms and Word Equations. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1998, Vorträge auf 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6.3.1998 in München. Hildesheim, Berlin, Verlag Franzbecker 1998, S. 34-41.

Novotná, J. & Kubínová, M. (1998). *Proces a koncept v uchopení úlohy*. In: Proceedings 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Mariánské Lázně 1998. Plzeň, ZČU, S. 127-132.

Anerkennung: Die Arbeit ist durch GAČR teilweise unterstützt worden, Grant Nr. 406/99/1696.

Annexe 3

Novotná, J. (1999). PICTORIAL REPRESENTATION AS A MEANS OF GRASPING WORD PROBLEM STRUCTURES. *Psychology of Mathematical Education*, 12. http://www.ex.ac.uk/~Pernst/

From a student's solution (Jakub, 13 years, individual experiment)

<u>Problem to be solved</u>: Marie and Pavla each had some money but Marie had 10 CZK more than Pavla. Pavla managed to double the amount of money she had and Marie added 20 CZK more to her original amount. They now found that both of them had the same amount. How many crowns did each of them have at the beginning?

Jakub writes: *Marie ... by 10 more than* *+ 20*

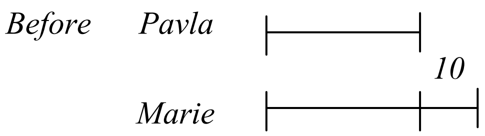
=

Pavla *.2*

This record of the assignment did not allow him to find a suitable solving strategy. The experimenter recommends him to use the visualisation with the help of line segments, see (Novotná, 1998):

Experimenter (E): *Try to record the situation at the beginning.*

Jakub (J):

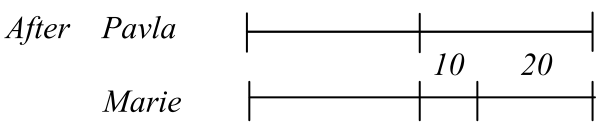


Experimenter E: *And after the change?*

J starts to draw a new line segment.

E: *Would not be better to record it in the same schema?*

After a short discussion, J's graphical representation is



J: *Aha *… I do not need to construct an equation!*

This is a small illustration of the power that graphical visualisation brings in the solving process of certain types of word problems.

Pictorial representation (diagrams) is one of the oldest and most used didactical tools for the solving of problems, see e.g. (Volkert, 1989). The importance of pictures, schemes, diagrams etc. grows with the expansion of new technologies such as audio-visual means, hypertext etc.

There are several studies, of which I will list four, analysing the role of figures as a didactical means for improving the learning process in different subject areas. Macek, 1984, Anschauliches Beweisen, 1989, Mares, 1995, Plass et al., 1998.

Mares's paper of 1995 is devoted to learning from pictorial materials. The child's understanding of pictographic materials depends on his/her cognitive structure development. It is connected not only with the age and spontaneous maturation of the child's intellect, but it also depends *on* the way the child's development is systematically influenced and on the level of thought-provocativeness of the child's environment. Mares characterises the differences between the *pre-school and school periods* from the point of view of verbal and non-verbal communication:

- In the pre-school period, the verbal and non-verbal communications are well connected. The child usually does not know how to read, his/her reception of knowledge comes from the spoken word and from visual materials (pictures, TV, video etc.).

- In the traditional Czech school education, the verbal and non-verbal communication is gradually disconnected. In schools pupils are taught *how to study from a text*, but very rarely or not at all *how to study from visual material*s. When this latter aspect is addressed it is usually restricted to questions concerning the clarity of the material. Questions such as "how to examine a figure?", "according to which rules it was outlined?", "how to draw a figure?" are not taken into consideration.

Mares (p. 319) refers to the term *visual literacy* which is used in literature in connection with understanding visual materials. It is considered either as an *ability* to understand ("read") and to use ("create") figures, to think and learn in the terms of figures, or as a *set of skills* that an individual has to his/her disposal in order to understand visually presented materials and to be able to use it for intentional communication with other individuals.

For Macek, 1984, the figure/diagram is characterised as a partly or completely constructed record. The author uses the term *didactical figure* for a visual two-dimensional or an audio-visual medium specifically constructed as a means of stimulating and regulating learning activities in the educational process.

The present article is connected with the role of figure in grasping word problem assignments. Some aspects in the specific domain of word problems dealing with the division of a whole into parts have already been presented e.g. in (Novotná, 1997b), (Novotná, 1998), (Novotná, 1999). The theory presented in these article*s* was supported by the results of experiments with 12-to15-year old Czech students.

We used the stages of word problem solving process presented in (Novotná, 1997c):

- encoding stage (grasping the assignment),
- transformation stage (transfer to the language of mathematics)
- calculation stage (mathematical solution of the problem),
- storage stage (transfer of mathematical results back into the context).

We will concentrate on the grasping of the assignment and consider only the case when the solver uses a figure.

The following terminology will be used (Novotná, 1999):

Coding of word problem assignment is the transformation of the word problem text into a suitable system (*reference language*) in which data, conditions and unknowns can be recorded in a more clearly organised and/or more economical form. The result of this process is a *legend*. The legend constructed in a pictorial form is called a *graphic legend*. The reference language contains basic symbols and rules for legend creation.

Note: There exist different reference languages for any one type of word problem. The solver's choice of one of them is influenced by several factors, e.g. by his/her previous experience, preferred information processing style, personal preferences.

Functions of graphical legends

The diagrams - graphical legends can fulfil different roles. We will specify those psycho-didactical functions given in (Mares, 1995), that are relevant for the situation of a graphical legend as a tool of getting insight in the word problem structure.

- *Function to represent*: Its purpose is to create a solver's adequate mental pictures. The figure is another representation of the assignment problem containing the data, conditions and unknowns of the problem. It can vary from a nearly realistic to a completely schematic drawing.

- *Function to organise*: Its purpose is to bring a suitable order in a solver's already existing mental pictures and knowledge in order to connect them together. It can perform the passage between process and gestalt during the grasping process.

➢ *Function to interpret*: Its purpose is to facilitate the understanding what are the unknowns of the problem and to reveal the most complicated relationships among the facts given in the problem. It helps to eliminate the formation of erroneous mental pictures.

➢ *Function to transform*: Its purpose is to influence the solver's information processing by changing the used reference language to another one that is more suitable for the respective solver and to help systematically to recall helpful information stored in his/her memory.

The functions of a graphical legend regarded from the point of view of a solver's emotionality are:

➢ *Function effectively-motivating*: Its purpose is to increase solver's positive attitude to the solving of the assigned word problem e.g. by awaking his/her interest in task, by exposing surprising relationships hidden in the assignment, by satisfying the solver's thirst for success.

➢ *Function of concentrating the attention*: The figure serves as a means to gain the solver's attention and to concentrate it to the fundamental pieces of information and relationships.*

➢ *Function cognitively-regulating*: The graphic legend should be a means for supporting cognitive processes in the solver's grasping of word problem*s* and to highlight the ways to a better interpretation of the facts given in the text.

Specific features of graphic representations

Applying the criteria for the text reception studied in (Gavora, 1991), i.e. passive/active text reception, personal interpretation of the text, use of personal language, we conclude:

➢ Creation of a graphical legend is an active process, a dialogue between the solver and the text.

➢ The way of coding the text can be delivered to the solver (by another person, a textbook etc.) or be determined by the solver.

---

* It can occur that a figure suitable from the point of view of its affectively-motivating power can divert the solver's attention in a wrong direction and make his/her grasping of the problem structure even more difficult.

➢ The solver can use a prescribed way of creating the graphical legend or create his/her own personal reference language.

Pictographic communication differs basically from verbal communication (Macek, 1984) mainly in the following ways:

➢ A closed set of signs and a conventional language does not exist.

➢ Usually it is a one-way process without dialogue.

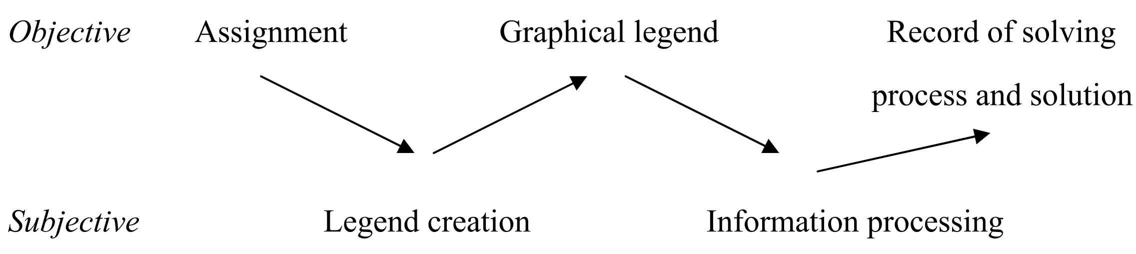
➢ Generally there is no feedback.

➢ The danger of distortions or loss of information is rather high whilst subjective factors play an important role.

Information aspects of a graphic legend

The dominant role in the graphical legend creation is played by the teacher more often than when using verbal materials. Therefore the choice of a specific reference language is connected with the concrete group of people - a class, a family etc. In the affective plane, the relationships teacher-student and teacher-class are important. What is very successful in one class can be difficult to understand in another (icons, signs, their position etc. from one reference language can e.g. have completely different meaning in another). This feature of a graphical reference language can be the source of solvers' difficulties.

The following scheme is a modification of the general scheme of the pictographic communication scheme presented in (Macek, 1984) for the case of word problem assignment graphical coding:



Classification of graphical legends according to the impulse for their creation

In our research we identified three legend categories:

1. *Spontaneous independent* figure creation
2. *Externally managed* figure creation
3. Creation of a figure in the *role of a signal*

1. The solver forms his/her graphical legend spontaneously without (or with a minimal use of) a previously learned reference language (Novotná & Kubínová, 1999). The impulse for the legend creation goes out from the solver's internal need to visualise the problem structure.

For the graphical legends classification the following criteria were used:

- shape similarity,
- use of ordinary language and/or mathematical symbols in the legend,
- completeness of the record,
- procedural or conceptual form of the legend.

a) Shape similarity*

- *Iconic legends* consist of real shape record.
- *Symbolic legends* keep the structural similarity only.

In our experiments (junior secondary level students) the pure iconic spontaneous legend was exceptional. Most students used the reference language consisting of both, iconic and symbolic elements.

Note: Most pupil’s representations are topologically correct rather than iconic.

b) Use of language and/or mathematical elements

In graphical legends reference language, the symbols used are not always pure pictographic ones. Words and/or mathematical symbols are attached. We distinguish two different roles of them:

- Words and separate simple mathematical symbols play the role of an *accompanying explanatory means* for graphical elements (see e.g. the graphical legend

* We use the classification presented in (Macek, 1984).

at the beginning of this article).

- During the legend creation, the solver discovers the problem structure and corresponding mathematisation. He/she does not finish the graphical record and uses a partial or complete mathematical representation of the problem.

c) <u>Completeness of the record</u>

The purpose why the solver creates a legend is in most cases his/her attempt to understand clearly and correctly the word problem structure. This grasping consists of several steps (Novotná, 1997c):

- ✓ grasping of objects and identifying those which are relevant to the situation,
- ✓ looking for and finding all relationships relevant to the solving process,
- ✓ searching for and reaching the unifying view,
- ✓ getting the overall insight.

Not all these stages are necessarily recorded in the graphical legend. There are different reasons why the solver does not finish the detailed legend, the most usual are the following ones:

- The solver gains the belief that he/she grasped successfully the problem structure before finishing it (aha-effect), he/she leaves its creation and passes directly to the mathematical processing.

- The solver did not find any relationship of a piece of information and the problem structure.

- The solver finds the creation of a graphical legend too complicated or too time- and/or energy-consuming and therefore records only uncompleted information.

d) <u>Procedural or conceptual graphical legends</u> (Novotná & Kubínová, 1999)

We call a legend:

- *procedural* when it clearly expresses the process in time, described in the assignment,

- *conceptual* when all pieces of information are recorded as a whole not showing the changes in time.

2. A *model graphical legend* for a family of problems is presented to solvers and they form graphical legends using the presented reference language.

The model legend should fulfil the following demands. It should

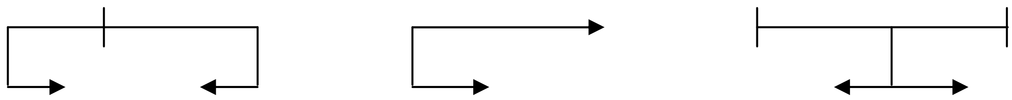
- *manage, regulate and develop* the grasping process. The reference language should be as simple and clear as possible not to consume too much of solver's energy when using it,
- *activate* the solver's mental activity,
- *visualise* the abstract information from the assignment and enable a creative manipulation with its pictographic elements,
- *offer easy orientation* in the assignment by a well-organised figure composition and *highlight* typical features and relationships,
- *fulfill* by bringing logical and unequivocal interpretation of the recorded information and *the need of emotionality* by influencing solver's attitudes to the solving of word problems,
- *be flexible* enough to enable an easy modification for different problems from the family of related word problems, see e.g. line segment legends for the family of word problems dealing with the division of a whole into parts studied in (Novotná, 1997a).

Creation of a model graphic legend for a family of word problems is always influenced by the author's past experience and personal preferences. It is not necessarily the best one for all other solvers. Therefore it is recommended to present the reference language of the model legend but not to insist on its use at any price. The individual differences usually touches upon the extent of the use of abstract symbols, the use of procedural/conceptual legend type, the composition of the legend and the richness and form of accompanying verbal and/or mathematical labels.

The educational climate and the relationships between the teacher and his/her students play an important role in the acceptance of a model graphical legend by the students. To increase students' creativity and ability to solve modified or non-standard problems, the teacher should not deliver the model legend as a completed algorithm, but construct it in co-operation with the students, let them discover the advantages (disadvantages) of its reference language themselves. In our experiments the usefulness of choosing well presented graphical legends was remarkable especially for weaker students.

3. The ability to solve a certain type of word problems can be increased by facilitating the positive transfer effect (the use of solver's past experience in solving similar problems). A simple figure can serve as a signal to activate the solving schemes stored in the solver's memory.

A typical example is the family of time - distance word problems. It is a difficult task for many students to solve these problems even if they are familiar with the model solutions to similar problems. Simple figures as



can activate the corresponding algorithm for the correct solving process and help the student to find the solution of the problem.

Conclusions

From the analysis of the graphic legends in solving word problems we find that the passive text reception has no place when creating a pictorial record of the assignment. The solver gives the assignment a new form, his/her personal presentation of the text. He/she adapts the text to his/her abilities and customs.

In the article the positive role of figures in the process of grasping word problem assignment was stressed. The questions of their possible negative influence were not analysed. There exist individual differences in dealing with pictographic materials from the point of view of solver's learning style, ability to draw pictures, influence of the solver's school and/or family background, age etc.

Literature

Gavora, P. (1992). Ziak a text (Student and text). Bratislava, SPN.

Macek, Z. (1984). Obraz jako didakticky prostredek (Figure as a didactical means). Pedagogika, *34*, p. 453-467.

Mares, J. (1995). Uceni z obrazoveho materialu (Learning from pictorial material). Pedagogika, *45*, p. 319-327.

Novotná, J. (1997a). Using Geometrical Models and Interviews as Diagnostic Tools to Determine Students' Misunderstandings in Mathematics. In: Proceedings SEMT 97. Praha, Prometheus, p. 61-67.

Novotná, J. (1997b). Geometrical Models in Solving Word Problems That Include the Into Parts (Theory and Practice). In: Proceedings Interakcja teorii i praktyki nauczania matematyki w szkole podstawowej i sredniej. Ed. J. Tocki. VSP Rzeszów, p. 109-119.

Novotná, J. (1997c). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. In: Proceedings ERCME 97. Praha, Prometheus, p. 98-102.

Novotná , J. (1998). Cognitive Mechanisms and Word Equations. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1998, Vorträge auf 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6.3.1998 in München. Ed. M. Neubrand. Hildesheim, Berlin, Verlag Franzbecker p. 34-41.

Novotná, J. - Kubínová, M. (1999). Wie beeinflusst eine Visualisierung der Aufgabenstellung den Prozess der Lösung einer Textaufgabe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, Vorträge auf 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern. In print.

Novotná , J. (1999). Analyza reseni slovnich uloh (Analysis of word problem solving process). Praha, Karolinum. In print.

Plass, J.L. & al. (1998). Supporting Visual and Verbal Learning Preferences in a Second-language Multimedia learning Environment. Journal of Educational Psychology, Vol. 90, No. 1, p. 25-36.

Proceedings Anschauliches Beweisen. Eds. K. Kautschitsch - W. Metzler (1989). Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18, Hölder - Pichler - Tempsky, Wien, B.G. Teubner, Stuttgart.

Volkert, K. (1989). Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik - historisch und systematisch betrachtet. In: Anschauliches Beweisen. Eds. K. Kautschitsch - W. Metzler. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18, Hölder - Pichler - Tempsky, Wien, B.G. Teubner, Stuttgart, p. 9-31.

