# Cvičení z MAN2 - 12. týden

Pavel Eichler

30. dubna 2021

## 1 Výpočet plochy

Jak již z přednášky víte, hodnotu určitého integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ lze chápat jako obsah plochy ohraničené křivkami $x = a$, $x = b$, funkcí $f(x)$ a osou $x$. Tento fakt využijme pro výpočet obsahu následujících ploch.

**Příklad 1.1**
*Vypočtěte obsah elipsy zadané rovnicí $x^2 + xy + y^2 = 1$.*

*Řešení:*
Pro výpočet plochy začněme vyjádřením $y$ z rovnice pro elipsu. Řešením této kvadratické rovnice dostaneme celkem 2 různé vyjádření $y$, tj.

$$y_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{4 - 3x^2}}{2}.$$

Z tohoto vyjádření vidíme, že definiční obory funkcí $y_{1,2}$ jsou totožné a rovnají se množině $\mathcal{D}_{y_{1,2}} = \left\{x : |x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$. Dále z grafu těchto funkcí na obrázku 1 vidíme, že daný povrch získáme tak, že funkci $y_2$ odečteme od funkce $y_1$ a rozdíl zintegrujeme přes definiční obor $\mathcal{D}_{y_{1,2}}$.

Tím dostaneme pro povrch elipsy $S$

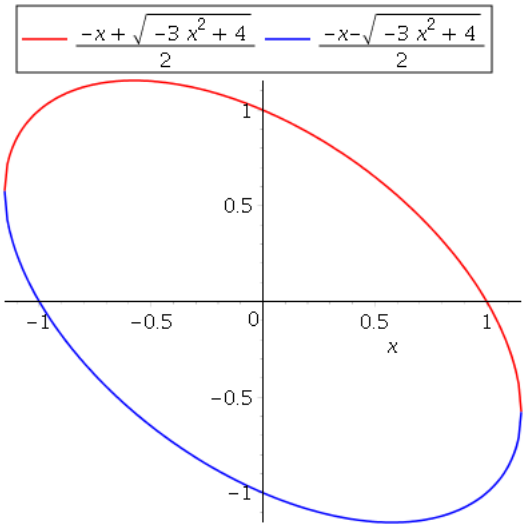
$$S = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2} - \frac{-x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{4 - 3x^2}\mathrm{d}x.$$

Integrál nejprve upravme do tvaru

$$\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{4 - 3x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}\mathrm{d}x = \bigstar$$

Substitucí

$$t = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x$$




Obrázek 1: Příklad 1.1.

dostaneme

$$\bigstar = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \bigstar.$$

Dále pomocí metody per-partes dostaneme

$$\int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \left[ \begin{array}{l} f = \sqrt{1-t^2},\ g' = 1 \\ f' = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},\ g = t \end{array} \right] = t\sqrt{1-t^2} + \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t =$$

$$t\sqrt{1-t^2} + \int \frac{t^2 \pm 1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \arcsin(t)$$

Čili

$$\int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t)\right)$$

a

$$\bigstar = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t)\right]_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Celková plocha elipsy je tedy rovna $S = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

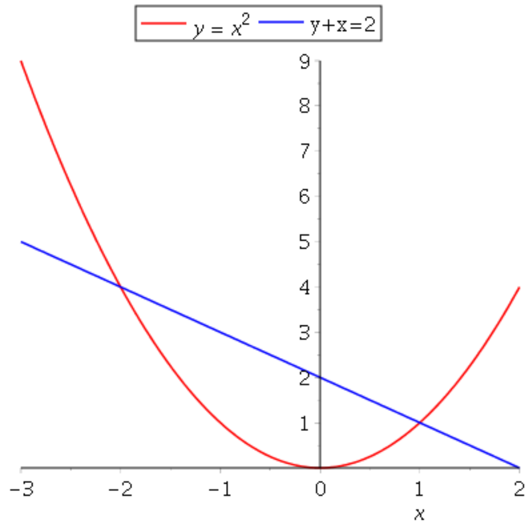
**Příklad 1.2**

*Vypočtěte plochu ohraničenou parabolou $y = x^2$ a přímkou $x + y = 2$.*

*Řešení:*

Z obrázku 2 vidíme, že pro výpočet sevřené plochy si nejprve nalezneme dané průsečíky. Dosazením rovnice $y = 2 - x$ do rovnice paraboly dostaneme

$$x^2 + x - 2 = 0.$$




Obrázek 2: Příklad 1.2.

