Kapitola 1

Objem a povrch rotačního tělesa

1.1 Objem rotačního tělesa

Mějme funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechme její graf rotovat kolem osy x. Naším úkolem bude určite objem takto vzniklého tělesa. Tento úkol umíme snadno vyřešit pro konstantní funkci. Je-li totiž $f(x) = c \neq 0$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak vzniklé těleso je válec, jehož základna je kruh o ploše πc^2 a výška válce je $b - a$. Objem válce je $V_f = \pi c^2(b - a)$. Právě této znalosti využijeme při odvození objemu rotačního tělesa. Nejdříve si uvědomme, že rotací grafu funkce f a grafu funkce $|f|$ vznikne stejné rotační těleso. Označme M a m maximum resp. minimum funkce $|f|$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak pro objem V_f tělesa vzniklého rotací grafu funkce f zřejmě platí

$$\pi m^2(b-a) \ \leq \ V_f \ \leq \ \pi M^2(b-a)\,. \tag{1.1}$$

Uvažujeme rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a označme $M_i = \max\limits_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(x)|$ a $m_i = \min\limits_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle}|f(x)|$. Upevněme dílčí interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Použijeme-li (1.1) pro funkci f na tomto dílčím intervalu, dostaneme dolní a horní odhad objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce s definičním oborem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Sečtením objemů přes všechny dílčí intervaly dostaneme pro celkový objem V_f odhad

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \ \leq \ V_f \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}) \tag{1.2}$$

Všimněme si, že výraz napravo je horní součet funkce f^2 při rozdělení σ vynásobený číslem π a analogické tvrzení platí pro výraz nalevo. Tento vztah platí pro každé rozdělení σ. Proto

$$\pi \sup_{\sigma} S_{f^2}(\sigma) \ \leq \ V_f \leq \ \pi \ \inf_{\sigma} S_{f^2}(\sigma) \tag{1.3}$$

Jelikož uvažujeme funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje na tomto intervalu i integrál z funkce f^2, a platí $\int_a^b f^2 = \sup_\sigma S_{f^2}(\sigma) = \inf_\sigma S_{f^2}(\sigma)$. Odvodili jsme tedy tvrzení

Věta 1.1.1. *Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy* x*, je $\pi \int_a^b f^2$.*

Příklad 1.1.2. Rovnice $x^2 + y^2 = R^2$ popisuje kruh o poloměru R se středem v počátku souřadné soustavy. Jeho rotací kolem osy x vznikne koule o poloměru R. Kolem osy x rotuje tedy graf funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ s definičním oborem $\langle -R, R\rangle$. Podle předchozí věty je

$$\text{objem koule o poloměru } R \;=\; \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x \;=\; \pi \Big[R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-R}^{R} \;=\; \tfrac{4}{3}\pi R^3\,.$$

1.2 Plášť rotačního tělesa

Opět necháme rotovat kolem osy x graf funkce $f(x)$ spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Úkolem je spočítat plášť vzniklého rotačního tělesa. Pojem plášť nezahrnujeme povrch kruhů $\pi(f(a))^2$ a $\pi(f(b))^2$. Celý povrch rotačního tělesa získáme až po přičtení ploch těchto kruhů k plášti. K odvození pláště využijeme znalost vzorce pro plášť P komolého kuželе, jehož dolní podstava je kruh o polomeru r_1, horní podstava je kruh o polomeru r_2 a výška v. Platí $P = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$. Protože rotací funkce f a funkce $|f|$ vznikne stejné těleso, bez újmy na obecnosti uvažujme v této sekci pouze nezáporné funkce.

Následující argumentaci uvádíme **pouze pro zájemce** kvůli úplnosti. Výpočet povrchů obecných těles (ne pouze rotačních) bude totiž obsahem dalšího kurzu matematické analýzy.

