1 Aproximace funkcí s pomocí Taylorova polynomu

Navážeme na minulé cvičení rozšířením diskuse o Taylorově polynomu. Nejprve zopakujeme základní věty z přednášky týkající se Lagrangeova tvaru zbytku.

Věta 1. *Nechť f je reálná funkce reálné proměnné. Buď $a \in D_f$ takové, že na nějakém okolí $H_a \subset D_f$ je derivace řádu $n+1$ spojitá. Pak pro libovolné $x \in H_a$ existuje $\xi(x)$, které leží mezi x a a takové, že*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ukážeme užitečnost této věty pro výpočet přibližných hodnot funkcí.

Příklad 2. Spočteme přibližnou hodnotu $\ln\left(\frac{11}{10}\right)$ s přesností 10^{-5}. Z minulého cvičení již víme, že

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n(x).$$

Vzhledem k tomu, že přirozený logaritmus jistě splňuje předpoklady věty 1, můžeme ji použít k odhadu chyby. Napíšeme si výraz pro zbytek pro libovolné $n \in \mathbb{N}$

$$R_n\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1},$$

kde $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$. K tomu, abychom mohli vyhodnotit zbytek, potřebujeme spočítat $n+1$. derivaci funkce. Zderivováním několika prvních členů funkce f a následnou indukcí lze ukázat (domácí cvičení), že

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Pro tvar zbytku tedy máme

$$R_n\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}.$$

Chceme odhadnout tento zbytek. Vzhledem k tomu, že víme, že $\xi \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$ platí

$$\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(1)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \leq 10^{-(n+1)}.$$

Z tohoto vidíme, že stačí volit $n = 4$. Pro toto n máme

$$T_4\left(\frac{11}{10}\right) = 0,1 - 0,005 + 0,000\overline{3} - 0,000025 = 0,095308\overline{3}.$$

Lze si ověřit, že tato aproximace opravdu souhlasí do řádu 10^{-5}.

Příklad 3. Spočítáme $\sqrt[12]{4000}$ s přesností na 10^{-5}.

Jelikož na přednášce jsme si ukázali, že zbytek v Taylorově polynomu funkce $(1+x)^{\alpha}$ lze odhadnout pouze pro $x \in (-1,1)$, nelze přímo aplikovat vztah

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x).$$

Upravíme místo toho výraz a aproximaci použijeme až posléze, použijeme rozvoj

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{4000} &= \sqrt[12]{2^{12} - 96} = 2\sqrt[12]{1 - \frac{96}{2^{12}}} \\ &= 2\sqrt[12]{1 - \frac{3}{2^7}} = 2\left(1 - \frac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{12}} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{12}}{k}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^k + 2R_n\left(-\frac{3}{2^7}\right).\end{aligned}$$

Abychom zjistili, kolik členů potřebujeme na aproximaci, musíme vyhodnotit derivaci. Lze ukázat, že pro

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

dostaneme pro $n+1$. derivaci vztah

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

Platí tedy, že

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

kde ξ leží mezí 0 a x. Dosadíme konkrétní hodnoty do výpočtu $x = -\frac{3}{2^7}$ a $\alpha = \frac{1}{12}$ a dostáváme pro zbytek odhad

$$\left|2\binom{\frac{1}{12}}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}\left(-\frac{3}{2^7}\right)^{n+1}\right| \leq 2\left|\binom{\frac{1}{12}}{n+1}\right|\frac{1}{\left(1-\frac{3}{2^7}\right)^{n+1-\frac{1}{12}}}\left(\frac{3}{2^7}\right)^{n+1}.$$

Je dobré si v tuto chvíli uvědomit, že ve zbytku figurují součinitelé, kteří zlepšují odhad nebo zhoršují se zvyšujícím se n. V tuto chvíli nemusíme exaktně řešit jaké n je potřeba, stačí zvolit n a získat chybu.

Domácí cvičení: zkuste ověřit, zda stačí zvolit $n = 3$, aby aproximace byla alespoň řádu 10^{-5}.

Příklad 4. Jaké maximální chyby se dopustíme, když použijeme aproximaci

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

pro $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Pokusíme se tedy spočítat zbytek. Můžeme napsat, že

$$\sin(x) = T_3(x) + R_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(\xi)}{24}x^4,$$

kde ξ je někde mezi 0 a x. Lze tedy odhadnout (s pomocí omezenosti sinu a $|x| \leq \frac{1}{2}$)

$$|R_3(x)| \leq \left|\frac{\sin(\xi)}{24}x^4\right| \leq \frac{1}{384}.$$

Pro lepší odhad si můžeme uvědomit, že koeficient u čtvrtého členu je nulový ($T_3 = T_4$) a tak vlastně máme

$$\sin(x) = T_4(x) + R_4(x).$$

Pak dostáváme analogickým postupem

$$|R_4(x)| \leq \left|\frac{\cos(\xi)}{120}x^5\right| \leq \frac{1}{3840}.$$

Příklad 5. Z jak velikého okolí 0 lze zvolit x, aby při aproximaci

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{6}$$

byla chyba nejvýše řádu 10^{-4}.

Opět můžeme provést analogický odhad. Opět máme

$$\cos(x) = T_3(x) + R_3(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\cos(\xi)}{24}x^4.$$

Takže pro zbytek odhadneme

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\cos(\xi)}{24}x^4\right| \leq \frac{1}{24}|x|^4 \overset{!}{\leq} 10^{-4}.$$

Reorganizace a odmocnění nerovnosti dává

$$|x| \leq \frac{\sqrt[4]{24}}{10} \approx 0.22.$$

Pro splnění přesnosti tedy stačí brát $\in (-0.22, 0.22)$.

Příklad 6. Jaké minimální přirozené n máme vzít, abychom při aproximaci e^x Taylorovým polynomem stupně n udělali chybu nejvýše 10^{-4} jeli $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Víme, že lze napsat e^x ve tvaru

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ kde } \xi \text{ je mezi } 0 \text{ a } x.$$

Z tohoto plyne, že určite bude $\xi \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a tudíž můžeme udělat odhad zbytku

$$\left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \sqrt{e} \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2^n}.$$

Nyní chceme stlačit výraz na pravé straně pod 10^{-4}, to bude zaručeno pokud $n = 5$.