1 Taylorův polynom

V následujícím textu se seznámíme s aplikací Taylorova polynomu. Než začneme, připomeneme si teorii z přednášky. Nechť f je reálná funkce reálné proměnné diferencovatelná n-krát v bodě a. Pak lze zkonstruovat n-tý Taylorův polynom se středem v bodě a

$$T_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

Z definice polynomu je ihned patrné, že

$$f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a) \text{ pro všechna } k \in \{0, 1, \ldots, n\} .$$

Dále formulujeme věty, které asociují Taylorův polynom s funkcí f. Řekneme, že reálná funkce reálné proměnné splňuje základní předpoklad v bodě $a \in D_f$ pro stupeň n, právě když

- existuje $H_a \subset D_f$ takové, že pro všechna $x \in H_a$ je funkce f $n-1$ krát diferencovatelná (derivace existuje a je konečná).
- f je v bodě a n-krát diferencovatelná.

Za splnění základních předpokladů lze formulovat následující věty.

Věta 1. *Nechť f splňuje základní předpoklady v bodě a pro stupeň n. Definujeme zbytek $R_n : H_a \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x) .$$

Pak platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{1}$$

Věta 2. *Nechť f splňuje základní předpoklady v bodě a pro stupeň n. Pak T_n je jediný polynom stupně nejvýše n, pro který platí (1). Jeli tedy $P_n(x)$ polynom stupně nejvýše n pro který platí*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) ,$$

kde R_n splňuje (1), pak

$$P_n(x) = T_n(x) .$$

Příklad 3. Uvažujme nyní funkci $f(x) = x^5 + 5x^7 + 3x + 1$. Zkusme spočítat Taylorův polynom stupně 3 v bodě 0. Můžeme postupovat přímočaře z definice a dostáváme

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= 3 \\ f^{(2)}(0) &= 0 \\ f^{(3)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do vzorce pro Taylorův polynom, dostáváme

$$T_3(x) = 1 + 3x.$$

Lze si však ušetřit práci a využít věty 2. Definujeme-li

$$\begin{aligned} P_3(x) &\equiv 3x + 1 \\ R_3(x) &\equiv x^5 + 5x^7, \end{aligned}$$

vidíme, že f lze napsat jako

$$f(x) = P_3(x) + R_3(x)$$

a současně platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_3(x)}{x^3} = \lim_{x \to a} \frac{x^5 + 5x^7}{x^3} = 0.$$

Potom nutně

$$1 + 3x = P_3(x) = T_3(x).$$

Zkusme teď spočítat T_8 v bodě 0. Předchozí postup nám okamžitě dává

$$P_8(x) = x^5 + 5x^7 + 3x + 1,$$

jelikož $R_n(x) \equiv 0$ splňuje (1). Zároveň vidíme, že x^5+5x^7+3x+1 je Taylorovým polynomem v bodě 0 pro libovolný vyšší stupeň (ze stejného důvodu).

Nyní zkusme spočítat T_2 se středem v bodě 2. Opět máme dvě možnosti, z definice dostáváme

$$\begin{aligned} f(2) &= 679 \\ f^{(1)}(2) &= 2323 \\ f^{(2)}(2) &= 6880, \end{aligned}$$

a tedy

$$T_2(x) = 679 + 2323(x-2) + 3448(x-2)^2.$$

Alternativě lze použít druhý postup (Věta 2), který bude v tomto případě výpočetně náročnější.