Acknowledgement

The research was supported by the projects GACR No. 406/99/1696, GAUK 306/1998/A and by the Research Project Cultivation of mathematical thinking and education in European culture.

Annexe 4

Novotná J. (2000b). STUDENTS' LEVELS OF UNDERSTANDING OF WORD PROBLEMS. [Regular lecture.] In: *ICME 9.* Ed. H. Fujita. Tokyo/Makuhari, Japan. (En cours de publication.)

"A problem is not truly solved unless the learner understands what he has done and knows his actions were appropriate."
"Given the proper understanding of mathematical concepts and procedures, students would be better able to apply their knowledge in novel situations."

Brownell, W.A. (1928)

I. Introduction

In the paper, I concentrate on the classification of levels of understanding at different stages of the "grasping processes" by means of problem representations and of solving strategies. The topic is closely related to the use of word problems as diagnostic tools, the re-education of incorrect students' ideas and overcoming obstacles.

Throughout the whole history of mathematics teaching, mathematical problems serve mainly to carry information, to practise mathematics, to diagnose the level of acquiring mathematical skills, etc. One of the most important features of a problem is to see whether the pupil is able to use the mathematical knowledge they have in a non-familiar setting. Many mathematical problems have come from real life.

Characteristic features of a word problem are the use of words in the description of the problem and the fact that they refer to a real-life context (Kuřina, 1989), (Semadeni, 1995). In this paper, under the term *word problem in school mathematics* we refer to problems in which objects, phenomena and situations (with their diverse properties and relationships) from various non-mathematical domains occur (Odvárko et al., 1990). The most typical word problems in school mathematics are represented by a brief text description of a situation with not all quantities being explicitly given; the solver is required to give a numerical answer to a question using the information given in the text (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Examples: Word problem: Two daughters of Mr. Newman, Pauline and Mary, earned together 181 Czech crowns. The difference between their two salaries was 37 Czech crowns. How much did each daughter earn?

Verbally stated numerical problem (not considered as a word problem): Solve the quadratic equation $x^2 + 3x - 7 = 0$.

This definition of word problems corresponds to Polya's *problem to find* where unknowns, data and conditions are given at least partly in words. "The aim of a *problem to find* is to find (construct, produce, obtain, identify, …) a certain object, the *unknown* of the problem, satisfying the *conditions* of the problem which relate the unknown to the *data* of the problem" (Polya, 1962, p. 119).

Word problems have an important role mainly because most life situations are described in words. Word problems constitute one of the few school mathematics domains which require the mathematization of situations described in words and the transformation of a mathematical solution back to the context of the problem (Novotná, 2000). In (Blum & Niss, 1991) the following main arguments for including modelling and problem solving in mathematics instruction are given: Word problems provide suitable means for developing general competences and attitudes with students; enable students to draw their own conclusions from the presented information independently, to recognize, understand, analyse and access representative examples of actual uses of mathematics; develop the solver's ability to activate mathematics to extra-mathematical situations; establish with students a rich and comprehensive picture of mathematics in all its facets, as a science, as a field of activity in society and culture and motivate students and assist them in acquiring, learning and keeping mathematical concepts, notions, methods and results. Further functions are described in (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000): Word problems offer practice for situations in everyday life in which mathematics learners will need what they have learned in school; give students an idea about the importance of school mathematics when they grow up and move into the world; evaluate the intelligence or mathematical ability of solvers; train students to think creatively and/or to develop their heuristic skills and their problem-solving abilities and last but not least develop mathematical concept and skills.

Understanding*

Learning with understanding was already emphasised by J.A.Comenius (1631) in his *Didacta Magna*: *Nothing should be put into the pupils' memories, only that what*

* *To understand* = 1. to perceive the meaning of, 2. to learn, 3. to know the nature, character, … . *Understanding* = 1. comprehension, 2. the power to think and learn; intelligence, 3. a specific interpretation … . (Webster's New World Dictionary, 1982).

they can see and understand properly. Today understanding is an important didactical and psychological notion.

In this paper, to understand something means to “assimilate it into an appropriate schema” (Skemp, 1971). Understanding is “an individual process which is not accepted by all pupils at the same time” (Kuřina, 1995) and usually is not an “all-or-nothing state” (Skemp, 1971). In (Resnick & Ford, 1981) it is stated: “If understanding is established, solvers can reconstruct the forgotten items or even construct their own procedures for finding answers when memory fails”. Understanding is based on the student’s knowledge and at the same time “creates the basis for higher goals: applying knowledge, analysis, synthesis and evaluation” (Gavora, 1992).

Some authors, e.g. Zofia Krygowska, the Polish didactician, or Richard Skemp distinguish between *instrumental understanding* (the answer to the HOW-question) and *structural (relational) understanding* (the answer to the WHY-question). This approach was further developed in (Herscovics & Bergeron, 1983), where the following types of understanding and their characterisations are explained: *Instrumental understanding* is the ability to apply an appropriate remembered rule to the solution of a problem without knowing why the rule works. *Structural (relational) understanding* is the ability to deduce specific rules or procedures from more general mathematical relationships. *Intuitive understanding* is the ability to solve a problem without prior analysis of the problem. *Formal understanding* is the ability to connect mathematical symbolism and notation with relevant mathematical ideas and to combine these ideas into chains of logical reasoning. All these aspects are present when studying levels of understanding word problems (see Part II).

The level of understanding of a word problem structure is deeply influenced (in both positive as well as negative directions) by the representation and visualisation used (see Duval, 1999). Mathematical visualization is “the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding” (Zimmermann & Cunningham, 1991). “Word problems need some understanding of natural language and the ability to translate between different modes of representations: words, symbols, images” (Toom, 1999).

II. Our research

In this paper, I will concentrate on the following aspects: g*rasping word problem assignments, levels of its understanding* and *students' solution strategies and their relation to students' understanding of the solved word problems*. This is a part of a broader research project aimed at the following questions: What is going on between the posing of a word problem and the students' answer? What kinds of experience will help students to perform well on word problems? What sort of practice may help?

The following methodology was used in this research: Comparative analyses of textbooks and other materials for teachers, qualitative analyses of written tests, analyses of audio-recordings and protocols of individual interviews.*

In the research, the following families of word problems were used: *Word problems dealing with the division of a whole into parts* (originally used in the common research of N. Bednarz, B. Janvier, CIRADE, UQAM in Montreal and M Kubínová, J. Novotná – see e.g. (Kubínová et al., 1994)), w*ord problems dealing with "unpacking"* (Novotná, 1999).

1. Understanding of word problem assignment – grasping process

The first stage of the word problem solving process is to understand the information given in the text of its assignment. We will call this process the *grasping process*. In the process of grasping a word problem, the solver absorbs a variety of information.

We will analyse the grasping process as having five basic components:

a) *identifying separate pieces of information* during the reading of the problem,
b) *determining what the question was asking*,
c) *searching for an unifying view*,
d) *looking for and hopefully finding relationships* relevant to the solving process,
e) *getting an overall insight* (finding how all the pieces of information are mutually connected).

The grasping process is serial**. A solver usually reads the assignment (once or more times) and tries to record information (levels a) to d)). Level e) runs in parallel **

* The materials analysed are closely connected to the specific school environment of the Czech Republic.

** Serial grasping of assignment – one process is finished before a further one is started. Parallel grasping of assignment – two or more processes are performed at the same time (Eysenck, 1993).

to the first four. Less successful solvers may be unable to grasp a word problem as a whole and only cope with parts of it. Thus, they may confuse the relationships among different pieces of assigned information (see also Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999).

In our research, we look at the levels of a student's understanding of word problem assignment through three variables:

1. *reaching the grasping process components and its quality* (levels of understanding of the assignment are related to the successfully finished components of the grasping process; the components are not necessarily expressed in a student's solution in an explicit way, they may also be hidden in implicit steps);
2. *how many times the solver refers back to the assignment* (a scalar variable);
3. *the quality* of the grasping process* :
   - *grasping with understanding* if a particular stage of the grasping process results in understanding what was searched for,
   - *incomplete understanding* if the solver only grasps a part of the assigned information,
   - *prothetic grasping* if no understanding occurs in a particular stage of the grasping process.

Using the three components, the grasping process can be described by the table:

STAGE **NUMBER OF** **„RESTARTS“**	a)	b)	c)	d)	e)
1					
2					
3					
…					

* The terminology is related to the terminology used in (Hejný, 1995) where two types of grasping processes are distinguished: grasping with understanding and prothetic grasping.

To describe the quality of reaching the grasping process components we use the following labels:

X the grasping process component did not occur

Ui/Ue implicit/explicit grasping with understanding

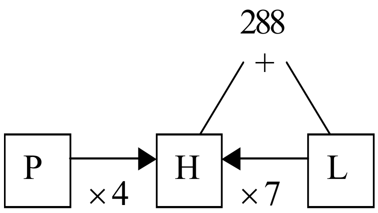
IC incomplete understanding

Pi/Pe implicit/explicit prothetic grasping

Examples

Word problem: A buffet sells three different dishes – pizzas, hamburgers and langoses*. In one day 288 dishes of hamburgers and langoses were sold altogether. Four times more pizzas than hamburgers and seven times more langoses than hamburgers were sold. How many dishes of each kind were sold?

The graphic record of relationships between the whole and parts:



Adam (boy, 14 years old)

STAGE **NUMBER OF „RESTARTS“**	a)	b)	c)	d)	e)
1	U**e**	U**e**	U**e**	U**e**	U**e**

Pizzi . . . x kusů | 9

Hamburgeri . . . 4x -"- | 36 36

Langoši . . . 7.4.x -"- | 252 252

Hamburgeri a langoši . . . 288 -"- | 288

$288 = 4x + 7.4x$

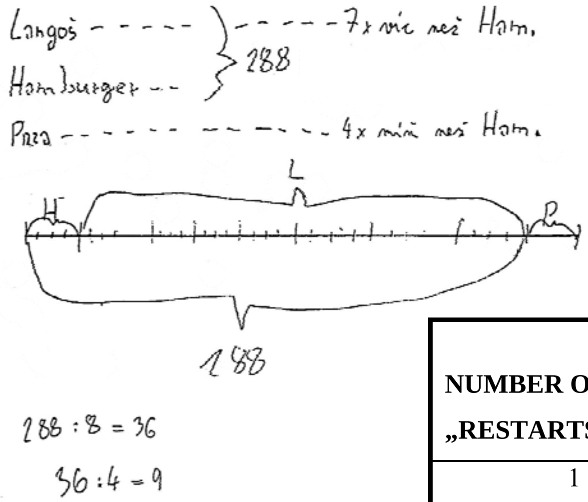
$288 = 32x \,/ : 32$

$9 = x$

Pizza bylo 9, hamburgerů bylo 36 a langoší 252 kusů.

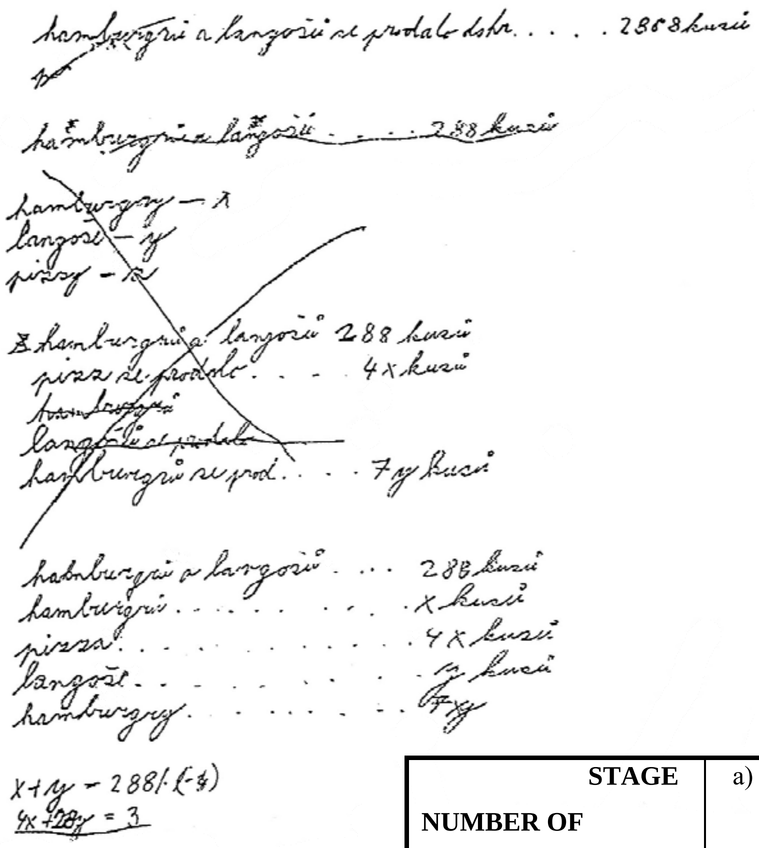
* Langos is the name of a meal of Hungarian origin which is often sold in fast-food shops.

Cyril (boy, 14 years old)



STAGE NUMBER OF „RESTARTS“	a)	b)	c)	d)	e)
1	U**e**	U**i**	U**e**	U**e**	X
2	U**e**	U**i**	U**e**	U**e**	U**e**

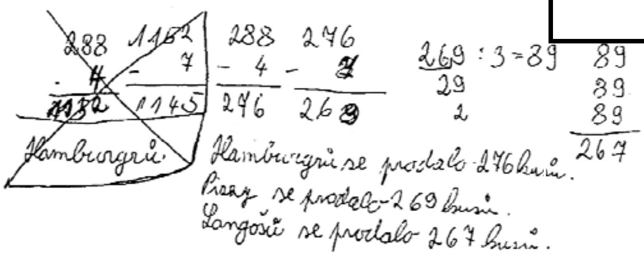
Emil (boy, 14 years old)



STAGE NUMBER OF „RESTARTS“	a)	b)	c)	d)	e)
1	IC	X	X	X	X
2	IC	X	X	X	X
3	U**e**	U**i**	X	IC	X
4	U**e**	U**i**	IC	U**e**	IC

Cilka (girl, 14 years old)

STAGE **NUMBER OF „RESTARTS“**	a)	b)	c)	d)	e)
1	**Pi**	Ui	Pi	**Pe**	X
2	Pi	**Ui**	**Pi**	**Pe**	**Pe**



2. *Students' solving strategies and their relation to students' understanding of the solved word problems*

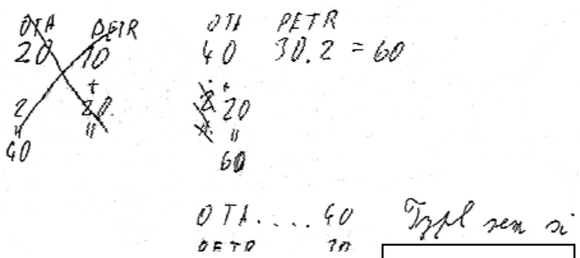
The level of the solver's understanding of the word problem structure strongly influences his/her solving strategy.

In this analysis, I will consider the following three items for the characterisation of the chosen solving strategy: (i) if the solution was found accidentally (by guessing) or after gaining an insight into the problem structure, (ii) if the solution was based on the identification of key words/word groups in the text or on the insight into the problem structure, (iii) how the use of symbolic algebraic description in the word problem assignment influences the grasping processes and/or the solving strategy.

(i) From guessing to systematic considerations (Novotná, 2000)

Trial-and-error strategy usually occurs when the solver is not able to grasp the problem structure properly and mathematize it; he/she tries to guess the solution either accidentally or with some attention paid to the data and conditions in the assignment.

Hynek (boy, 12 years old) solved the following word problem: Ota and Pavel each had some money but Ota had 10 CZK more than Pavel. Pavel managed to double his amount of money and Ota got 20 CZK more.



I ' guessed.'