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme kořeny $x_1 = -2, x_2 = 1$. Hledanou plochu $S$ získáme tak, že od plochy pod grafem funkce $y = 2 - x$ odečteme plochu pod grafem funkce $y = x^2$, tj.

$$S = \int_{-2}^{1} 2 - x - x^2 \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{36 + 9 - 18}{6} = \frac{9}{2}.$$

Hledaná plocha se rovná $S = \frac{9}{2}$.

**Příklad 1.3**

*V jakém poměru dělí parabola $y^2 = 2x$ plochu kruhu $x^2 + y^2 = 8$ ?*

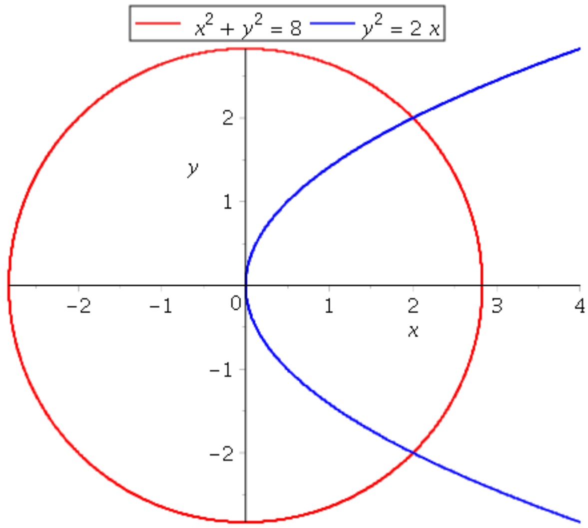
*Řešení:*

Opět z obrázku 3 je patrné, že při výpočtu plochy vymezené parabolou a elipsou se stačí omezit na první kvadrant. Z předpisu kruhu vidíme, že poloměr je $r = 2\sqrt{2}$, čili plocha kruhu $S_{kruh} = 8\pi$. Pro výpočet plochy výseče nejdříve najděme průsečíky mezi parabolou a kružnicí, což najdeme například dosazením rovnice paraboly do rovnice kruhu, tj.

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Druhý kořen ale nelze dosadit do rovnice paraboly, neboť levá i pravá strana musí být nezáporné. Dále kružnici $x^2 + y^2 = 8$ lze získat jako graf funkcí $y_{1,2} = \pm\sqrt{8 - x^2}$ s definičním oborem $\mathcal{D}_{y_{1,2}} = \langle -r, r\rangle$. Plochu dané výseče $S_{vys}$ získáme jako dvojnásobek plochy pod grafem funkce $y = \sqrt{2x}$ v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a plochy pod grafem funkce $y_1 = \sqrt{8 - x^2}$ v intervalu $\left\langle 2, 2\sqrt{(2)}\right\rangle$, tj.

$$S_{vys} = 2\left(\int_{0}^{2} \sqrt{2x}\mathrm{d}x + \int_{2}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\mathrm{d}x\right).$$




Obrázek 3: Příklad 1.3.