Příklad 4. Spočteme T_3 centrovaný v 0 pro $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Postupujeme z definice a dostáváme

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f^{(1)}(0) &= 1 \\ f^{(2)}(0) &= 0 \\ f^{(3)}(0) &= 2, \end{aligned}$$

jelikož

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{tg}(x) \\ f^{(1)}(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{6\sin^2(x)}{\cos^4(x)}. \end{aligned}$$

Dosazení do výrazu pro Taylorův polynom nám tedy dává

$$T_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Ukážeme si i jiné způsoby, jak vypočítat Taylorovy polynomy. Připomeneme si formule pro Taylorovy polynomy elementárních funkcí probraných na přednášce. Všechny následující polynomy jsou centrované v bodě 0 (Maclaurinovy rozvoje).

$$
\begin{aligned}
e^{x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{k!} + \omega_{n}(x)\, x^{n}, \text{ kde } \lim_{x\to 0} \omega_{n}(x) = 0, \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \omega_{2n+1}(x)\, x^{2n+1}, \text{ kde } \lim_{x\to 0} \omega_{2n+1}(x) = 0, \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!} x^{2k} + \omega_{2n}(x)\, x^{2n}, \text{ kde } \lim_{x\to 0} \omega_{2n}(x) = 0, \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k} + \omega_{n}(x)\, x^{n}, \text{ kde } \lim_{x\to 0} \omega_{n}(x) = 0, \\
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^{k} + \omega_{n}(x)\, x^{n}, \text{ kde } \lim_{x\to 0} \omega_{n}(x) = 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Je vhodné si uvědomit, že ze závěrů (2) s použitím věty 2 vidíme, že výrazy typu $\omega_n(x)\, x^n$ mají vlastnost (1), a tudíž polynomy vlevo od něj jsou skutečně Taylorovy polynomy.

Použití těchto polynomů budeme demonstrovat na následujících příkladech.

Příklad 5. Spočteme Taylorův polynom n-tého řádu funkce $f(x) = \ln(5-3x)$ v bodě $a = 0$. Nejprve si upravíme funkce na tvar

$$
f(x) = \ln(5-3x) = \ln(5) + \ln\left(1 - \frac{3}{5}x\right).
$$

Aplikujeme pak (2) a dostáváme

$$
f(x) = \ln(5) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(-\frac{3}{5}x\right)^{k} + \omega_n\left(-\frac{3}{5}x\right)\left(-\frac{3}{5}x\right)^{n}, \text{ kde } \lim_{y\to 0} \omega_n(y) = 0.
$$

Dle věty 2 víme, že pokud splníme podmínku (1) pak máme Taylorův polynom. Ověříme ji pomocí věty o složené funkci (předpoklady jsou splněné)

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\omega_n\left(-\frac{3}{5}x\right)\left(-\frac{3}{5}x\right)^{n}}{x^{n}} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n} \lim_{x\to 0} \omega_n\left(-\frac{3}{5}x\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n} \lim_{y\to 0} \omega_n(y) = 0.
$$

Příklad 6. Zkusíme spočítat Taylorův polynom stupně 3 složené funkce $f(x) = \sin(\sin(x))$ se středem v bodě 0. Z polynomů (2) víme, že

$$
\sin(t) = t - \frac{t^{3}}{6} + \omega_3(t)\, t^{3} \text{ kde } \lim_{t\to 0} \omega_3(t) = 0.
$$

Aplikujeme-li tento vztah na vnitřní i vnější funkci, dostáváme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \omega_3(x)\,x^3 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \omega_3(x)\,x^3\right)^3$$
$$+\omega_3\left(x - \frac{x^3}{6} + \omega_3(x)\,x^3\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \omega_3(x)\,x^3\right)^3.$$

Roznásobení člen po členu by bylo moc náročné, existuje však sandnější způsob. Představíme-li si, že roznásobujeme závorky, zjistíme, že pouze několik členů bude mít tu vlastnost, že po vydělení x^3 nejdou k nule. Označíme-li sumu členů, které jdou k nule (pro $x \to 0$) po roznásobení souhrnně jako $\omega(x)$ můžeme psát

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \omega(x)\,x^3.$$

S použitím věty 2 víme, že

$$T_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3.$$

Příklad 7. Spočtěte Taylorův polynom se středem v bodě 0 pro $n \geq 2$ funkce

$$f(x) = \left(x^2 - 6x\right)\sqrt[3]{1 - x^2}.$$

Jelikož $x^2 - 6x$ je sám svým polynomem pro všechny stupně vyšší než 2, stačí rozvinout $\sqrt[3]{1 - x^2}$. Užijeme základních polynomů a získáváme