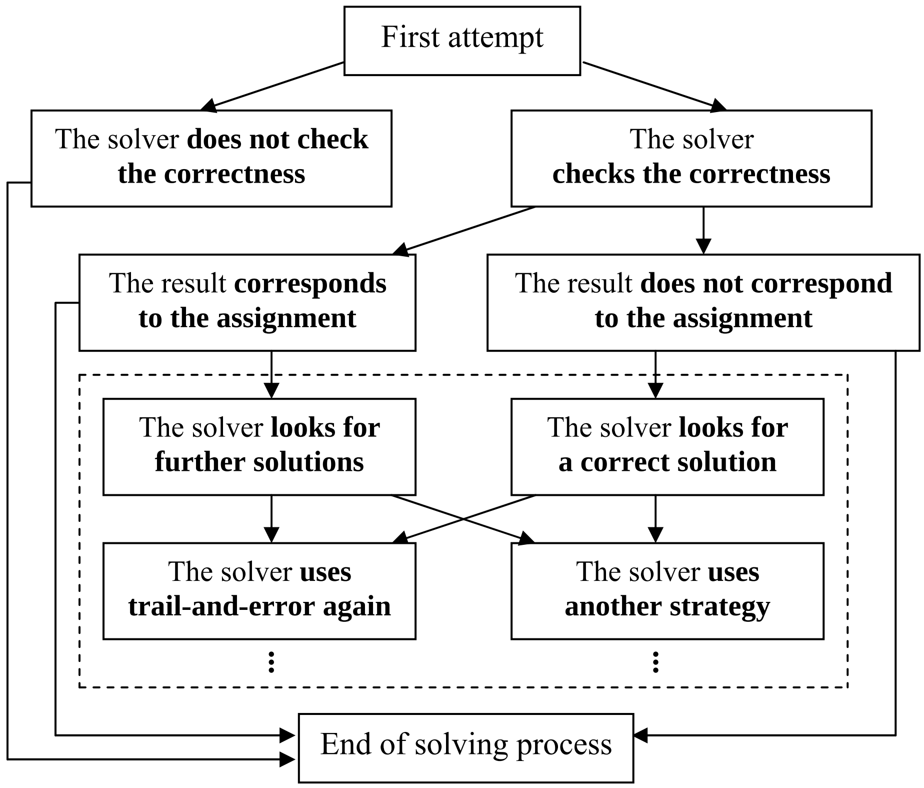
When this strategy is used at the beginning of the solving process, the solver can work with various levels of understanding (see Fig. 1):

a) The solver takes the "result" of his/her guess as the result, does not check its coherence with the assigned conditions and does not search for another solution.*

b) The solver checks the correctness of his/her results. He/she finds that the results correspond to the conditions in the assignment. He/she labels the solution as correct. Two situations can occur: b1) The solver does not try to find further solutions. b2) The solver tries to find whether the problem has also another solution or whether his/her solution is the only solution to the problem. The new use of trial-and-error can occur again, but in most cases, the solver has already acquired a better insight into the problem and his/her considerations are not accidental any more.

c) The solver checks the correctness of his/her results. He/she finds that the results do not correspond to the conditions in the assignment, that the solution is incorrect. Two situations can occur: c1) The solver does not try to find a solution and ends the solving process. c2) The solver tries to find a correct solution. He/she decides either to use trial-and-error again without any regard to the relationships in the assignment, or, using previous experience, chooses a new strategy.

Fig. 1. *The scheme of the solving process when trial-and-error is used at the beginning*



* In the case of a correct result, it is nearly impossible to decide about the solver's understanding/non-understanding of the problem structure without an immediate interview.

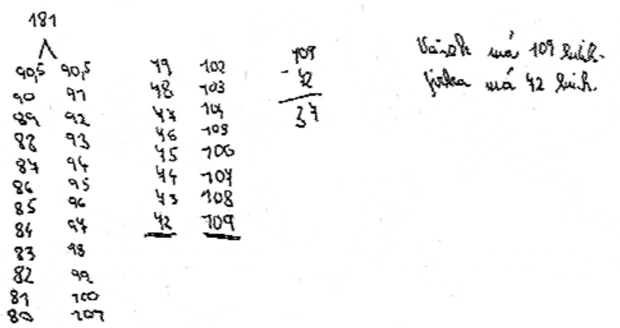
The scheme represents the first phase of the solving process when trial-and-error is used. The phases b) and c) are only recorded as simple blocks. The whole process can be much more complicated, the order of individual steps can vary.

The use of trial-and-error is often considered by teachers as inappropriate because it supports the solver's feeling that to find the solution, it is sufficient to "be lucky" but on the other hand, it does not support the development of the solver's strategic thinking. These objections are true only when the solver uses trial-and-error without taking into account any assigned relationships. When he/she is aware of them and checks his/her results, the use of trial-and-error can be useful.

When the solver gradually specifies his/her considerations, we do not speak about trial-and-error but we use the term ***systematic trial.*** Various levels of understanding the problem structure can be involved in this strategy.

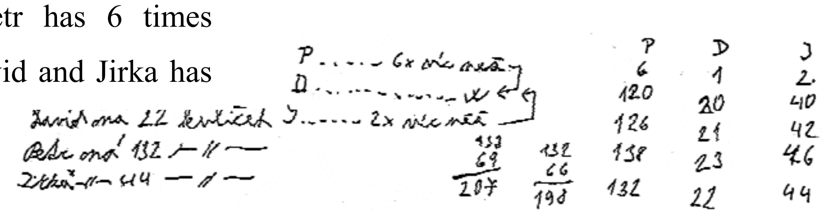
- When starting the solving process, the solver does not understand the problem structure entirely. He/she gradually deepens his/her understanding of the problem structure during the process.

Jarda (boy, 12 years old) solved the following word problem: The total number of books which Mr. Polák's sons, Jirka and Vašek, had was 181 books. Vašek had 37 books more than Jirka. How many books did each son



- When starting systematic trial, the solver already understands the problem structure entirely. We also can regard it as a manifestation of pre-numerical thinking.

Hana (girl, 11 years old) solved the following word problem: Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles altogether. Petr has 6 times more marbles than David and Jirka has



(ii) From the use of key words to understanding of the problem structure

Let us analyse three students' solutions as representatives of three typical strategies:

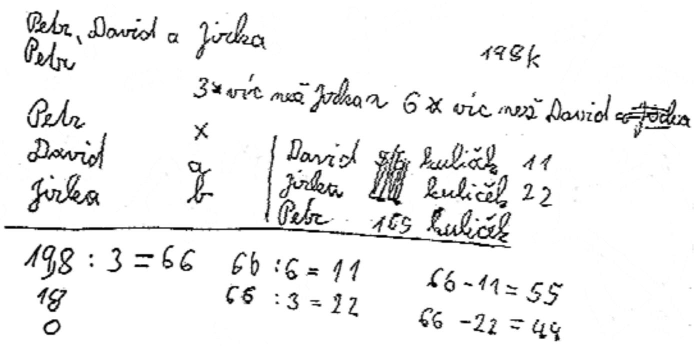
1. Gregor (boy, 15 years old) solved the following word problem:

Five teams participate in a tournament. Each team plays with each of the other teams. How many matches will be played? 5!=5 x 4 x 3 x 2 x 1=20 x 6=120 matches

We call this strategy "*searching in the memory*" (Hejný, 1995). Gregor was not able to visualise the problem. He identified that the assignment contained one number (5) only and recognized the problem as part of combinatorics. He recalled the topic in his long-term memory and because the problem contains one number only, he used the formula for permutations. Without any further effort to grasp the problem structure, he used this formula to solve the problem.

2. Filip (boy, 12 years old) solved the following word problem:

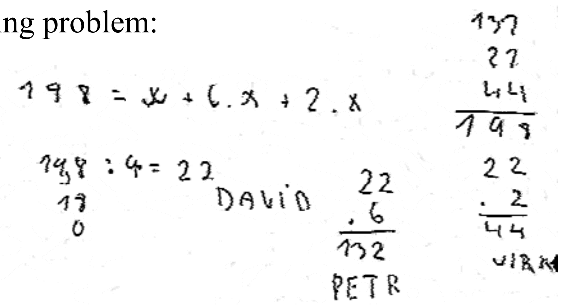
Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles altogether. Petr has 6 times more marbles than David and 3 times more marbles than Jirka. How many marbles has each boy got?



In (Novotná, 2000) we call this strategy "*textation*". Filip discovered some partial relationships in the assignment but did not get an overall insight into the problem structure. To solve the problem, he used the pieces of information he grasped: (i) There are 3 boys and we are trying to find parts – we have to divide by 3. (ii) He discovered the key words "3 times more" and "6 times more" - he divided by 3 and by 6. (It is not clear to us why he subtracted at the end.)

3. Jana (girl, 12 years old) solved the following problem:

Petr, David and Jirka play marbles. They have 198 marbles altogether. Petr has 6 times more marbles than David and Jirka has 2 times more marbles



In Jana's solution, the *global understanding of the problem structure* occurred.

(iii) The influence of symbolic algebraic description in the word problem assignment on the grasping processes and/or the solving strategy

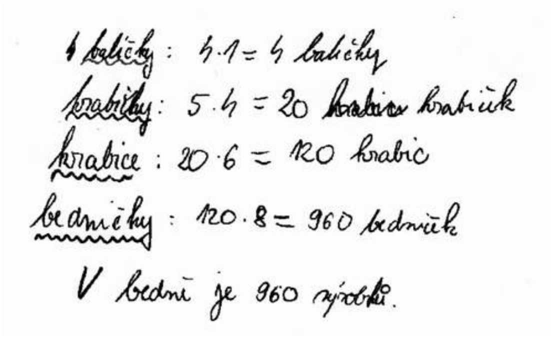
Before we explore this item, we will briefly consider the background – how algebra in the Czech schools is gradually presented. In the Czech mathematics textbooks, it has always been taken into consideration that the introduction of the unknown/variable is should be gradual and long-term. Students gradually discover that mathematical symbolic language "translates all spoken languages into one written language which is recognizable in any country …" (Hejný & Littler). Algebra is systematically introduced from the 7th grade, i.e. 13-year-old students.

In our research, we studied differences between arithmetical and algebraic thought in the individual in the environment of the following word problem:

A packing case full of ceramic vases was delivered to a shop. In the case there were 8 boxes, each of the boxes contained 6 smaller boxes with 5 presentation packs in each of the smaller boxes, each presentation pack contained 4 parcels and in each parcel there were *v* vases. How many vases were there altogether in the packing case?

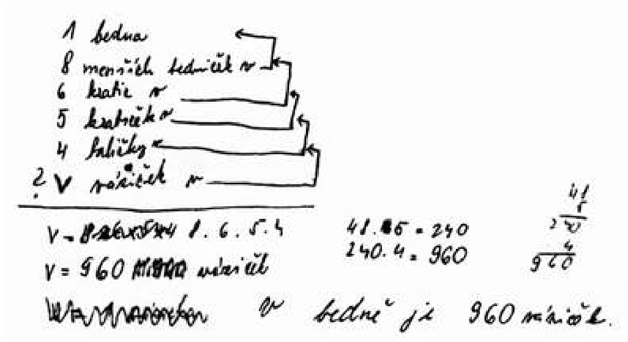
The problem was given to students from grade 7 at the beginning of the introduction of algebra. We analysed the levels of understanding of the word problem structure in the case of the transition from a pure arithmetical assignment to the assignment where the language of algebra is used. We diagnosed four levels of understanding the problem structure:

Level 1: The solver ignores data which are not assigned as concrete numbers. At this level, the solver does not see the letters as representing amounts that need to be taken into account. His/her previous experience with work with letters is forgotten in the environment of the word problem, it is only superficial knowledge based on the key words or the layout of the problem. The ability to work with algebraic representations is not developed.

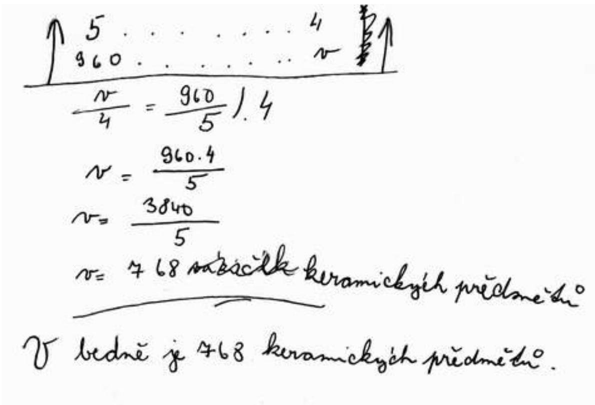


Level 2: The solver is aware of the fact that he/she is asked to work with letters but he/she is not able to understand the meaning of the symbols in the given context. When working with letters, he/she tries to use his/her previous experience in a "technical" way.

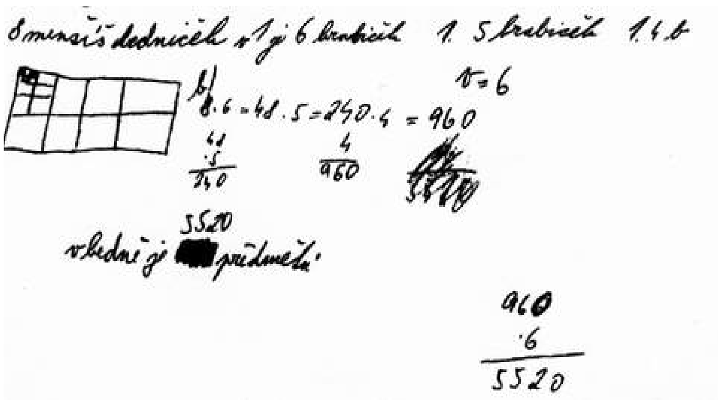
• In most school mathematics situations, letters are only used as labels for something that is to be found by calculations. The amount *v* is taken as an unknown.



• Sometimes more than one experience is recalled and the solver can combine several. In the following solution, the solver recalled his previous experience with labelling unknowns by letters and combined it with the rule of three. The use of the number 960 indicates that he was aware of the multiplicative structure of the assignment but he was not able to grasp the meaning of the letter *v*.



Level 3: The solver is aware of the nature of data assigned as letters but the symbolic algebraic description of the situation is not yet fixed in his/her knowledge structure. He/she substitutes a concrete number for *v* and thus changes the problem into a pure arithmetical one.



Level 4: The solver is able to work successfully with data assigned in both arithmetical and algebraic languages. The understanding of the problem structure does not depend on the nature of the assigned data. The conditions for the successful use of algebraic methods have already been created. At this level, an “abstract lift” occurred in the solver's knowledge structure.

III. Concluding notes

In (Gray et al., 1999) it is stated that "the different ways in which individuals process information at a given time can be either beneficial or severely compromising for their current and future development". De Corte (2000) mentions that "The teacher's task is to enable the students develop their individually different process of knowledge building and meaning construction as well as positive attitudes".

Lack of understanding in mathematics is one of the main causes of many problems that students have. The results of the research on word problem understanding presented in the paper help to diagnose the obstacles that solvers face when trying to solve word problems. Without having a deep insight into the cognitive processes during the process of solving word problems, the re-education of incorrect students' ideas and overcoming obstacles is not possible. The methodological tools for identifying students' levels of understanding of word problems presented in the paper are beneficial for both teachers as well as students. The teacher often has difficulties in finding the way to help students to overcome obstacles when dealing with word problems. He/she often faces the following questions: How to recognise the part of the problem that the student does not understand? What question or sentence could work as a good hint for the student to enable them to overcome the obstacle? When we know more about how understanding increases during the stages of the solution process, we may be able suggest ways how to minimize possible learning difficulties and barriers that students have and to prepare more effective instructional programmes for word problems.

References

Blum, W. – Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22.

Comenius, J.A. (1631). Didacta Magna.

De Corte, E. (2000). Marrying theory building and the improvement of school practice: a permanent challenge for instructional psychology. Learning and Instruction, 10, pp. 249-266.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization. Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning. In: *Proceedings of the PME – NA*.

Eysenck, M.W. (1993). Principles of Cognitive Psychology. Hove, Lawrence Erlbaum Assoc.

Gavora, P. (1992). Student and Text. Bratislava, SPN. (In Slovak.)

Gray, E. – Pinto, M. – Pitta, D. – Tall, D. 1999. Knowledge construction and diverging

thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*.
Hejný, M. (1995). Grasping of word problems. *Pedagogika*, 4, 1995. (In Czech.)
Hejný, M. & Littler G.H. Protoalgebra. To be published.
Herscovics, N. – Bergeron, J.C. (1983). Models of Understanding. *ZDM*, 2.
Kubínová, M. - Novotná, J. - Bednarz, N. - Janvier, B. - Totohasina, A. (1994). Strategies Used by Students when Solving Word Problems. *Publications DMME*, 9, Praha.
Kuřina, F. (1989). The Art to See in Mathematics. Praha, SPN. (In Czech.)
Kuřina, F. (1995). Understanding – the Problem of School Practice. *ADUC Mathematics*, 4.
Novotná, J. (1999). Do students of the 3rd to 6th grades use the everyday life schemes when solving word problems? In M. Hejný & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of SEMT 99* (pp. 27-33). Praha, Faculty of Education, Charles University.
Novotná, J. (2000) Analysis of Word Problem Solutions. Praha, Charles University (In Czech.)
Odvárko, O. et al. (1990). Methods of solving mathematical problems. Praha, SPN. (In Czech.)
Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. John Wiley & Sons.
Resnick, L.B. - Ford, W.W. (1981). The Psychology of Mathematics for Instruction. Lawrence Erlbaum Assoc.
Riley, M. - Greeno, J.G. - Heller, J.I. (1983). Development of Children's Ability in Arithmetic. In Ginsburg, H.P. (Ed.) The Development of Mathematical Thinking. Academic Press, Inc.
Semadeni, Z. (1995). Developing children's understanding of verbal arithmetical problems. In M. Hejný & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the SEMT 95* (pp. 27-33). Praha, Faculty of Education, Charles University.
Skemp, R. (1971). The Psychology of Learning Mathematics. Penguin Books, England.
Toom, A. (1999). Word Problems: Applications or Mental Manipulatives. *For the learning of Mathematics* 19, 1.
Verschaffel, L. - Greer, B. – De Corte, E. (2000). Making Sense of Word Problems. Sweets & Zeitlinger Publ.
Webster's New World Dictionary (1982). Warner Books, New York.
Zimmermann, W, - Cunningham, S. (1991). Visualisation in Teaching and Learning Mathematics. *MAA*, p.3.