První integrál spočteme Newtonovou formulí

$$\int_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x = \sqrt{(2)}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Při výpočtu druhého integrálu použijeme například substituci ve tvaru

$$x = 2\sqrt{(2)}\cos(t)$$
$$\mathrm{d}x = -2\sqrt{(2)}\sin(t)\mathrm{d}t.$$

Tím dostaneme

$$\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} = -2\sqrt{(2)}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sqrt{8(1-\cos^2(t))}\sin(t)\mathrm{d}t = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t)\mathrm{d}t =$$
$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos(2t)\mathrm{d}t = 4\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi - 2.$$

Tím dostáváme

$$S_{vys} = 2(\frac{8}{3} + \pi - 2) = \frac{4}{3} + 2\pi.$$

Parabola dělí plochu kruhu v poměru

$$\frac{S_{kruh}}{S_{vys}} = \frac{8\pi}{\frac{4}{3} + 2\pi}.$$

## 2 Délka grafu funkce

Na přednášce byla vyslovena následující věta.

**Věta 1 (Délka grafu funkce)**
*Nechť funkce $f$ má spojitou derivaci $f'$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak graf funkce $f$ je rektifikovatelný a pro jeho délku $L$ platí*

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Aplikujme tuto větu na následující příklady.

**Příklad 2.1**
*Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = x\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.*

*Řešení:*
Derivací funkce $f$ dostaneme

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Dosazením do vzorce pro výpočet délky grafu dostáváme

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\mathrm{d}x.$$

Substitucí

$$t = \frac{9}{4}x$$
$$\mathrm{d}t = \frac{9}{4}\mathrm{d}x$$

dostaneme

$$L = \frac{4}{9}\int\limits_0^{\frac{9}{4}} \sqrt{1+t}\mathrm{d}t.$$

Pomocí Newtonovy formule dostáváme

$$L = \frac{4}{9}\left[\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{9}{4}} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right).$$

**Příklad 2.2**
*Vypočtěte délku grafu funkce $f(x) = e^x$ na intervalu $\langle 0,a\rangle$, kde $0 < a$.*

*Řešení:*
Opět derivací funkce $f$ dostaneme $f'(x) = e^x$. Dosazením do vzorce pro délku grafu máme

$$L = \int\limits_0^a \sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x.$$

Substitucí

$$\begin{aligned} t &= e^{2x} \\ \mathrm{d}t &= 2e^x \mathrm{d}x \\ \frac{1}{2t}\mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

dostaneme

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_1^{e^{2a}} \frac{\sqrt{1+t}}{t}\mathrm{d}t.$$

Dále například substitucí

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1+t} \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t \\ 2u\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

dostaneme

$$L = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{u^2 \pm 1}{u^2-1}\mathrm{d}u = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} 1\mathrm{d}u - \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u =$$

$$[u]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} - \frac{1}{2}\left( \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \right) = [u]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) - \ln(1-u)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2a}}}.$$

**Příklad 2.3**
*Vypočtěte délku grafu křivky* $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$.

*Řešení:*
Ze zadání vidíme, že daná křivka je symetrická jak podél osy $x$, tak podél osy $y$, tak podél bodu $[0,0]$, viz obrázek 4. Z toho vyplývá, že pro určení celkové délky křivky stačí spočítat délku křivky pouze v prvním kvadrantu. Vyjádřeme křivku v prvním kvadrantu jako funkci od y:

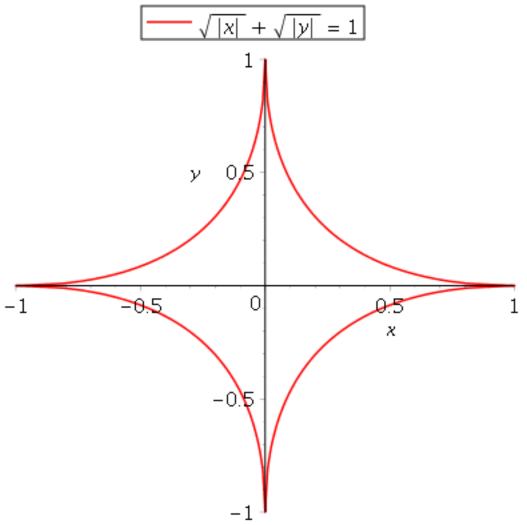
$$\begin{aligned} \sqrt{y} &= 1 - \sqrt{x} \\ y &= 1 - 2\sqrt{x} + x. \end{aligned}$$

Definiční obor této funkce je zřejmě interval $\langle 0,1\rangle$, neboť uvažujeme pouze první kvadrant. Derivací $y$ podle $x$ dostaneme

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

Dosazením do vztahu pro délku grafu funkce dostáváme

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{x - 2\sqrt{x}+1}{x}\right)}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{2x - 2\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x.$$




Obrázek 4: Příklad 2.3.