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{3}}{k} (-1)^k x^{2k} + \omega_n\left(-x^2\right)\left(-x^2\right)^n \text{ kde } \lim_{y\to 0} \omega_n(y) = 0.$$

Aplikací tohoto polynomu dostáváme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{3}}{k} (-1)^k x^{2k+2} - 6\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{3}}{k} (-1)^k x^{2k+1}$$
$$+ \left(x^2 - 6x\right)\omega_n\left(-x^2\right)\left(-x^2\right)^n = P_{2n+2}(x) + R(x).$$

Limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(x^2-6x\right)\omega_n\left(-x^2\right)\left(-x^2\right)^n}{x^{2n+2}}$ vede na nedefinovaný typ $\frac{\infty}{\infty}$, a tak ji nelze bez dodatečných informací o $\omega_n$vyhodnotit, lze však ukázat, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - 6x\right)\omega_n\left(-x^2\right)\left(-x^2\right)^n}{x^{2n+1}} = 0$$

a tak zahrnutím n-tého členu z první sumy ($\binom{\frac{1}{3}}{n} (-1)^n x^{2n+2}$) do zbytku dostáváme Taylorův polynom řádu $2n + 1$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\frac{1}{3}}{k} (-1)^k x^{2k+2} - 6 \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{3}}{k} (-1)^k x^{2k+1}.$$

Uvědomme si, že výsledek z předešlého příkladu nás neomezuje v určování Taylorova polynomu pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pokud by n nebylo liché, můžeme napočítat polynom o stupně $n+1$ dle formule a pak vynechat poslední člen.

Příklad 8. Pokusme se nyní vypočítat Taylorův polynom řádu n se středem v 0 funkce

$$f(x) = \arccos(x).$$

Pokud bychom se pokusili derivovat tuto funkci, zjistili bychom, že předpis se stane velice komplikovaný již u několika prvních derivací. Proto můžeme namísto tohoto přístupu využít vztahu mezi Taylorovým polynomem funkce f a Taylorovým polynomem derivace f'. Jelikož

$$f(x) = \arccos(x)$$

je

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

a můžeme využít vztahů pro elementární Taylorovy polynomy abychom ukázali, že

$$T_{f',2n}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}$$

pak formální integrací dostáváme

$$T_{f,2n+1}(x) = C - \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

kde integrační konstantu dostaneme dosazením bodu $x = 0$ do předpisu funkce

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = C - \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{0^{2k+1}}{2k+1} = C,$$

dohromady tedy máme

$$T_{f,2n+1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Příklad 9. Spočteme Taylorův polynom libovolného stupně funkce

$$f(x) = \frac{1}{3x+5}$$

Se středem v bodě 0.

Rovnou upravíme výraz a použijeme standardní polynom

$$f(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{3}{5}x} = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{-1}{k}\left(\frac{3}{5}x\right)^k + \omega_n\left(\frac{3}{5}x\right)\left(\frac{3}{5}x\right)^n\right),$$

kde opět $\lim\limits_{t\to 0}\omega_n(t) = 0$, jako v předchozích příkladech využijeme větu o složené funkci společně s větou 2 abychom mohli konstatovat, že

$$T_n(x) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\binom{-1}{k}\left(\frac{3}{5}x\right)^k = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{3}{5}x\right)^k,$$

kde $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ plyne z definice zobecněného kombinačního čísla.

Příklad 10. Spočteme n-tý Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \frac{x^6}{15+2x-x^2}$$

se středem v bodě 0.