Acknowledgments: The research was supported by the projects GACR No. 406/99/1696, GAUK No. 306/1998/A, Research Project Cultivation of Mathematical Thinking and Education in European Culture. Thanks to my colleague Marie Kubínová who participated in the research presented in this lecture, PhD students of Didactics of Mathematics at Charles University, Faculty of Education, for their help to gather experimental data and students of Czech schools for the lasting inspiration for my research.

Annexe 5

Nesher P., Hershkovitz S., Novotná J. (2003). SITUATION MODEL, TEXT BASE AND WHAT ELSE? FACTORS AFFECTING PROBLEM SOLVING. Accepté pour *Educational Studies in Mathematics*.

Abstract

The main concern of the article are cognitive factors affecting problem solving. Variations on a complex comparative situation are analyzed with an attempt to find out what affects the solvers' strategy.
The factors studied are: The structure of "reference and the compared" (a "2 to 1", "1 to 2", or "2 to 2" relation; The verbal use of "more" or "Iess"; The Scheme type (S-P, H, or S-W).

On the basis of the theoretical analysis of the above factors we suggest a new construct “Complexity" that indicates theoretically the needed steps to move from the “verbal text" named of the problem to the algebraic notation of its optional solutions. We have realized that there are several options of how to solve the problems in algebraic terms, but some of them are simpler from the formal point of view. We also learn that choosing the most efficient independent variable is obtained if it is the variable that is the connector in the complex relevant scheme.

We then score the research problems in terms of "complexity levels". The "complexity levels” are a formal description of the number of mental manipulations one has to execute in order to write his own formal solution.

In an empirical study consisting of 104 teachers and 132 15-year-old students, we measure the solvers' strategies. We measure in particular their selection of the independent variable. We then discuss it in terms of complexity levels, and the preference of manipulating texts with the term "more", rather than "Iess".

Our findings are that, even conscienceless the subjects prefer in most cases the solution that its route is minima!. There are, however some exceptions in cases in which the preference is transforming to use the smallest amount of marbles as the independent variable, as well as “less" to "more" in spite of the high complexity of the solution.

Key Words: Two-step word problems, multiplicative comparison, comparison relation, scheme, text-base, complexity, reference, more - less.

Acknowledgement: The research was partially supported by the Grant Agency of the Czech Republic, grant No 406/02/0829

Contents:

Situation Model, Text Base and What Else?
Factors Affecting Problem Solving

Introduction

Solving word problems in mathematics often means deducing new information (mostly quantitative) from the given data. The known information can be collected by the solver, or provided him through various means: verbally, graphically, or in any other form. We would like to begin this study one step earlier. To describe the real world situation the solver has to select those aspects of the situation that she is focused on, and decide what objects are to be explicitly mentioned. In the case of word problems, this initiates the formulation of the problem text.

For example, imagine a world consisting of 198 marbles distributed in the following manner: David has 22 marbles, Jirka 44, and Peter 132.
What questions can be asked about this situation?
The above situation can generate, among others, the following word problem:
A1: *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more marbles than David, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*
It means that the relation between Peter and David, and between Jirka and David in terms of comparison, as well as the total sum are given, however, the relation between Peter and Jirka is not mentioned at all, nor are the quantities that any one of them has. Moreover, the verbal description has already taken a further step as to who will be the referent in a given relation (in this case – David), and who will be compared to him (Peter and Jirka), which will determine the lexical choice of the word "more" instead of "less". We could of course describe David as having less than Jirka or Peter and then obtain another formulation of the same situation:
B1. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. David has 6 times less marbles than Peter, and he has 2 times less marbles than Jirka. How many does each boy have?*

The purpose of our study is to discover the cognitive process by which the solver moves from the given description - the text of the problem - to the choice of the mathematical model, and what factors affect this choice.

Moving from the given text to an equation is a process that can involve en route several direct and indirect transformations. This route depends both on the surface structure of the text and the underlying mathematical schemes. We devised a measurement of complexity for this route, to be measured by the actual transition made by each student from the given text to the produced formal language of algebra.

We start with presenting the theoretical background, continue with analyzing the construct "complexity levels", then present the empirical findings and finish with an attempt to describe the complexity level by two basic cognitive factors: the underlying mathematical schemes (Nesher and Hershkovitz 1994), and the linguistic surface structure.

A. Theoretical Background

The term "problem solving" is a vague notion, a kind of umbrella under which different theoretical approaches take place. It is therefore necessary to specify explicitly at the very outset, what approach was employed in the work described below.

Mathematicians agree that problem solving occurs in cases where there is no clear algorithm to be performed. Acknowledging that solving a genuine problem is not just a matter of following a given algorithm, first Polya and then Schoenfeld suggested general strategies for solving word problems, asking questions such as:

a) What is the unknown? What are the data? What are the conditions?

b) Do you know a related problem that was solved previously?

c) Prepare a plan for the solution and,

d) Examine the solution obtained.

(Polya 1945, 2nd Edition 1973)

Alongside the general strategies Polya presented some mental operations typically useful for solving problems, such as: using analogies, decomposing the problem and recombining its elements in a different manner, generalization, induction, specialization and working backwards.

In essence, these strategies have captured what is now known as the expert's knowledge. Whether it is teachable, remained an open question. Our failure in teaching word problems is evidence that passing on the expert's knowledge to a novice is no simple matter.

Cognitive psychologists who tried to understand human cognitive performance via problem solving took quite a different approach. Most dramatic progress in this paradigm was achieved in recent years by approaching problem solving from two different angles.

The first was the linguistic approach. Within it various constructs were proposed to account for understanding problem solving. Notable are the works by Kintsch (1986) who introduced notions such as: “text base” and “situation model” or Nesher’s (Nesher & Teubal, 1975) notions on the “deep and surface structures in arithmetic” and a “semantic analysis” of arithmetic word problems (Nesher and Katriel 1977; Kintsch and van Dijk 1978; Nesher, Greeno et al. 1982b; Nesher 1998). Yet these works raised more questions than they answered.

The “text base” as suggested by Kintsch is dealt with its propositional form, and not with its surface structure phrasing. This leaves out the first interpretation of the given text. It may be that the crux of solving a word problem lies in the stage of interpretation that is omitted in Kintsch’s theoretical model. Next in line is the vagueness of the “situation model” concept in Kintsch’s model. As demonstrated in the next section, this term is also not fully defined. What do we mean by “situation model”? Do we mean an untreated world before describing it verbally, or, is it an imaginary world constructed by the reader by comprehending a given text? Our point here is that by the very virtue of describing a situation verbally we already focus on some objects and relations (as mentioned in the introduction).

A second cognitive approach, not always separate from the first, emphasized as its point of departure the schematic analysis of arithmetic problems (Greeno 1978); (Fischbein 1999; Hall, Kibler, Wenger & Truxaw 1989). Those who adopted the schematic approach were influenced by notions such as “frames”, “structures”, “analogies” emerging from the information processing research (Rumelhart 1980; Thompson 1985), or schemes within the constructivist approach (Reusser 1992; Vergnaud 1988). Their theoretical enterprise assisted in categorizing word problems in arithmetic and algebra.

Several categorizations are now well established and employed in the educational setting. For example, categorizations of additive problems into “combine”, “change” and “compare” (Carpenter, Moser et al. 1982; De Corte and Verschaffel 1981; De Corte 1985; Nesher et al. 1982;); categorization of multiplicative problems into “ratio” or “rate”, “mapping rule”, “Cartesian multiplication” or “multiplicative comparison” (Greer 1994; Vergnaud 1983; Nesher 1988) and the categorization of static and dynamic rate problems in algebra (Hall et al. 1989; Yerushalmy and Gilead 1997). The gist of these categorizations lies in offering a parsimonious schematic approach that constricts the wealth of situations appearing as new on each occasion.

The categorizations mentioned above explain only in part the processes involved in solving word problems. (De Corte 1987; Kintsch et al. 1975; Kintsch 1986; Nesher et al. 1982; Reusser 1992). Some studies have established the levels of difficulty of these problem categories. However, only a few studies gave a full account of the entire process starting from reading a text given in natural language, and ending with the mathematical model that solves it. Kintsch, as already mentioned, started from a “text base” not from its surface structure (Kintsch 1986). Nesher and Katriel offered a semantic analysis of additive problems, and dealt with the relation between the surface formulation and the underlying propositional and logical structure of a text, under mathematical constraints (Nesher and Katriel 1977). Their studies did not combine it with the schemes suggested by Greeno and Kintsch. Hershkovitz (Nesher & Hershkovitz 1994) in her study of more complex problems, suggested a schematic structure for two-step problems, yet did not connect it to linguistic analysis (Hershkovitz & Nesher 1996, 1999).

The accumulated quantity of variables within the various problem-solving research paradigms do not as yet form a complete theory. It remains unclear what factors affecting the solution path were adopted by the solver.

The study described herein is an attempt to analyze one problem from multiple aspects: its linguistic surface structure; its underlying scheme; and the mathematical model selected by the solvers in their attempts to solve it. We hope that the empirical evidence will shed light on additional cognitive aspects involved in problem solving.

B. The Situation Addressed in the Study and Possible Word Problems

The situation to which we refer is that mentioned in the introduction, where *Peter, David and Jirka together have 198 marbles. Of these, David has 22 marbles, Jirka has 44 marbles and Peter has 132 marbles.* This situation is traditionally used as a basis for several algebra problems. Novotna, for example, used it in three verbal forms and studied how six graders solve them. The forms used by Novotna* (Novotna 1997; Schmidt & Bednarz 1997; Bednarz 2001):

A**1.** *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 63 times more marbles than David, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

A2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 3 times more than Jirka, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

A3. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more than David, and 3 times more than Jirka. How many marbles does each boy have?*

The above problems differ in terms of their surface and underlying structure. All the above problems are of the type known as "multiplicative compare" problems. All use the word "more" for describing the underlying relation which is a comparison relation.

This asymmetrical compare relation when described linguistically assigns accordingly the roles of the subject and the predicate. In our case, the compared quantity will serve as the subject in the sentence, and the reference will be part of the predicate. Thus, describing a given situation can take on different surface structure descriptions (See Appendix A for other possible descriptions of the same situation). The problems differ in some important aspects. The reference structure made in the texts can be described as follows: In problem A1 Peter and Jirka both are compared to David. Thus two quantities and one reference (we will mark it in short: "2 to 1"). In problem A2 one quantity is compared to the second, and the second is compared to the third. The structure is of two compared and two references (we will mark it "2 to 2"). In problem A3 one quantity is compared to the other two quantities, thus having one compared quantity and two references (in short: "1 to 2"). The above distinction as appears in all research problems can be found in Table I, column 1 and 2). However the set of problems differ also in respect to schemes that underlie them (Table I, column 4).

* This paper is based on the work Novotna started with Prof. Bednarz and Prof. Janvier at CIRADE and UQAM at Montreal.

Table I: An Analysis of the Problem Set

	1	2	3	4	5
No.	**Given Connections**	**Reference Structure**	**Order of Description**	**The Scheme**	**Lexical Expressions**
A1	$P \leftarrow D$, $D \rightarrow J$	2 to 1	P = f(D) J = g(D)	S-P	more
A2	$P \leftarrow J \leftarrow D$	2 to 2	P = f(J) J = g(D)	H	more
A3	$P \leftarrow D$, $J \rightarrow P$	1 to 2	P = f(D) P = g(J)	S-W	more
B1	$P \rightarrow D$, $J \rightarrow D$	1 to 2	D = f(P) D = g(J)	S-P	less
B2	$P \rightarrow J \rightarrow D$	2 to 2	D = f(J) J = g(P)	H	less
B3	$P \rightarrow D$, $P \rightarrow J$	2 to 1	D = f(P) J = g(P)	S-W	less
C1	$P \leftarrow D$, $J \rightarrow D$	2 to 2	P = f(D) D = g(J)	S-P	more-less
C2	$P \leftarrow J \rightarrow D$	2 to 1	P = f(J) D = g(J)	H	more-less
C3	$P \rightarrow D$, $J \rightarrow P$	2 to 2	D = f(P) P = g(J)	S-W	more-less
E1	$P \rightarrow D$, $D \rightarrow J$	2 to 2	J = f(D) D = g(P)	S-P	less-more
E2	$P \rightarrow J \leftarrow D$	1 to 2	J = f(P) J = g(D)	H	less-more
E3	$P \leftarrow D$, $P \rightarrow J$	2 to 2	J = f(P) P = g(D)	S-W	less-more

C. The underlying scheme

We use the term "scheme" in accordance with Fischbein's definition, stating that:

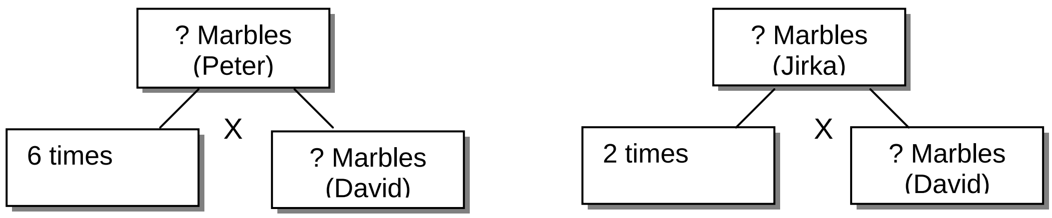
> *"The term Schema indicates a kind of condensed, simplified representation of a class of objects or events" (p. 36) (Fischbein 1999).*

In earlier studies (Hershkovitz and Nesher 1996; (Nesher and Hershkovitz 1994) we have demonstrated the role of schemes in explaining the solving two-step word problems. According to the scheme approach each problem in our study consists of a description of two comparison relations. For example:

A1: *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more marbles than David, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

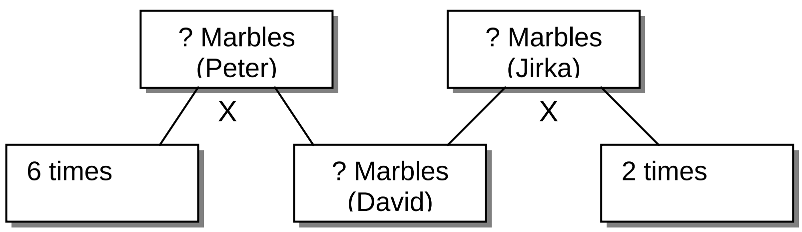
In this case the two relations can be described in two separate schemes, as in Fig. 1 below:

Figure 1: The Two Separate Three-Argument Relations



The two separate schemes are connected by David, creating the following compound scheme*. See Fig 2 below:

Figure 2: The Compound Scheme for Problem A1



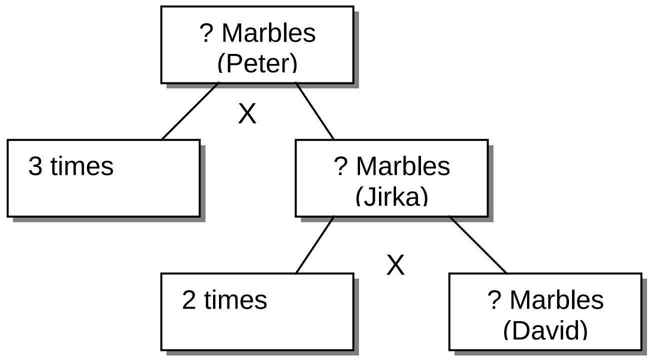
The compound scheme represents simultaneously which relations are mentioned in the

* We will not mention in our analysis the information shared by all problems, i.e. that the total of marbles is 198.

text, as well as how the two relations are connected.

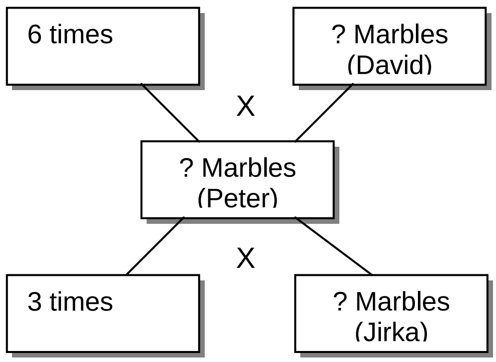
In Problem A2, however, the compound scheme is built around Jirka and as such it is as presented in Fig 3 below:

Figure 3: The Compound Scheme for Problem A2



In Fig. 4 we can see a third compound scheme describing problem A3. Here the connection is built around Peter:

Figure 4: The Compound Scheme for Problem A3



In principle (Nesher and Hershkovitz 1994), there are only three ways of combining two relationships:

1. Hierarchical (H) (As in Problem A2)
2. Shared parts, (SP) (As in Problem A1) and,
3. Shared whole (SW) (As in Problem A3).

