Organizace zkoušek z MAN2 v letním semestru 21/22

- Zkoušku může skládat jenom student, který má předmět MAN2 zapsaný ve školním roce 21/22 a získal z tohoto předmětu zápočet.
- **Poslední řádný** termín bude 1.7. 2022. V září budou **pouze opravné** termíny.
- Zkouška začíná písemnou částí, která ověří základní znalosti MAN2. Test bude obsahovat 4 otázky z níže uvedeného seznamu.
- **Písemná část** se koná **jednou týdně a je společná pro všechny termíny daného týdne**. Při přihlašování na ústní zkoušku se nezapomeňte podívat, kdy se píše v daném týdnu test.
- K ústní části postoupí pouze student, který získá více než polovinu bodů z písemné části. V ústní částí se ověřuje znalost dalších vět a jejich důkazů. Student, který sice má zápočet, ale z některé ze tří zápočtových písemek získal málo bodů, může u ústní zkoušky dostat k řešení i příklad z oblasti, kde neprokázal dostatečné počtářské dovednosti.

Otázky pro test základních znalostí z Matematické analýzy LS (test předcházející ústní zkoušce)

V zadání písemky bude za $\cdots$ dosazen vhodný objekt, tj. interval, funkce, číslo atp.

(1) Definujte vlastnost: funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I. Dejte příklad funkce f a intervalu I, na kterém je funkce spojitá, ale není tam spojitá stejnoměrně. Může být v takovém příkladě interval I uzavřený? Vše zdůvodněte.

(2) Definujte n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a včetně podmínek, za jakých jej lze zkonstruovat. Popište vlastnost, která vynucuje tvar Taylorova polynomu. Uveďte příklad funkce, ke které lze v bodě $a = \cdots$ zkonstruovat 0-tý Taylorův polynom a nelze zkonstruovat 1. Taylorův polynom. Vše zdůvodněte.

(3) Napište Taylorův vzorec pro n-tý Taylorův polynom a zbytek v tomto vzorci vyjádřete v Lagrangeově tvaru (včetně podmínek, za kterých má vše smysl). Pro zadanou funkci $f = \cdots$, bod $a = \cdots$ a $n = \cdots$ napište konkrétní tvar všech výrazů v Taylorově vzorci nebo zdůvodněte, že zadané f, a, n nesplňují podmínky požadované Taylorovým vzorcem.

(4) Definujte číselnou řadu, pojem její konvergence a divergence. Uveďte příklady konvergentní, podstatně divergentní i oscilující řady, vždy s odůvodněním této vlastnosti. Zdůvodněte, proč řada s kladnými členy nemůže být oscilující.

(5) Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je nutná pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ukažte, že to není podmínka postačující.

(6) Vyslovte d'Alembertovo kritérium (v limitním nebo nelimitním tvaru) pro konvergenci řady s kladnými členy, dejte příklad konvergentní řady s kladnými členy, pro kterou toto kritérium rozhodne, a příklad konvergentní řady s kladnými členy, pro kterou toto kritérium nerozhodne. Zdůvodněte, proč jsou Vami zadané řady konvergentní.

(7) Vyslovte Raabeovo kritérium pro konvergenci řady s kladnými členy. Dejte příklad konvergentní řady, o jejíž konvergenci toto kritérium rozhodne a doložte to výpočtem. Dejte příklad konvergentní řady s kladnými členy, o jejíž konvergenci toto kritérium nerozhodne a odvoďte, že řada skutečně konverguje.

(8) Vyslovte Dirichletovo kritérium. Dejte příklad řady, která má současně tyto tři vlastnosti: 1) konverguje neabsolutně, 2) o její konvergenci rozhodne Dirichletovo kritérium, 3) o její konvergenci nerozhodne Leibnizovo kritérium. Vše zdůvodněte.

(9) Definujte absolutně i neabsolutně konvergentní řadu. Vyslovte Bolzanovo-Cauchyovo kritérium pro konvergenci řady a jeho pomocí dokažte, že z konvergence řady $\sum |a_n|$ plyne konvergence řady $\sum a_n$.

(10) Definujte řadu se střídavými znaménky a vyslovte Leibnizovo kritérium. Dejte příklad neabsolutně konvergentní řady se střídavými znaménky, o jejíž konvergenci toto kritérium rozhodne a doložte to výpočtem. Dejte příklad neabsolutně konvergentní řady se střídavými znaménky, o jejíž konvergenci toto kritérium nerozhodne a odvoďte jiným způsobem, že řada konverguje.