Po vytknutí x^6 můžeme výraz algebraicky upravit následujícím způsobem

$$f(x) = \frac{x^6}{8}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{5-x}\right) = \frac{x^6}{8}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}x} + \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}x}\right).$$

Dále využijeme jednoho ze standardních polynomů do stupně $n-6$

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{x^6}{24}\left(\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\left(\frac{1}{3}x\right)^k + \omega_{n-6}\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)^{n-6}\right) \\ &+ \frac{x^6}{40}\left(\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\left(-\frac{1}{5}x\right)^k + \omega_{n-6}\left(-\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{1}{5}x\right)^{n-6}\right) \\ =& \frac{1}{24}\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\left(\frac{1}{3}x\right)^{k+6} + \frac{1}{40}\sum_{k=0}^{n-6}\binom{-1}{k}\left(-\frac{1}{5}x\right)^{k+6} \\ &+ \omega_{n-6}\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right)^n + \omega_{n-6}\left(-\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{1}{5}x\right)^n. \end{aligned}$$

Máme tedy opět funkci ve tvaru

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

kde $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$ a tudíž máme Taylorův polynom stupně n pro $n \geq 7$, jelikož jsme mohli pouze rozvinout kladná $n - 6$. To však nevadí, jelikož polynomy nižších řádů dostaneme odstraněním vyšších mocnin.

2 Užití Taylorova polynomu pro výpočet limit

Předvedeme jednu z možných aplikací Taylorova polynomu.

Příklad 11. Chceme spočítat reálnou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$ a nabízí se například řešení pomocí L'Hospitalova pravidla, které by ale vedlo ke komplikovanému výrazu v čitateli. Dále by nebylo vůbec jisté, zda bychom se nakonec dobrali k výsledku (definovanému výrazu). Použijeme tedy Taylorův polynom. Provedeme rozvoj obou výrazů v čitateli se středem v 0. Podobně jako v příkladu 6 si spočítáme polynom pro $n = 5$ pro $\sin(\sin(x))$

$$\begin{aligned}\sin(\sin(x)) =& x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \omega_5(x)\,x^5 \\ &+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \omega_5(x)\,x^5\right)^3 \\ &+ \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \omega_5(x)\,x^5\right)^5 \\ &+ \omega_5\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \omega_5(x)\,x^5\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \omega_5(x)\,x^5\right)^5.\end{aligned}$$

Opět jako v jednom z předchozím příkladu, můžeme vybrat jen ty mocniny, které po podělení x^5nepůjdou k nule a ostatní zahrnout do zbytku

$$\sin(\sin(x)) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \widetilde{\omega}_5(x)\,x^5.$$

S užitím standardního polynomu můžeme taktéž rozvinout

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + \omega_2\left(-x^2\right)x^5.$$

Použijeme-li tyto dílčí polynomy k dosazení do limity, dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{19}{90}x^5 + \widetilde{\omega}_5(x)\,x^5 + \omega_2\left(-x^2\right)x^5}{x^5} = \frac{19}{90} + \lim_{x\to 0}\widetilde{\omega}_5(x) + \lim_{x\to 0}\omega_2\left(-x^2\right) = \frac{19}{90}.$$

Příklad 12. Spočítejte reálnou limitu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{1}{x}\to 0$ když $x\to+\infty$ můžeme psát

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\omega_3\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}\text{ kde }\omega_3\left(\frac{1}{x}\right)\to 0\text{ pro }x\to+\infty,$$

kde zvolený řád polynomu je motivován řádem v polynomu kterým násobíme $e^{\frac{1}{x}}$. Celkem dostaneme (roznásobujeme-li od nejvyšších mocnin po nižší)

$$\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}=x^3+\frac{1}{6}+\widehat{\omega}\left(x\right)\text{ kde }\widehat{\omega}\left(x\right)\to 0\text{ když }x\to+\infty.$$

Obdobně zpracujeme druhý ze sčítanců

$$\sqrt{x^6-1}=x^3\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^6}}=x^3\left(1-\frac{1}{2x^6}+\omega_1\left(-\frac{1}{x^6}\right)\left(-\frac{1}{x^6}\right)\right)=x^3-\widetilde{\omega}\left(x\right),$$

$$\text{kde }\widetilde{\omega}\left(x\right)\to 0\text{ pro }x\to+\infty.$$

Celkově tedy dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+\frac{1}{6}+\widehat{\omega}\left(x\right)-x^3+\widetilde{\omega}\left(x\right)\right)=\frac{1}{6}.$$