Each of the three compound schemes (H, SP, SW) above will appear wherever the same non-ordered relations exist:

I. The problems describing relations connected by David, which is the Shared-Part Scheme, are A1**,** B1, C1, E1. (Fig. 2)

II. The problems describing relations connected by Jirka, which is the Hierarchical Scheme, are A2**,** B2, C2, E2 (See Fig. 3).

III. The problem describing relations connected by Peter, which is the Shared-Whole Scheme, are A3, B3, C3, E3 (See Fig. 4).

Focusing on the schemes will help to understand the "complexity level". Choosing the connection point between the two elementary schemes as the independent variable of an equation (for a certain problem) avoids the use of compound function. Choosing any other argument as the independent variable will require additional elaboration, thus leading to a higher level of complexity. This is due to the fact that the schemes are capturing the underlying (deep) structure of the described relationships. Yet they do not capture the surface structure of the variety of the problems.

D. Between the Text and its Formal Notation

The text is presented to the students in natural language, in which the syntactic constraints are given: the compared quantity appears as the subject of the sentence, and the reference is part of the predicate. However, the student's role is to write a formal notation that will lead her to the mathematical solution. In mathematical language, the 'compared' and the 'reference' take the form of 'dependent' and 'independent' variables (respectively).

In analyzing the text from an expert's point of view it should be kept in mind that the given 'compared' and 'reference' in the text of the problem, does not require the solver reading the text to make a direct translation to the same dependent and independent variables in her formal writings.

The cognitive variables that affect the choice of the 'independent variable' (the X of the equation) by the solvers is the target of our empirical study. We suggest an expert's theoretical model for the given problem texts. It is not necessarily so that the solver is aware of this kind of analysis. Yet, tracing the solvers intuitive choice of the independent variable in their formal writing discloses their tacit knowledge. We will weigh the solvers choices as appear in the empirical study against our theoretical analysis.

There is no one to one mapping between the given text and its solution. As any expert notes, there are several options as how to present an equation for a given problem.

Our claim is that the choice of the independent variable is based not only on the subject-predicate distinction but also on additional considerations, such as: the priority of "more" over "less", the simplicity of the mathematical expression. For example, choosing the smallest quantity (i.e. David's quantity pf marbles, in our case) yields a simple equation with whole numbers, while choosing the largest quantity (i.e. Peter) requires using fractions in the equation.

We will use a shorthand notation for the surface structure of the natural language text. We will describe the two comparisons given in each problem by two ordered functions f(x) and g(x): f(x) describes the first relation mentioned in the text and g(x) the second relation, retaining the order of the text. P, J, and D will serve as the arguments of these functions, for the amount of marbles of Peter, Jirka and David, respectively. (See Table I, Column 3.) For example, Problem A1 states:

A1: *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more marbles than David, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

This is then formulated as follows (ignoring the two opening sentences, which are the same for all problems):

P=f(D)

J=g(D)

The full text states:

D + f(D) + g(D) = 198

This notation will serve us when we describe the solvers' solutions.

E. Possible Strategies: an Analysis

As said before, despite the syntactic structure of the text, the text is neutral in regard to the equation that the solver will choose and there are real options of selecting an independent variable which then dictates the form of the equation. In order to better understand the alternative options let us examine Problem A2 as a detailed example: We will present three options and they exhaust all the theoretical possibilities from an expert poin of view.

A2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 3 times more than Jirka, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

The first comparison relation mentioned in the text states: "*Peter has 3 times more than*

Jirka", In short P=**f**(J). The second relation in the text is: "*Jirka has 2 times more than David"*. In short: J=**g**(D).

Option 1: In selecting the equations for solving this problem one could choose David for the independent variable and write:

The amount of marbles that David has (in short: 'David') is X.

The amount of marbles that Jirka has 2X, and,

The amount of marbles that Peter is 3(2X) = 6X. The last one involves an intermediate calculation to describe Peter's marbles in terms of David's. This was not explicitely mentioned in the text. One has to rely on Jirka's relation to David, thus employing a compound function. The final equation will be:

$$X + 2X + 6X = 198$$

In general terms: if D is the independent variable, the equation type is:

$$D + \mathbf{g}(D) + \mathbf{f}(\mathbf{g}(D)) = N$$

Option 2: For the **same** problem one could select the amount of marbles that Jirka has to be the independent variable, thus:

Jirka is X

Peter is 3X

David is ½ X. ($D = \mathbf{g}^{-1}(j)$)

Note that we have marked the second function **g** with a $^{-1}$, because it is not the direct function given in the text. The text states "*Jirka has 2 times more than David", and* what was written formally was the translation of "*David has two times less than Jirka".*

The equation in this case will be:

$$X + 3X + ½\,X = 198, \text{ and}$$

the general form of the choice of Jirka as an independent variable in the equation will be:

$$J + \mathbf{g}^{-1}(J) + \mathbf{f}\,(J) = N$$

In this case the equation will include rational numbers, making it more complicated for some solvers.

Option 3: If Peter is selected to be the independent variable, the equation will be:

$$X + 1/3\,X + 1/6\,X = 198$$

And in general terms:

$$P + \mathbf{f}^{-1}(P) + \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{f}^{-1}(P)) = N$$

Each solver in our study solved of course the problems with only one of the options, and the difference between the given text and the option selected by the solver will serve us in analyzing the findings.

F. Complexity Levels

We will now introduce an intermediate variable named "the complexity level of the solution" which describes the number of transformations that need to be made in the text for writing a certain equation with a certain independent variable. Presenting a mathematical expression in terms of an equation with **one variable** means having the situation described by one reference with all the rest dependent on it. Not all problems are presented in this format. In such cases, in order to write an equation with one variable one should go through transformations.

There are many ways to deal with a complexity of a problem. The only sense of complexity that we have dealt with is the one that describes the mental transformations that one has to pass in moving from the written text to the formal notation. We made a theoretical analysis of complexity to which the actual evidence of solvers solutions will be compared.

Before presenting our way of scoring the complexity of a problem, we admit that of the scoring is arbitrary. It is for us a first approximation to the idea of one text being more complex than the other. We suggest to score these transformations as follows: Each direct function (one that does not require a mental transformation) is counted as a single complexity score since it is a direct step from the given text to its algebraic notation. For example: If the text says like in problem A1: "Peter has 6 times more marbles than David, and it is written formally n(P) = 6 x n(D), this is a direct translation, that will be scored 1. If for example the same text will be written as n(D) = 1/6 n(P), it is an inverse relation, since the subject of the text was Peter and not David, and it consists of two mental steps and we will score it 2. When we deal with a compound function (f(g(x000 as in the detailed example of the first option of problem A2 no relation between the marbles of Peter and David was mentioned in the text, but the solver makes such a connection in his formal writing, thus she arrives at the relation of Peter's marbles and David's marbles through the mentioned relation of Peter's and Jirka's marbles.

Therefore it will be counted as two scores. The level of complexity of an equation is defined as the sum of all the scores. For example, in the problem above (A2) selecting David as the X of the equation results in a complexity level of 4 (See Table II), selecting Jirka, in a complexity level of 3; and in selecting Peter, we arrive at a complexity level of 8. Again this comprises the entire domain of theoretically possible strategies for solving Problem A2. Each solver might select one of them.

Table II presents all possible levels of complexity in our study and their scores.

Table II: Possible Complexity Levels

Possible Transformations	Level of Complexity
$f(x) + g(x)$	2
$f^{-1}(x) + g(x)$	3
$f(x) + g(f(x))$ $f^{-1}(x) + g^{-1}(x)$	4
$f(x) + g^{-1}(f(x))$ $F^{-1}(x) + g(f^{-1}(x))$	6
$F^{-1}(x) + g^{-1}(f^{-1}(x))$	8

The analysis of each research problem in terms of its possible strategies and levels of complexity are given in Appendix B.

These mental transformations are more than just a technical matter. They touch upon some cognitive processes already dealt with in the research literature.

Complexity was defined with the aid of the inverse and compound functions. The **inverse** function grew out of changes in the lexical terms of the text, thus, tacitly moving from “more” in the text to operating as if it is “less” (changing the reference and the compared) and vice versa.

The **compound** function grew out from shifting from an explicit reference mentioned in the text to an implied reference, which is not mentioned (thus, operating differently on the underlying scheme).

The comparison relation, like many other relations, is asymmetrical. In most cases we have the choice of how to linguistically describe the same situation. Commonly used in natural language is the description of the same underlying situation as either ”David has more marbles than Peter”, or “Peter has less marbles than David”.
Our "complexity" variable is affected by this kind of considerations. Moreover we will also have to take into account the preferable status of the term, “more” as was already dealt with in the literature. Several studies suggest that the word “more” is comprehended easier than the word “less” (Donaldson and Balfour 1968; Nesher and Teubal 1975; Riley and Greeno 1988). In the present study the word “more” is applied in three problems (A1, A2, A3). In three problems (B1, B2, B3) we have employed the word “less” and in the rest we used both in each problem (C1-E3)*. (See Appendix A.)

G . The Empirical Study

The research question was: What are the variables that affect the choice of the independent variable (the **X** of the equation)?

In each of the given problems either P or J or D could serve as the independent variable. Each choice is considered by us to be a strategy. Our aim is to understand the choice of strategies and reveal the variables that explain these choices. Is there a favored and preferred candidate to be selected as the independent variable (X)? Usually one would expect that the choice of the independent variable would be the one with the minimal level of complexity. Two other variables come into play when the lowest level of complexity is not selected. Sometimes the solver violates the lowest level choice since it is easier for him to deal with “more” and whole numbers, rather than with “less” and fractions.

The Hypotheses:

1. The solvers of each problem choose a strategy that leads to the minimal level of complexity.
2. Deviation from the above claim can be explained by the preference of “more than” over “less than” in interpreting the text (i.e. making an inverse transformation).

* It should be noted that there are languages, such as English, that do not use the term “less” as symmetrical to “more” in multiplicative cases. The English expression relevant to multiplicative comparison is “five times as many”. However, in many other languages (Hebrew and Czech and Arabic included) the multiplicative comparison, similar to the additive comparison, employs the words “more” and “less” in the following manner: “five times more” and “five times less” in a most natural fashion.

The Experiment

We first ran a pilot study with 104 teachers who solved the first 12 problems (A1 to E3). We will relate to it briefly in our analysis of the results. A replication of the same set of problems was given to 167 teachers in an in-service workshop in Israel and the Czech Republic. All teachers were experienced in teaching mathematics in primary schools. The problems were also given to 132 15-year olds in Israel, students who already studied equations with one variable. The problems were arranged in separate forms each containing only four problems, each from a different class of problems. Each teacher or student solved only one form. The forms were distributed at random. About 30 teachers and 20 students solved each problem. It took less than 40 minutes for each to complete the task.

H. Findings

D, J, and P are marking the unknown quantity that was selected to become the independent variable (the X) of the given problem. As recalled from our analysis each of the choices was a possible option. We have named this selection “The strategy” of the solver. Though it might be seen as a technical choice, we believe that this choice is revealing in regard to the complexity of the text, and the mental transformationthat one prefers to execute.

Table III presents the percentage of strategies for each problem separately for teachers and students:

Table III: Distribution of Selected Strategies by Teachers and by Students for Each Problem (in percent)

The problem	**D**		**J**		**P**		other**)	
	Teachers	Students	Teachers	Students	Teachers	Students	Teachers	Students
A1	83	91					17	9
A2	70	87	11	9		4	19	0
A3	62	38	7	6	7	31	24	25
B1	59	63	3		24	13	14	24
B2	55	36	21	18	7	18	17	28
B3	46	26			46	44	8	30

C1	46	43	36	43			18	14
C2	19	22	74	65			7	13
C3	32	17	48	65		4	20	14
E1	38	39			42	44	20	17
E2	29	48	46	19	11	24	14	9
E3	52	52	11	4	30	13	7	31

**) "Other", includes arithmetical solutions and avoidance.

As can be seen from Table III, each problem elicited a different distribution of strategies. Thus, there is no direct translation of the text. Each text produces different strategies for different solvers, meaning that instead of direct translation of the text into an equation there is a kind of elaboration.

The selection of **D** (David) as the independent variable is the most preferred strategy (except for problems: C2, C3, and E2). David is most likely to become the **X** of the equation for both teachers and students. One should recall that David has the smallest quantity, thus, choosing **D** as the independent variable means thinking in terms of the relation "more than" and working with whole numbers while solving the equation. The table emphasizes that working with simple equations and whole numbers is preferred in most problems. We observe that in problems C2 and C3 the priority is different. This is explained by the fact that choosing D as the independent variable in these cases leads to a much more complex solutions (complexity level of 6 and 8, respectively).

Comparison between teachers and students shows that they react similarly to the cognitive tasks they face. Thus, different problems elicit comparable strategies in teachers and students. The minor exceptions (such as in problem E2) are discussed below. A distinct difference between teachers and students was found in the analysis of the "other" column (which is not the target of our study). The "other" column consists of different behaviors of teachers and students. Most teachers solved all the problems, but those who employed numerical strategies were included in "others". The students included in the "other" column mostly did not use numerical strategies but gave up and did not solve the problems at all.

Next we have tried to see the relationship between the "strategy" and "complexity level". We are aware that the "complexity level" is a theoretical construct while "the strategy" is an empirical fact. We, however, assume, that such presentation will aid us to understand the mental transformations that one executes in solving a problem in a given strategy.

Table IV presents the distribution of selected strategies in all problems by complexity level for teachers and students (in each cell first are the teachers and then the students).

Table IV: Distribution of Selected Strategies in All Problems by Complexity Level – (Teachers, Students)

Complexity Problem #	2	3	4	6	8
A1	D=(83,91)			J=(0,0) P=(0,0)	
A2		J=(11,8)	D=(70,87)		P=(0,4)
A3			P=(7,31)	D=(62,38) J=(7,6)	
B1			D=(59,63)	J=(0,0) P=(24,13)	
B2		J=(21,18)	P=(7,18)		D=(55,36)
B3	P=(46,44)			D=(46,26) J=(0,0)	
C1		D=(46,43)	J=(36,43)		P=(0,0)
C2	J=(74,65)			D=(19,22) P=(0,0)	
C3		P=(0,4)	J=(48,65)		D=(32,17)
E1		D=(38,39)	P=(42,44)		J=(0,0)
E2			J=(46,18)	D=(29,48) P=(11,24)	
E3		P=(30,13)	D=(52,52)		J=(11,4)

The fact that the distributions of strategies within each problem vary and are similar in most problems for both teachers and students, means that we are dealing with a distinct cognitive demand in each problem. Thus, despite the difference between teachers and students, we can consider the two samples to be a replication of the same tasks.*

Before delving into the details of our findings, let us look at Table V, which clearly marks the order of preference for each strategy within each problem, with **1 standing for** the most preferred strategy for each specific problem, and **3** for the least preferred. As to the exact percentage of solvers that selected each strategy the reader is referred to Table IV.

Table V: Priority of Strategies and Complexity Level
(Teachers, Students)

Complexity	D Whole Numbers	j Whole Numbers and Fractions	p Fractions
2	A1(1,1)	C2(1,1)	B3(1,1)
3	C1(1,1) E1(1,2)	A2(2,2) B2(2,2)	C3(3,3) E3(3,2)
4	A2(1,1) B1(1,1) E3(1,1)	C1(2,2) C3(2,1) E2(1,3)	A3(3,2) B2(3,3) E1(2,1)
6	A3(1,1) E2(2,1) B3(2,2) C2(2,2)	A3(2,3) B1(3,3) A1(3,3) B3(3,3)	B1(2,2) E2(3,2) A1(3,3) C2(3,3)
8	B2(1,1) C3(1,1)	E1(3,3) E3(3,3)	A2(3,3) C1(3,3)

From Tables IV and V we learn that:

Two factors we have analyzed have to do with the cognitive processing that one probably runs through when solving this kind of word problems. We assume that though the solver, while solving the problems, is unaware of such factors, they affect

* We have noticed another replication for the 12 problems (A1-E3) in our pilot study (Cerme 2). The results for each problem on the pilot study are very similar to those of the main study.

the choice of strategy (the choice of X). This occurs, even without the solvers awareness. The fact that there are preferable strategies for given problems suggest that there are cognitive factors that interfere in the process. One has to do with the ease of processing given text, namely, the complexity level. Solvers, not necessarily consciously choose, if possible, the direct translation that also obviates the need for any linguistic transformations. The second major factor is solvers' preference for expressions containing "more". Choosing an expression with the term "more" means that the referent is a smaller quantity leading to an equation with whole numbers (See Table V). This is especially interesting in cases where the complexity level is quite high (8) as in problems B2, and C3.

There are, however, a few cases that violate this finding (B3). In such cases, other surface structure variables such as "the order of the information" and an easy transformation from "less" to "more", dictate the selection of the strategy.

From Table V we can also realize that when the complexity level is very low (2) or very high (8) teachers and students use similar solutions, when the complexity level is medium, sometimes the choice of solution by teachers and students differs.