Nechť f je spojitá nezáporná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, je rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Graf funkce f aproximujeme lomenou čárou sestávající z úseček U_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Úsečka U_i má koncové body $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ a $(x_i, f(x_i))$. Úsečku U_i necháme rotovat kolem osy x. Tím vznikne komolý kužel, označme jej K_i, jehož podstavy mají poloměry $r_1 = f(x_{i-1})$ a $r_2 = f(x_i)$ a výška kužele K_i je $v = x_i - x_{i-1}$. Plášť i-tého komolého kužele je

$$p_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \tag{1.4}$$

Označme $p(\sigma) = \sum_{i=1}^n p_i$. Součet $p(\sigma)$ plášťů kuželů vzniklých rotací úseček U_i je dolním odhadem pláště rotačního tělesa. Podobně jako při definici délky grafu funkce definujeme plášť rotačního tělesa jako

$$P = \sup_\sigma p(\sigma)\,.$$

Upravíme výraz (1.4). Protože f je spojitá na $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, nabývá všech hodnot mezi $f(x_{i-1})$ a $f(x_i)$, speciálně se nabývá i průměru, tj. existuje $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$f(\xi_i) = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}$. Přidejme navíc požadavek, že funkce f má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$. Jako obvykle označíme $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce existuje $\eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takové, že

$$\sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + \big(f'(\eta_i)\big)^2}\ \Delta_i\,.$$

Celkově

$$p(\sigma) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + \big(f'(\eta_i)\big)^2}\,\Delta_i\,.$$

Kdyby pro každé i platilo $\xi_i = \eta_i$, bylo by možno interpretovat $p(\sigma)$ jako integrální součet funkce $2\pi f(x)\sqrt{1 + f('(x))^2}$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Předpoklad $\xi_i = \eta_i$ není však opodstatněný. Můžeme ale upravit

$$p(\sigma) = \mathcal{J}(\sigma) + \mathcal{E}(\sigma)\,, \tag{1.5}$$

kde

$$\mathcal{J}(\sigma) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\sqrt{1 + \big(f'(\eta_i)\big)^2}\,\Delta_i \qquad \text{je integrální součet}$$

a

$$\mathcal{E}(\sigma) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) - f(\eta_i)\Big)\sqrt{1 + \big(f'(\eta_i)\big)^2}\,\Delta_i \qquad \text{je chybový člen.}$$

Jelikož předpokládáme spojitost derivace f' na uzavřeném intervalu, je derivace omezená, řekněme konstantou C. S využitím Lagrangeovy věty lze sčítanec chybového členu odhadnout

$$\big|f(\xi_i) - f(\eta_i)\big|\sqrt{1 + \big(f'(\eta_i)\big)^2}\ \Delta_i\ \le\ C\,|\xi_i - \eta_i|\,\sqrt{1 + C^2}\ \Delta_i \le C\sqrt{1 + C^2}\ \Delta_i^2\,.$$

Pro zkrácení zápisu označme konstantu $\widetilde{C} := 2\pi C\sqrt{1 + C^2}$. Pak

$$\big|\mathcal{E}(\sigma)\big|\ \le\ \widetilde{C}\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2\ \le \frac{1}{n}\,\widetilde{C}\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \frac{1}{n}\,\widetilde{C}\ (b - a)\,. \tag{1.6}$$

Podobně jako při odvozování vzorce pro délku grafu funkce i teď nalezneme normální posloupnost rozdělení (σ_n) takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} p(\sigma_n) = P$.

Ze základní věty integrálního počtu víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f('(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Odhad (1.6) implikuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}(\sigma_n) = 0$. Dosadíme-li členy normální posloupnost rozdělení (σ_n) do vztahu (1.5) a provedeme limitní přechod, dostaneme

$$P = \lim_{n\to\infty} p(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) + \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\sigma_n) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f('(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokázali jsme tedy tvrzení

Věta 1.2.1. *Nechť funkce f má spojitou derivaci f' na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak plášť tělesa vzniklého rotací grafu funkce je $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x$.*

Příklad 1.2.2. Část paraboly $f(x) = x(1 - x)$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$, necháme rotovat kolem osy x a spočítame povrch rotačního tělesa. Protože $f(0) = f(1) = 0$, představuje plášť P už celý povrch rotačního tělesa. Podle předchozí věty

$$P = 2\pi \int_0^1 x(1 - x)\sqrt{1 + (2x - 1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Výpočet integrálu necháme na čtenáři.