Substitucí

$$t = \sqrt{x}$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

dostaneme

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{(2t-1)^2 + 1}\mathrm{d}t.$$

Dále substitucí

$$u = 2t - 1$$
$$\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}t$$

dostaneme

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{u^2 + 1}\mathrm{d}u$$

Primitivní funkci k tomuto integrálu nalezneme opět například metodou per-partes

$$\int \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u = \left[\begin{array}{l} f = \sqrt{1+u^2},\ g' = 1 \\ f' = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ g = u \end{array}\right] = u\sqrt{1+u^2} - \int \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = u\sqrt{1+u^2} - \int \frac{u^2 \pm 1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u =$$
$$u\sqrt{1+u^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u - \int \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u = u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{argsinh}(u) - \int \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

čili

$$\int \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{argsinh}(u)\right).$$

Tím dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{argsinh}(u)\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + \operatorname{argsinh}(1)\right),$$

kde jsme využili lichosti funkce $\operatorname{argsinh}(x)$.

# 3 Objem a povrch rotačního tělesa

Na přednášce byly dokázány následující vztahy pro výpočet povrchu a objemu rotačního tělesa.

**Věta 2 (Objem rotačního tělesa)**
*Nechť $f$ je nezáporná na $\langle a, b\rangle$. Potom objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f$ kolem osy $x$ je*

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**Věta 3 (Povrch rotačního tělesa)**
*Nechť funkce $f$ je nezáporná a má spojitou první derivaci $f'$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f$ kolem osy $x$ je*

$$S_f = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Tyto věty aplikujme na následující příklady.

**Příklad 3.1**
*Vypočtěte objem a povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy $x$ křivky dané rovnicí* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

*Řešení:*
Tato křivka se nazývá asteroida. Díky její symetrii, viz obrázek 5 se stačí omezit jen na interval $\langle 0, 1\rangle$. V tomto intervalu dostaneme poloviční povrch a objem daného rotačního tělesa. Tento příklad lze řešit buďto vyjádřením funkce pro první kvadrant jako $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ a dosazením do příslušných vzorců pro objem a povrch. Další možnost je parametrizovat danou křivku jako

$$x = \cos^3(\varphi)$$
$$y = \sin^3(\varphi).$$

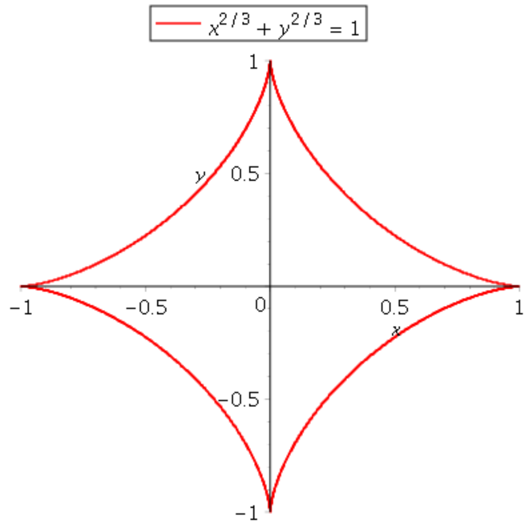
a

$$\mathrm{d}x = \dot{x}(\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

kde tečkou nad $x$ rozumíme derivaci podle $\varphi$. Substitucí ve vztahu pro objem dostaneme

$$V = \pi \int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2(\varphi)\dot{x}(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6(\varphi) 3\cos^2(\varphi)(-\sin(\varphi))\mathrm{d}\varphi =$$

$$3\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(\varphi)\right)^3 \cos^2(\varphi)(-\sin(\varphi))\mathrm{d}\varphi = \bigstar.$$




Obrázek 5: Příklad 3.1.