In addition to the written work, we also discussed the issue of preferred strategies with the teachers. After solving the problems we asked the teachers to reflect on the reasons for their choice of strategy. First, we asked whether they see any **difference between the problems**, their answers were: "The problems speak of different relations"; "The set of relations among the figures in the story are different". Thus, the teachers were aware that there is a difference between the problems and that there is a transition from one set of relations (scheme in our theoretical discussion) to another within the same situation.

To the second question, "**What strategies did you use?",** their replies were of two types: (a) the order of the information, "I chose the X according to the order of the information"; and (b) Identifying the smallest set, "I chose the smallest quantity as the X". This emphasizes the high priority of D as the independent variable.

The last question was, "**What makes a question easy or difficult**? Several replied: **"**Finding the smallest quantity to compare the others to", "The identification of the given sets."

To summarize, the teachers view the problems as being distinct, with varying degrees of difficulty. The surface structure order of the text affected their choice of strategy, and they prefer the smallest quantity to be the independent variable to which the other variable to which other quantities will be compared.

As mentioned before, teachers and students mostly behaved in a similar manner. However, in cases of discrepancy (C3), students demonstrated clearly that they prefer a direct translation of the text with a low complexity level, even if they have to write an equation with fractions. Teachers prefer to arrive at an equation with whole numbers and probably are more at ease in making the linguistic transformations from “less” to “more”, arriving at a complexity level of 6.

I. Discussion

Our study is an attempt to find factors that affect the way solvers construct their equations to solve a simple comparison problem. We based our work on cognitive theories related to solving word problems such as that of Kintsch, which distinguishes between the text base and the situation model (Kintsch and van Dijk 1978; Kintsch 1986), and works emphasizing the schemes approach (Greeno 1978; Nesher, Greeno et al. 1982b; Shalin 1985b; Vergnaud 1988; Hall, Kibler et al. 1989; Reusser 1992; Vergnaud 1998; Fischbein 1999)

In Kintsch’s terms, a “situation model”, ”is a mental representation of the situation described by the text”. We now believe that this notion is ambiguous. The same situation can be described by different texts as exemplified by our 12 problem texts. By saying “a different text”, we mean different not merely on the surface structure level, but also in its propositional structure with its coherent macrostructure (see Kintsch 1986, p. 89). Column 1 of Table I presents the equivalent of a propositional structure in terms of the considered relations. A visual representation of the coherence of the macrostructure can be found in Table I, Column 2), where the propositions are combined in the three possible compound schemes. The schemes are general and can be employed in many word problem formulations. The schemes describe all situation components in three place relations, as a comparison situation actually requires (Hershkovitz, Nesher et al. 1990; Nesher and Hershkovitz 1994; Hershkovitz 1996).

We note that the “situation model” concept could have at least three different interpretations:

1st. The world as it is (in our case David, Jirka, and Peter each have a certain quantity of marbles).

2nd. There is a relation between the participants in that world (a comparison relation within each pair of the above-mentioned persons)

3rd. The world is described propositionally. The “compared” and “references” are defined.

The last interpretation was called by Kintsch (1986) the "text base” while the second seems to be the “situation model”. We think that the first interpretation is missing in Kintsch’s analysis. The first level, however, was proven empirically to be necessary. Observing the strategies employed by teachers and students we saw that although the text implied certain relationships, the solver added other relations that were not mentioned in the text. The ability to add such relations comes from the comprehension of the entire world situation, namely, the first interpretation above. For example, in Problem A3 there is a description of the relation between Peter and David, and Peter and Jirka (A3). Yet, the solvers who chose “D” as their independent variable (X) did not hesitate to solve the problem by bringing in the relation between David and Jirka (not mentioned at all in the text). Moreover, this was even the preferable strategy used by 62 % of the teachers.

Other findings in our study show that in analyzing problem solving it is not justified to neglect **surface structure variables**. Starting the analysis from the “text base”, which is frequently done by cognitive researchers, means missing some of the influential variables. Of the surface structure variables we would like to mention three:

(a) “Order” (Column 3, Table I) which was found in our study to be negligible. This supports the claim that the solver attends to the entire text (Kintsch et al. 1975l; Nesher and Katriel 1977; Reusser 1992).

(b) The syntactic structure of the sentences, whether a simple conjunction, a compound sentence, or anaphora, affected the level of complexity. This is connected to the fact that being the ‘compared’ or the ‘reference’ dictates who will appear as the subject of the sentence on the surface of the word problem text, and who will be part of the predicate. The subject-predicate relation for each problem is described in Table I, Column 3 (in a functional notation). From a syntactic point of view, problems A2, B2, C1, C3, E1, E3 are compound sentences in which the predicate of the first sentence becomes the subject of the second sentence. Problems A1, B3, C2 are conjunctions that share the predicates. Problems A3, B1, E2 are making anaphoric use of the same subject that plays a role in both comparisons. These various syntactic structures have affected the level of complexity. They impact on the number of transformations needed for the selection of the “x”.

(c) The lexical items “more” and “less” (Column 5, Table I) were also influential. The tacit alternation between them was the tool that solvers used in selecting their own strategy.

Limitations of our study: Our study introduced a manifold variable namely the “complexity level” and we analyzed its components. Future research is needed to find out more about the relative weight of the components comprising the complexity level. It would also be interesting to find out whether there are individual profiles of solvers who prefer certain strategies over others. As this study engaged in only one world situation, the generalizations of our conclusions need to be also studied also within a variety of other situations.

Bibliography:

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants: Le cas de l’Université du Québec à Montréal. La Revue Canadienne de l‘Enseignement des Science, des Mathématiques et des Technologies, 1.1, 61-80.

Carpenter, T. P., M. J. Moser, et al., Eds. (1982). Addition and Subtraction: A Cognitive Approach. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

De Corte, E. and Verschaffel, L. (1981). “Children's Solution Processes in Elementary Arithmetic Problems: Analysis and Improvement.” Journal of Educational Psychlogy **73**(6): 765-779.

De Corte, E. and Verschaffel, L., Ed. (1985). Writing Number Sentences to Represent Addition and Subtraction Word Problems. Proceedings of the Seventh Annual Metting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus,Ohio.

De Corte, E. and Verschaffel, L. (1987). “The Effect of Semantic Structure on First Graders Solution Strategies of Elementary Addition and Subtraction Word Problems.” Journal for Research in Mathematics Education **18**: 363-381.

Donaldson, M. and Balfour, G. (1968). "Less is More? A Study of Language Comprehension in Children." British Journal of Psychology **59**(4): 463-471.

Fischbein, E. (1999). "Intuitions and Schema in Mathematical Reasoning." Educational Studies in Mathematics (38): 11-50.

Greeno, J.G. (1978). "Understanding and Procedural Knowledge in Mathematics Instruction." Educational Psychologist **12**(3): 262-283.

Greeno, J.G. and Kintsch, W. (1985). "Understanding Soving Word Arithmetic Problems." Psychological Review **92**(1): 109-129.

Greer, B., Ed. (1994). Extending the Meaning of Multiplication and Division. The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics. Albany, NY, State University of New York Press.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E. and Truxsaw, C. (1989). "Exploring the Episodic Structure of Algebra Story Problem Solving." Cognition and Instruction **6**(3): 223-283.

Hershkovitz, S. and Nesher, P (1996). "The Role of Schemes in designing Computerized Environments." Educational Studies in Mathematics **30**: 339-366.

Hershkovitz, S., Nesher, P. et al. (1990). Schemes for Problem Analysis (SPA). Tel Aviv, Centre for Educationa l Technology.

Kintsch, W. (1986). "Learning From Text." Cognition and Instruction **3**(2): 87-108.

Kintsch, W.E. , Kozminsky, W.J. et al. (1975). "Comprehension and Recall of Text as a Function of Content Variables." Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior **14**(2): 196-214.

Kintsch, W. and van Dijk, T. A. (1978). "Toward a Model of Text Comprehension and Production." Psychological review **85**(5): 363-394.

Nesher, P. (1982a). Levels of description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. Addition and Subtraction: A cognitive Approach. T. Carpenter, T. Romberg and J. Moser. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. Number Concepts and Operations in the Middle Grades. J. Hiebert and M. Behr. NJ, Lawrence Erlbaum Association**:** 19-41.

Nesher, P. (1998). Possible Relations Between Natural Language and Mathematics. Tiem, Barcelona.

Nesher, P., Greeno, J.J. and Riley, M.S. (1982). "The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction." Educational Studies in Mathematics **13**: 373-394.

Nesher, P. and Hershkovitz, S. (1994). "The Role of Schemes in Two-step Problems: Analysis and Research Findings." Educational Studies in mathematics **26**: 1-23.

Nesher, P. and Katriel, T. (1977). "A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic." Educational Studies in Mathematics **8**: 251-269.

Nesher, P. and Teubal, E. (1975). "Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving." Educational Studies in Mathematics **6**: 41-51.

Nesher, P. and Katriel, T. (1978). "Two Cognitive Modes in Arithmetic Word Problem Solving".

Novotná, J. (1997). Phenomena Discovered in the Process of Solving Word Problems. ERCME 97. M. Hejný and J. Novotná. Praha, Prometheus: 98-102.

Polya, G. (1945 (2nd Edition, 1973)). How to Solve it. Princeton, Princeton University Press.

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton, Princeton University Press.

Polya, G. (1962 (Vol.1), 1965 (Vol.2), 1980 (combined edition, paperback)). Mathematical Discovery. New York, Wiley.

Reusser, K. (1992). "From Text to Situation to Equation: Cognitive Simulation of Understanding and Solving Mathematical Word Problems." Learning and Instruction **2**: 477-497.

Riley, M.S. and Greeno, J.G. (1988). "Developmental Analysis of Understanding Language about Quantities and of Solving Problems." Cognition and Instruction **5**(1): 49-101.

Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The Building Blocks of Cognition. Theoretical Issues in Reading Comprehension. R. T. Spiro, B. C. Bruce and W. F. Brewer. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

Schmidt, S, and Bednarz, H. (1997). "Raisonnements arithmétique et algébrique dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrées par les futurs enseignants." Educational Studies in Mathematics **32**: 127-155.

Shalin, V. (1985b). Word Problem.

Thompson, P. W. (1985). Experience, Problem Solving, and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula. Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. E. A. Silver. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. R. Lesh and M. Landau. New York, Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Number Concepts and Operation in the Middle Grades. J. Hiebert and M. Behr. Reston, National Council of Teachers of Mathematics. **2:** 141-161.

Vergnaud, G. (1998). "A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education." Journal of Mathematical Behavior **17**(2): 167-181.

Yerushalmy, M. and Gilead, S. (1997). Functions and Algebra: New Perspective on Categorization of Rate Problems. Haifa, Israel.

Appendix A: The full set of problems

A1: *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more marbles than David, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

A2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 3 times more than Jirka, and Jirka has 2 times more than David. How many marbles does each boy have?*

A3. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more than David, and 3 times more than Jirka. How many marbles does each boy have?*

B1. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. David has 6 times less marbles than Peter, and he has 2 times less marbles than Jirka. How many marbles does each boy have?*

B2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. David has 2 times less than Jirka and Jirka has 3 times less than Peter. How many marbles does each boy have?*

B3. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. David has 6 times less than Peter, and Jirka has 3 times less than Peter. How many marbles does each boy have?*

C1. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 6 times more marbles than David, and David has 2 times less marbles than Jirka. How many marbles does each boy have?*

C2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Peter has 3 times more marbles than Jirka, and David has 2 times less than Jirka. How many marbles does each boy have?*

C3. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. David has 6 times less marbles than Peter, and Peter has 3 times more marbles than Jirka. How many marbles does each boy have?*

E1. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Jirka has 2 times more marbles than David and David has 6 times less marbles than Peter. How many marbles does each boy have?*

E2. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Jirka has 3 times less marbles than Peter, and 2 times more marbles than David. How many marbles does each boy have?*

E3. *Peter, David and Jirka are playing marbles. They have 198 marbles altogether. Jirka has 3 times less marbles than Peter, and Peter has 6 times more marbles than David. How many marbles does each boy have?*

Appendix B: presents the complexity level for each strategy in each problem

	Strategies	Complexity
A1	**D** + g(D) + f(D) g^{-1}(J) + **J** + f(g^{-1}(J)) f^{-1}(P) + g(f^{-1}(P)) + **P**	2 6 6
A2	**D** + g(D) + f(g(D)) g^{-1}(J) + **J** + f(J) g^{-1}(f^{-1}(P)) + f^{-1}(P) + **P**	4 3 8
A3	**D** + f(D) + g^{-1}(f (D)) f^{-1}(g(J))+ **J** + g(J) f^{-1}(P) + g^{-1}(P) + **P**	6 6 4
B1	**D** + g^{-1}(D) + f^{-1}(D) g(J) + **J** + f^{-1}(g(J)) f(P) + g^{-1}(f(P)) + **P**	4 6 6
B2	**D** + f^{-1}(D) + g^{-1}(f^{-1}(D)) f(J) + **J** + g^{-1}(J) f(g(P)) + g(P) + **P**	8 3 4
B3	**D** + g(f^{-1}(D)) + f^{-1}(D) f(g^{-1}(J))+ **J** + g^{-1}(J) f(P) + g(P) + **P**	6 6 2
C1	**D** + g^{-1}(D) + f(D) g(J) + **J** + f(g(J)) f^{-1}(P) + g^{-1}(f^{-1}(P)) + **P**	3 4 8

	Strategies	Complexity
C2	**D** + g^{-1}(D) + $f(g^{-1}(D))$ g(J) + **J** + f(J) $g(f^{-1}(P))$ + f^{-1}(P) + **P**	6 2 6
C3	**D** + $g^{-1}(f^{-1}(D))$ + f^{-1}(D) f(g(J)) + **J** + g(J) f(P) + g^{-1}(P) + **P**	8 4 3
E1	**D** + f(D) + g^{-1}(D) f^{-1}(J) + **J** + $g^{-1}(f^{-1}(J))$ g(P) + f(g(P)) + **P**	3 8 4
E2	**D** + g(D) + $f^{-1}(g(D))$ g^{-1}(J) + **J** + f^{-1}(J) $g^{-1}(f(P))$ + f(P) + **P**	6 4 6
E3	**D** + f(g(D)) + g(D) $g^{-1}(f^{-1}(J))$ + **J** + f^{-1}(J) g^{-1}(P) + f(P) + **P**	4 8 3

Annexe 6

Novotná J. (2002). INSTRUMENTS POUR L’ANALYSE DES TRACES ECRITES. Extrait de la présentation « De l´étude du comportement à celle de situations » à l’Université Bordeaux 2, DAEST, 23. Septembre 2002.

Les traces écrites au cours de la résolution d´un problème par les élèves peuvent fournir des indices sur la compréhension qu´ils ont de l’énoncé. Pour rechercher ces indices, j´ai envisagé divers modèles de processus de résolution qui font apparaître les fonctions de la lecture de l´énoncé et je les confronte aux corpus des productions des élèves. Jusqu´ici j´ai analysé 34 résolutions de 34 élèves (de 11 à 14 ans) de 13 problèmes en mots « de partages inégaux ».

Le dispositif était tel que le processus de traitement du problème commence avec la lecture de l´énoncé. Pendant les expériences avec les élèves résolvant les problèmes, j´ai observé qu´après un certain laps de temps, les élèves écrivent un certain nombre d´informations que j´interprète comme un enregistrement des donnés, et qu´ils prennent un temps de réflexion avant d´écrire de nouveau. Cette observation nous a conduit à envisager le processus de résolution du problème comme composé des opérations suivantes :

- traitement de l´énoncé,
- mathématisation,
- retour au contexte et vérification.

L´ordre de la succession effective de ces composantes est nécessairement plus complèxe. Par exemple l´élève a besoin de revenir aux informations de l´énoncé, il peut :

- relire l´énoncé,
- utiliser les informations enregistrées sur le papier ou « dans sa tête » comme la source des informations.

J´essaie de l´interpréter par un graphe d’un processus « universel ».

La première image de l´énoncé du problème est créée « dans la tête de l´élève », l´élève forme un <u>modèle mental</u>. Le modèle mental ainsi formé n´est pas toujours suffisant pour que l´élève produise directement la solution. Il en écrit ou dessine certains éléments. Pourquoi ?

- Pour diminuer la complexité mentale de son rapport avec l´énoncé, il peut ainsi décharger sa mémoire instantanée ?
- Comme procédé heuristique qui permet de manipuler des relations.
- Pour communiquer son modèle mental à quelqu´un qui le demande.
- Comme procédé rétrodidactique pour soumettre son modèle mental au contrôle.

Pour produire une interprétation de l´énoncé, l´élève utilise un langage dans lequel il « traduit » les données, relations et inconnus du problème dans une forme plus récapitulative et économique. J´appelle un tel langage le langage de référence.

L´élève a à sa disposition des langages de référence divers. Il peut produire des modèles écrits différents. La sélection d´un langage de référence est influencée par plusieurs conditions, e.g. : L´élève :

- ne connaît pas tous les langages de référence qu´il pourrait utiliser et leurs possibilités ;
- connaît les types différents, mais n´est pas capable de travailler également bien avec touts d´eux (e.g. il n´a pas utilisé quelques d´eux trop souvent),
- préfère un à l´autre à cause de ses expériences précédentes,
- ne reconnaît pas la convenance du certain type du langage de référence pour le problème à résoudre.

La construction d´un modèle écrit est l´action active, un dialogue entre l´élève et l´énoncé qui se déroule habituellement par un processus dont le schéma est suivant :

Création du modèle mental de l´énoncé

↓

Sélection du langage de référence

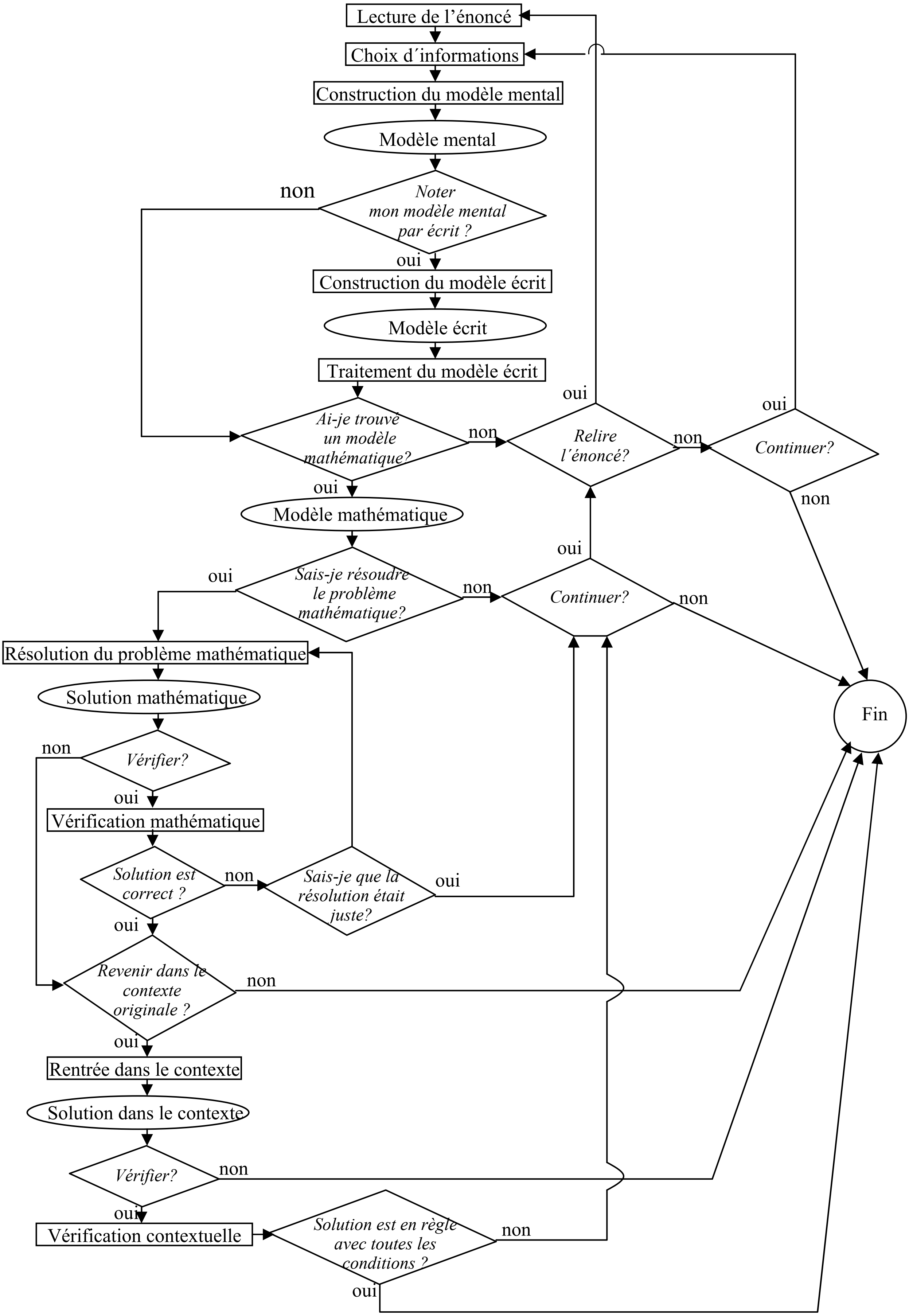
↓

Traduction de l´énoncé
dans le langage de référence

L´élève qui a commencé à résoudre un problème en mot peut finir le processus de résolution :

A. en trouvant un modèle mathématique adéquat et en le résolvant,
B. en trouvant un modèle mathématique adéquat, qu´il ne sait pas résoudre,
C. en ne trouvant pas un modèle mathématique correct, mais en « essayant » de résoudre le problème posé quand même (heuristiques observables, méthodes inadéquates…)
D. en ne trouvant pas un modèle ne donnant pas la trace des ses essais pour résoudre le problème posé.

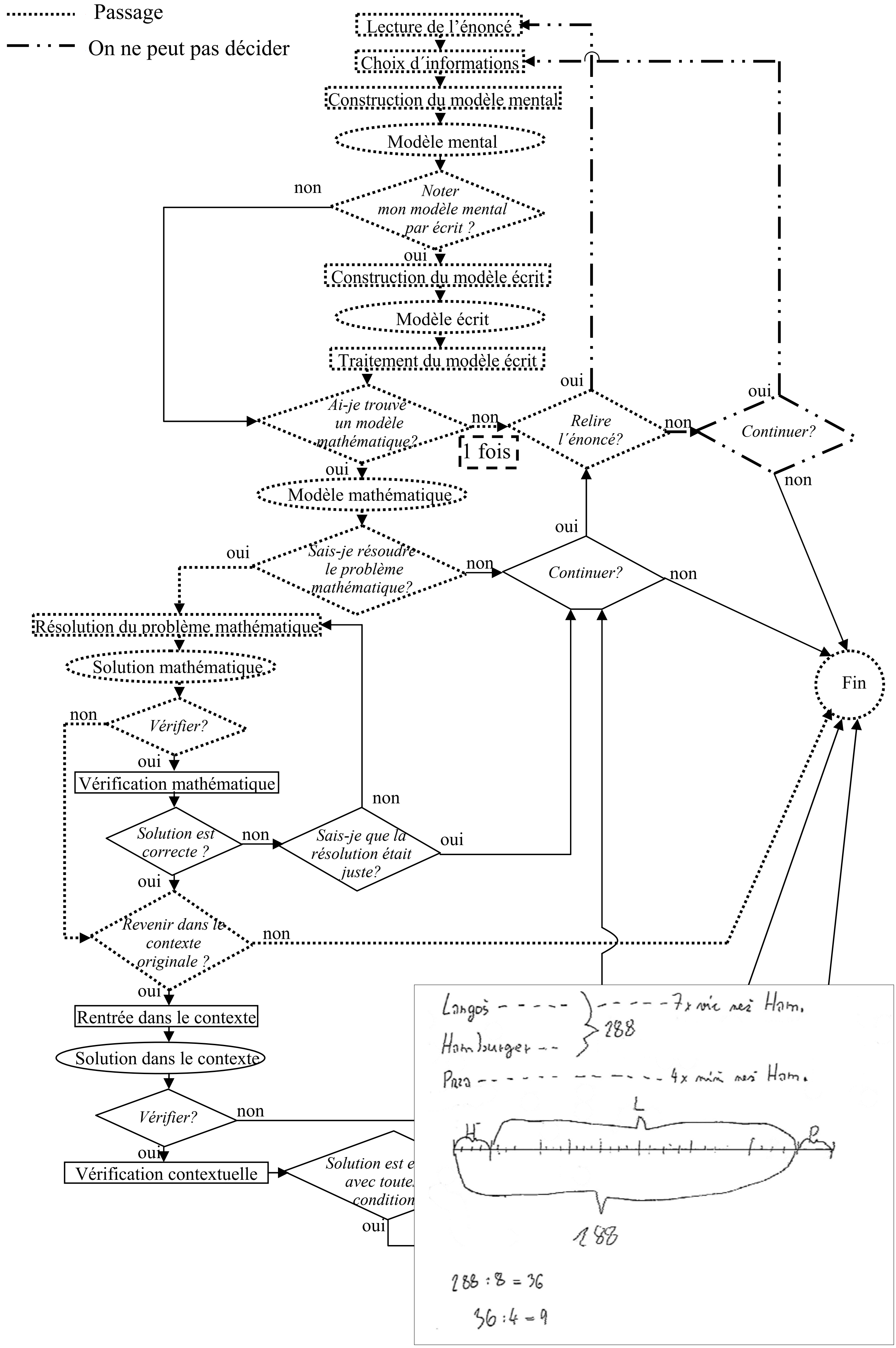
Organigramme du processus de résolution

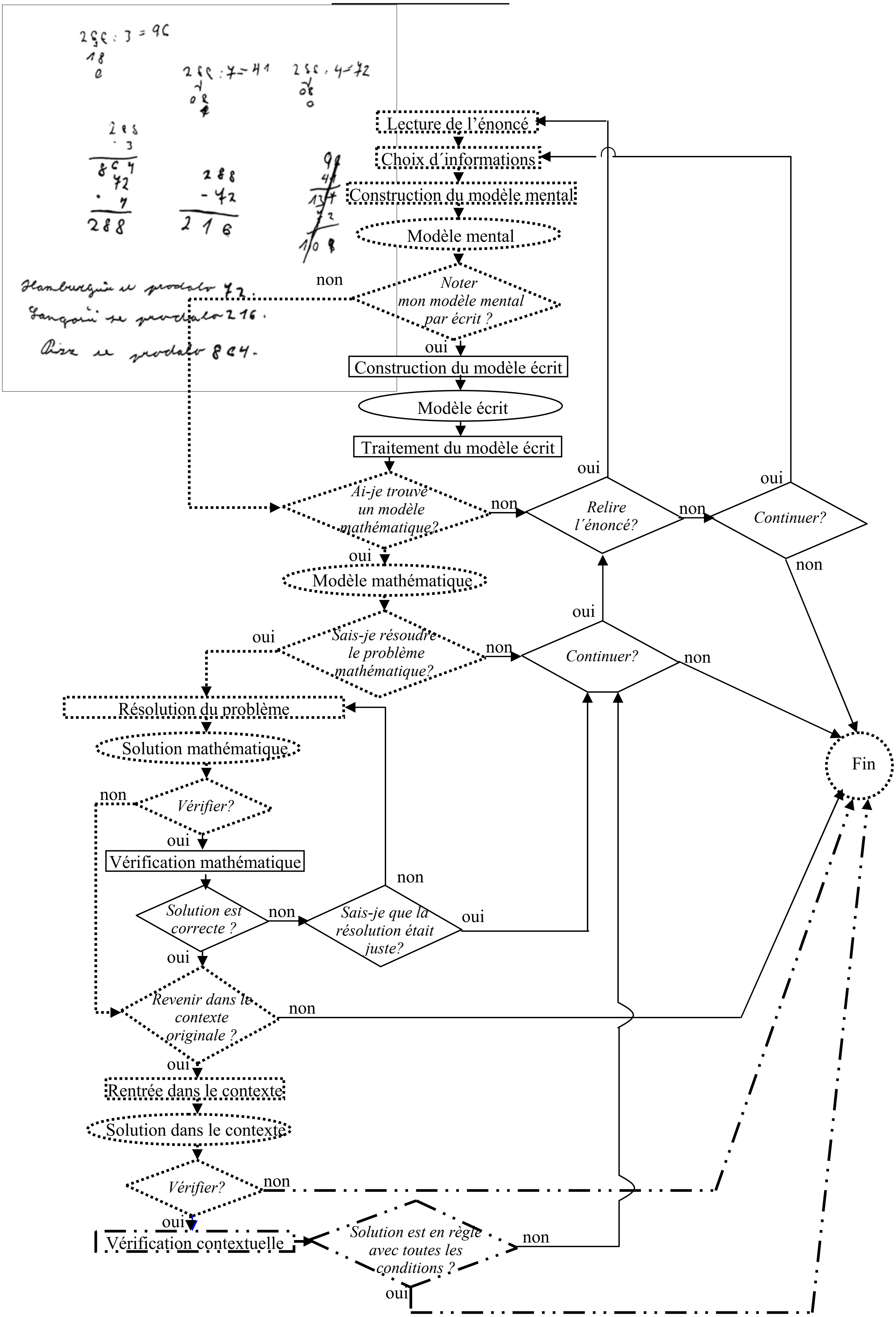


Notes :

- La vérification mathématique et la vérification contextuelle peuvent être exécutées en même temps.
- Les décisions dans les points décisionnels sont, dans la plupart des cas, clairement identifiable du texte écrit (présence du modèle écrit, du processus de la résolution, de la solution, des vérifications). Des actions implicites sont identifiables de la continuation du processus. La décision difficile à identifier est : « Veux-je relire l´énoncé ? » C´est impossible ou au moins très difficile d´identifier de l´enregistrement écrit, si l´élève relisait l´énoncé ou utilisait les modèles écrits précédents (exceptions sont e.g. des expérimentes individuels si l´élève lit à haute voix ou des enregistrements vidéos des comportements des élèves).
- Les décisions « Ai-je trouvé un modèle mathématique ? » et « Sais-je résoudre le problème? » peuvent être vérifiées par la présence du modèle ou du processus de résolution, ou par la présence de la solution.
- On peut décider de l´exécution des vérifications seulement si l´enfant les a mis explicitement dans sa trace écrite. Pour décider de leur exécutions implicites, il faut trouver des indices dans la trace écrite (e.g. l´élève a barré le résultat ou a recommencé la résolution sans explication pourquoi). Si on ne les trouve pas, on ne peut pas décider.

Par une reprise de l´énoncé j´appelle le retour de l´élève aux informations de l´énoncé (par une relecture de l´énoncé ou par l´utilisation des informations déjà saisies).


Passage
On ne peut pas décider
Lecture de l'énoncé
Choix d´informations
Construction du modèle mental
Modèle mental
Noter mon modèle mental par écrit ?
non
oui
Construction du modèle écrit
Modèle écrit
Traitement du modèle écrit
Ai-je trouvé un modèle mathématique?
non
1 fois
oui
Relire l´énoncé?
oui
non
Continuer?
oui
non
Modèle mathématique
Sais-je résoudre le problème mathématique?
oui
non
Continuer?
oui
non
Fin
Résolution du problème mathématique
Solution mathématique
Vérifier?
non
oui
Vérification mathématique
Solution est correcte ?
non
Sais-je que la résolution était juste?
non
oui
oui
Revenir dans le contexte originale ?
non
oui
Rentrée dans le contexte
Solution dans le contexte
Vérifier?
non
oui
Vérification contextuelle
Solution est e
avec toute
condition
oui
Langoš ---- 7x víc než Ham.
288
Hamburger --
Pizza ---- 4x míň než Ham.
L
H
P
288
288 : 8 = 36
36 : 4 = 9


256 : 3 = 96
256 : 7 = 41
256 : 4 = 72
288
216
Hamburgeri se prodalo 72.
Sangovi se prodalo 216.
Pizz se prodalo 864.
Lecture de l'énoncé
Choix d'informations
Construction du modèle mental
Modèle mental
Noter mon modèle mental par écrit ?
non
oui
Construction du modèle écrit
Modèle écrit
Traitement du modèle écrit
Ai-je trouvé un modèle mathématique?
oui
non
Relire l'énoncé?
oui
non
Continuer?
oui
non
Modèle mathématique
Sais-je résoudre le problème mathématique?
oui
non
Continuer?
oui
non
Résolution du problème
Solution mathématique
Vérifier?
non
oui
Vérification mathématique
Solution est correcte ?
non
oui
Sais-je que la résolution était juste?
non
oui
Revenir dans le contexte originale ?
non
oui
Rentrée dans le contexte
Solution dans le contexte
Vérifier?
non
oui
Vérification contextuelle
Solution est en règle avec toutes les conditions ?
non
oui
Fin

Pendant le traitement de l'énoncé du problème, l'élève absorbe une variété d'informations. L´organigramme ne décrit pas la complexité de cette opération. Pour mes analyses de cette opération j´avais besoin d´un moyen montrant plus de détails. J´utilise la table que j´expliquerai maintenant.

J´envisage le traitement de l´énoncé comme composé de 5 actions fondamentales :

a) identification des données,

b) identification des relations entre les données,

c) identification de la demande,

d) élaboration d´un point de vue unifiant et d'une organisation des données,

e) élaboration du modèle mathématique.

En reprenant l´énoncé du problème, l'élève essaie d'identifier des informations ; cela représente les actions a) à c). Les actions d), e) sont exécutées (spontanément ou délibérément) parallèlement aux actions a) à c). Les élèves peuvent exécuter (avec ou sans succès) seulement quelques des actions. Les actions ne sont pas exécutées toutes en même temps et toujours dans l'ordre présenté.

Les résultats fructueux ou non fructueux des actions peuvent déterminer l'élève à reprendre l´énoncé et à recommencer toute la procédure dans le cas où il possède les indicateurs nécessaires.