Dále substitucí

$$\begin{aligned} t &= \cos(\varphi) \\ \mathrm{d}t &= -\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

dostaneme

$$\bigstar = 3\pi \int_0^1 \left(1-t^2\right)^3 t^2 \mathrm{d}t = 3\pi \int_0^1 t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8 \mathrm{d}t = 3\pi \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^9}{9}\right]_0^1 =$$

$$\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) = \frac{16\pi}{105}.$$

Protože pro objem daného rotačního tělesa $V_{ast} = 2V = \frac{32\pi}{105}$.

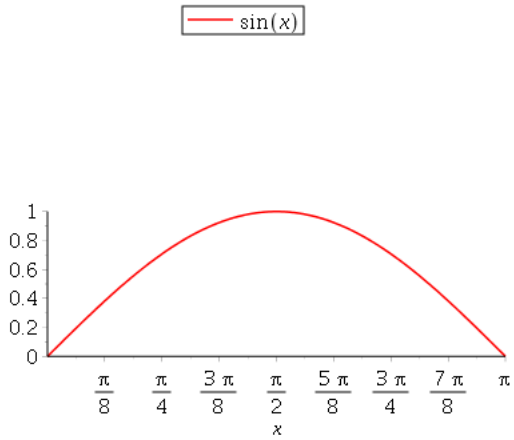
V případě povrchu budeme postupovat obdobně. Dosadíme-li parametrizaci do vzorce pro povrch rotačního tělesa a využitím

$$\begin{aligned} f'(x(\varphi)) &= \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} \\ \dot{x}(\varphi) &= 3\cos^2(\varphi)(-\sin(\varphi)) \\ \dot{y}(\varphi) &= 3\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

dostaneme

$$S = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(\varphi)\sqrt{(\dot{x}(\varphi))^2 + (\dot{y}(\varphi))^2}\,\frac{\dot{x}(\varphi)}{|\dot{x}(\varphi)|}\mathrm{d}\varphi = -6\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi =$$

$$-6\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4(\varphi)\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \bigstar.$$




Obrázek 6: Příklad 3.2.

Substitucí

$$
\begin{aligned}
t &= \sin(\varphi)\\
\mathrm{d}t &= \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

dostaneme

$$\bigstar = -6\pi\int_1^0 t^4\mathrm{d}t = 6\pi\int_0^1 t^4\mathrm{d}t = 6\pi\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6\pi}{5}.$$

Stejně jako u objemu pro celkový povrch platí $S_{ast} = 2S = \frac{12\pi}{5}$.

**Příklad 3.2**

*Vypočtěte objem a povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce $f(x) = \sin x$ kolem osy $x$, kde $x \in \langle 0, \pi\rangle$.*

*Řešení:*

Podívejme se nejprve na graf funkce sin na obrázku 3.2. Z grafu vidíme, že jsou všechny předpoklady pro výpočet objemu a povrchu daného rotačního tělesa splněny a tak stačí pouze dosadit do příslušných vzorců. Dále se zřejmě stačí omezit na interval $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Daný objem a povrch bude pak dvojnásobný.

Objem:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Čili

$$V_{sin} = 2V = \frac{\pi^2}{2}.$$

Povrch:

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \bigstar.$$

Substitucí

$$t = \cos(x)$$
$$\mathrm{d}t = -\sin(x)\mathrm{d}x$$

dostaneme

$$\bigstar = -2\pi \int_1^0 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \pi \left[t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{argsinh}(t)\right]_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \operatorname{argsinh}(1)\right)$$

Čili

$$S_{sin} = 2S = 2\pi\left(\sqrt{2} + \operatorname{argsinh}(1)\right).$$