Quel élève revient dans le processus (adapté de M. Hejný, F. Kuřina : Dítě, škola a matematika, p. 128) :

1. N´a pas peur d´être sanctionné dans le cas d´un échec (le contrat permet les tentatives).
2. A la nécessité d'entreprendre une démarche quand il ne comprend pas quelque chose.
3. Croit qu´il est capable de comprendre.
4. Croit que dans un nouvel essai il peut réussir.

Ces conditions concernent l´élève, son univers interne, son désir de savoir et sa confiance en soi intellectuelle et cognitive.

Comment l´enseignant peut-il gérer cela ? Par création du climat dans la classe où :

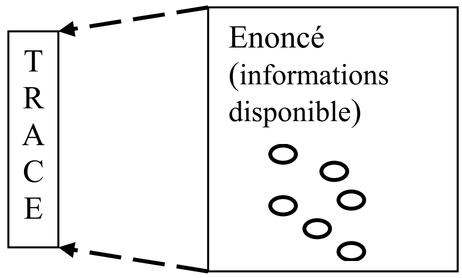
- des erreurs sont utilisées pour créer des connaissances et savoirs en trouvant leurs sources, en revenant aux problèmes moins complexes compris par l´élève etc.,
- le nombre des modèles différents de traces écrites, de procédures de résolutions etc. est assez riche,
- le climat dans la classe est favorable pour la discussion.

Pour caractériser le processus de traitement de l´énoncé j´utilise trois variables:

1. le nombre de reprises (variable scalaire),
2. la réalisation des actions a) à e), au cours des différentes reprises,
3. la qualité d'exécution de l´action :
   - réalisation complète, correcte,
   - réalisation partielle mais correcte,
   - réalisation incorrecte, partielle et erronée.

Les réalisations peuvent être faites explicitement, i.e. sur le papier, ou implicitement, i.e. mentalement seulement. Dans le deuxième cas, l´observateur estime à la réalisation par les indices présents dans d´autres parts de la trace écrite. J´utilise le terme l´enregistrement pour toutes les deux formes de réalisation.

Réalisation complète, correcte :



J´estime que la réalisation est complète, correcte lorsque :

a) Identification des données : toutes les données d´objet (constantes, mesures…) sont présentes dans l´enregistrement, il n´y a pas d´erreurs et de superflus.

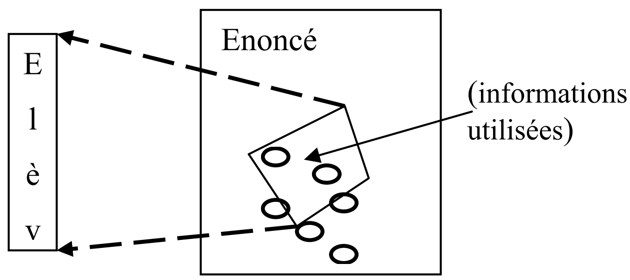
b) Identification des relations : toutes les relations entre les données nécessaires pour trouver un modèle mathématique pertinent et utile sont présentes dans l´enregistrement, il n´y a pas d´erreurs et de superflus.

c) Identification de la demande : toutes les inconnues du problème sont identifiées (e.g. par x, y…, par ? par un groupe des mots).

d) Elaboration d´un point de vue unifiant : l´élève a trouvé les liens pertinents et utiles des éléments obtenus dans les actions a) à c).

e) Elaboration du modèle mathématique : l´élève a construit un problème mathématique qui lui permet de trouver la solution correcte du problème original.

Réalisation partielle :



Les résultats des actions a) à e) ne sont pas complets. Deux cas différents sont inclus – l´enregistrement des informations est correct mais ne contiennent pas toutes les informations, ou toutes les informations sont présentes dans l´enregistrement mais seulement une part d´eux est correcte.

Dans ce cas, je prends note seulement de la trace écrite.

Réalisation incorrecte : Les résultats des actions a) à e) sont erronés.

Pour dénoter la qualité du traitement des actions, j'utilise des notations suivantes :

RCi/RCe réalisation complète, correcte implicite/explicite

RP réalisation partielle

RIi/RIe réalisation incorrecte implicite/explicite

X l´action n´était pas réalisée

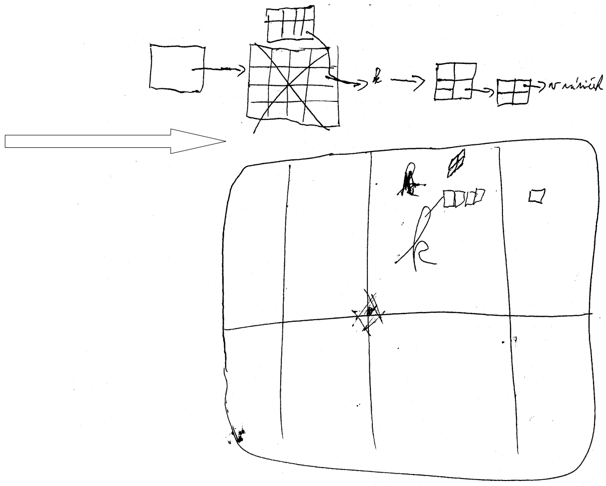
? l´action était réalisée, mais dans la reprise je ne suis pas capable de décider sa qualité

Je porte les observations des trois variables lors des différentes reprises dans la table suivante :

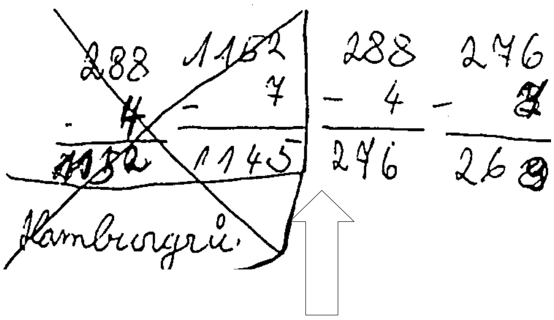
ACTIONS **NOMBRE DE REPRISES**	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
1					
2					
3					
…					

Indices utilisés pour déterminer les reprises :

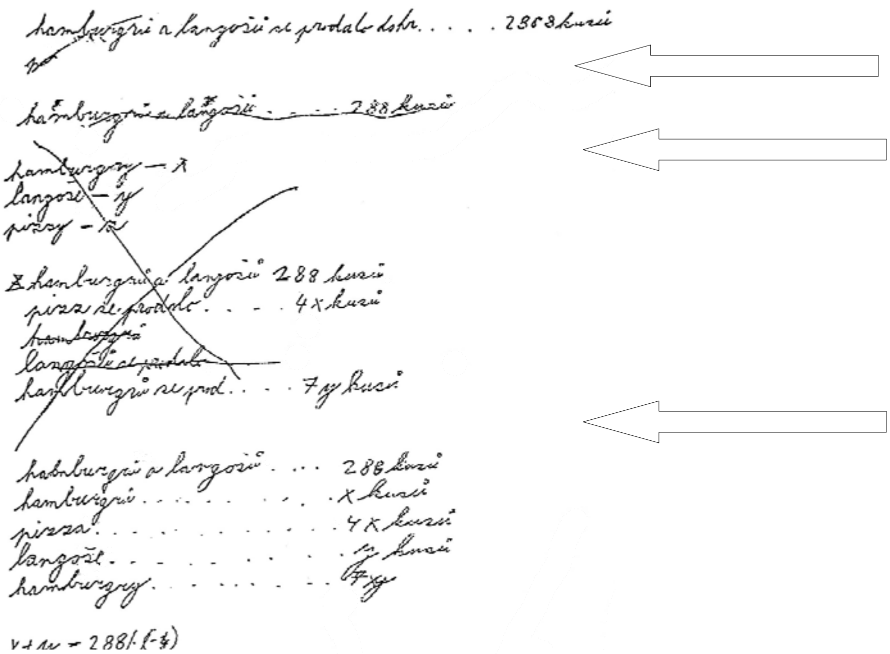
- répétition d’une trace pour une même donnée



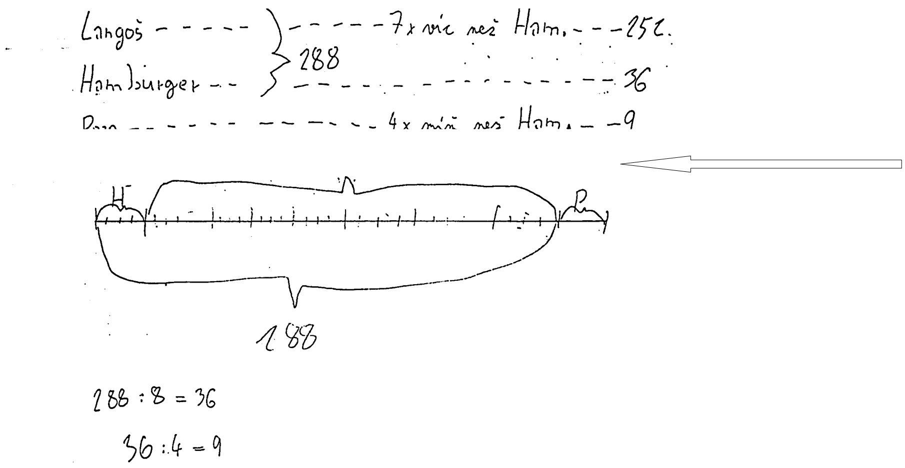
- séparation graphique expressive d´un ensemble d´informations écrites de l´autre



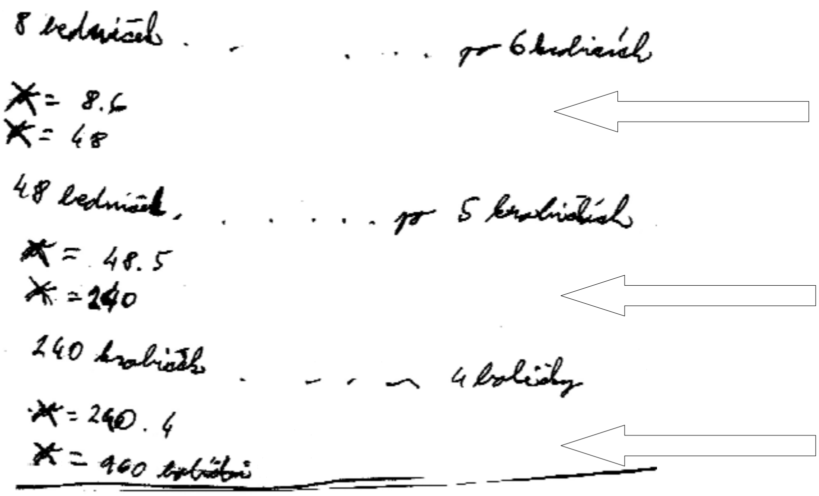
- suppression d´un texte (barrer, rayer)



- changement du langage de référence



- présence du « texte extérieur» (calcul, figure où je ne trouve aucune relation à l´action exécutée etc.) entre les enregistrements des actions



Détermination de l´ordre des actions pendant une reprise d´énoncé

Pour indiquer l´ordre des actions pendant une reprise d´énoncé, les valeurs de la troisième variable sont notées dans les lignes différentes dans le secteur correspondant à cette reprise, plus bas la valeur se trouve, plus tard l'action a été réalisée.

Il est facile de trouver la succession des actions en cas de l´enregistrement de tous les processus de résolution du problème avec la vidéo ou si on a une autre notation détaillée du processus complet. Sinon, j´utilise les indicateurs de la succession des actions pendant une reprise de types suivants :

- l´ordre dans lequel l´élève a écrit des mots et symboles (dans le cas où l'on peut les détecter),
- les autres indicateurs graphiques comme e.g. les places vides, les positions des symboles en relation aux autres symboles,
- l´utilisation des informations écrites d'un endroit à un autre.

Dans le cas où je ne trouve aucun indicateur concernant l´ordre des actions, je les porte dans la table comme étant réalisées simultanément.

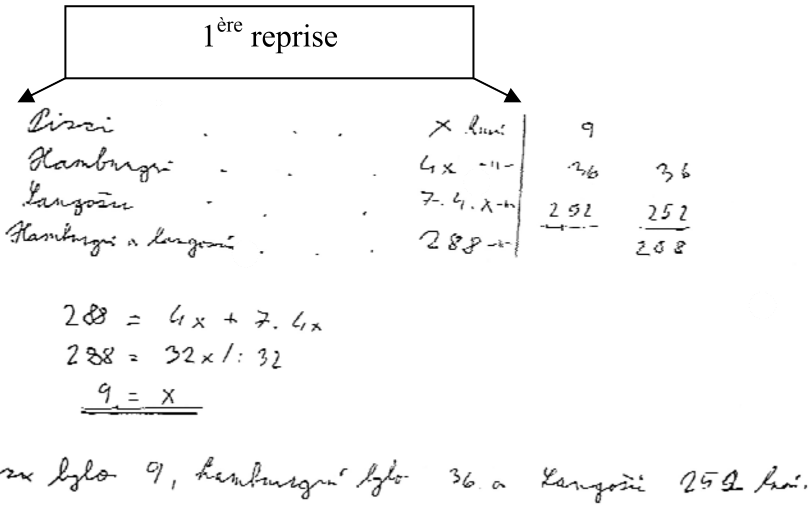
Sur la même ligne, j´écris des valeurs des actions exécutées simultanément (soit car c'est effectivement le cas, soit du fait de l'absence d'indicateurs).

La première ligne (cette avec le fond gris) est réservée pour indiquer les valeurs des actions qui ont été exécutées dans une des reprises précédentes est utilisée ici sans aucune activité supplémentaire.

Exemples

Un buffet vend trois repas différents: pizzas, hamburgers et langos[9]. Dans un jour on a vendu 288 repas de type hamburger ou langos. Quatre fois plus de hamburgers que de pizzas et sept fois plus de langos que hamburgers sont vendus. Combien de repas de chaque type a-t-on vendu?

Adam (garçon, 14 ans)



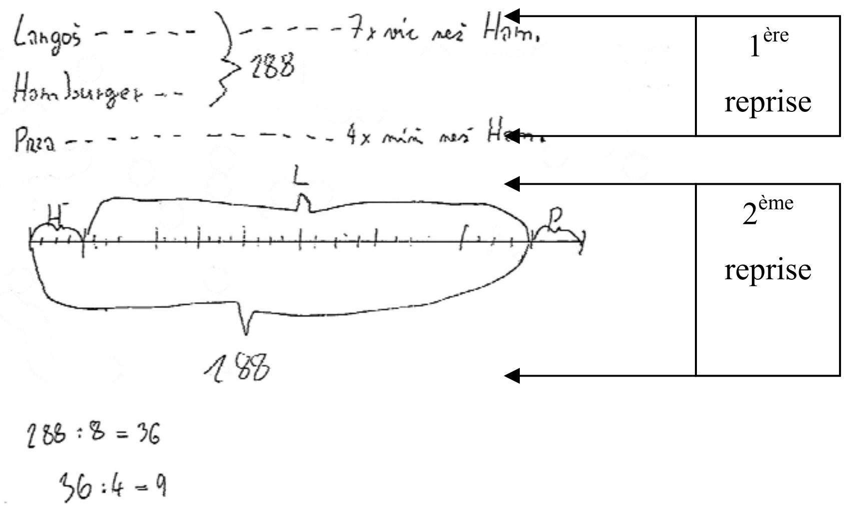
ACTIONS NOMBRE DE REPRISES	a)	b)	c)	d)	e)
1	RCe	RCe	RCe	RCe	RCe

Le modèle écrit est formé dans la façon très sure, il n´y a pas des indices de hésitation ou de l´exécution des actions successivement. Je suppose, que Adam a su du commencement quel modèle mathématique il veux utiliser, comment il va le construire et comment il va résoudre le problème mathématique.

[9] Langos est le nom d'un repas d'origine hongrois.

La résolution algébrique a des traits d´utilisation d´un algorithme appris, on ne peut pas décider si Adam le fait seulement « parce qu´on le doit faire comme ça » ou parce qu´il comprend pourquoi.

Cyril (garçon, 14 ans)



ACTIONS NOMBRE DE REPRISES	a)	b)	c)	d)	e)
1	RCe		RCi		
		RCe		X	X
2			RCi		
	RCe	RCe			
				RCe	
					RCe

La division à deux reprises est basée sur le changement de la langage de référence.

1ère reprise :

- a) et c) sur la même ligne : Je suppose que Cyril était conscient de la question depuis la 1ère lecture, parce qu´il n´avait pas besoin de noter la question sur le papier.
- b) était réalisé après : les relations sont notées plus loin que la somme de L et P.

2ème reprise :

- a) et b) ne sont pas mis sur la première ligne, parce que Cyril a élaboré de nouveau les données et les relations qu´il déjà connaissait.
- a) et c) sur la même ligne : Pour créer le modèle écrit en utilisant le langage graphique, les informations sont suivies parallèlement.
- d) était réalisé après : Les accolades étaient écrites plus tard, elles sont précisément placées.
- Je présuppose que e) est le résultat de toutes les actions a) à d).