(11) Definujte přerovnání řady a vyslovte věty, které dokládají různé chování řad vzhledem k přerovnání.
(12) Definujte uzávorkování řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podle posloupnosti (k_n). Pro řadu se členy $a_n = \cdots$ a posloupnost $k_n = \cdots$ napište třetí člen uzávorkované řady. Vyslovte věty, které dávají do souvislosti konvergenci původní a uzávorkované řady.
(13) Jsou dány dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Definujte součin těchto řad. Poté definujte součinovou řadu těchto dvou řad. Jak vypadá n-tý člen sučinové řady v případě, že $a_n = \cdots$ a $b_n = \cdots$?
(14) Definujte mocninnou řadu a obor její konvergence. Napište vzorec pro výpočet poloměru konvergence a vysvětlete, v jakém je vztahu k oboru konvergence. Dejte příklad mocninné řady, která má obor konvergence $(-\rho, \rho\rangle$, kde $\rho = \cdots$ (popřípadě jiné varianty uzavřenosti a otevřenosti intervalu), a zdůvodněte, že je tomu tak.
(15) Vyslovte větu o derivování mocninné řady. Dejte příklad mocninné řady s oborem konvergence $\langle -\rho, \rho\rangle$, jejíž derivace má obor konvergence $\langle -\rho, \rho)$, kde $\rho = \cdots$. (popřípadě jiné varianty uzavřenosti a otevřenosti intervalu). Výpočtem doložte, že se jedná o požadovaný příklad.
(16) Definujte primitivní funkci. Jaká vlastnost funkce zaručuje, že k ní exituje primitivná funkce? Dejte příklad funkce defnované na $I = \cdots$, která nemá na tomto intervalu primitivní funkci a zdůvodněte proč.
(17) Popište, čemu se říká rozklad na parciální zlomky (tj. co se rozkládá a na co se to rozkládá).
(18) Popište, jak se hledá primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+\gamma}$ v případě, kdy diskriminant kvadratického výrazu ve jmenovateli je a) kladný, b) roven nule, c) záporný. Pro každý z těchto případu výpočet proveďte.
(19) Hledáme neurčitý integrál $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde $R(x, y)$ je podíl polynomů ve dvou proměnných. Napište, jaká substituce převede tuto úlohu na hledání $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, kde $p(x), q(x)$ jsou polynomy v jedné proměnné. Odvoďte, co při této substituci dosazujeme za $\sin x$ a $\cos x$.
(20) I_k označuje pro každé $k \in \mathbb{N}$ primitivní funkci k funkci $\frac{1}{(x^2+1)^k}$ na $\mathbb{R}$. Odvoďte vztah mezi I_{k+1} a I_k. Pomocí tohoto vztahu spočítejte I_3.
(21) Definujte rozdělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ a dolní součet $s(\sigma)$ funkce f při tomto rozdělní. Spočítejte $s(\sigma)$ pro funkci $f(x) = \cdots$ na intervalu $\langle a, b\rangle = \cdots$ při rozdělení $\sigma = \cdots$.
(22) Dolní integrál $\int_{\underline{a}}^{b} f$ je definován jako supremum jisté (jaké? popište) množiny. Pro funkci $f(x) = \cdots$ a interval $\langle a, b\rangle = \cdots$ napište alespoň dva prvky množiny, jejíž supremum definuje $\int_{\underline{a}}^{b} f$.
(23) Definujte horní integrál $\int_a^{\overline{b}} f$ funkce f (včetně podmínek na funkci f a zavedení všech symbolů, které při definici použijete). Poté napište, jak lze $\int_a^{\overline{b}} f$ vyjádřit jako limitu jisté (jaké ?, popište) posloupnosti horních součtů funkce f.
(24) Vyslovte nutnou a postačující podmínku pro existenci určitého (NE zobecněného) Riemannova integrálu $\int_a^b f$. S použitím této podmínky ukažte, že 1) Dirichletova funkce nemá integrál, 2) $\int_{-1}^{2} sign\, x\,\mathrm{d}x$ existuje.
(25) Definujte integrální součet $\mathcal{J}(\sigma)$ funkce f na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ a rozdělní σ. Najděte dva různé integrální součty pro funkci $f = \cdots$ a interval $I = \cdots$. Vyslovte základní větu integrálního počtu.
(26) Vyslovte větu o vztahu existence $\int_a^b f$ a $\int_a^b |f|$ pro určitý (NE zobecněný) Riemannův integrál. Zdůvodněte, proč tvrzení nelze vyslovit ve tvaru ekvivalence.
(27) Vyslovte Newtonovu formuli pro výpočet určitého (NE zobecněného) Riemannova integrálu a větu o substituci v tomto integrálu. Použití věty o substituci ilustrujte na Vámi zvoleném příkladě.
(28) Definujte délku grafu funkce f spojité na $\langle a, b\rangle$. Poté vyslovte větu pro výpočet délky grafu pomocí určitého integrálu.
(29) Definujte zobecněný Riemannův integrál. Dejte příklad funkce f definované na $\langle a, b\rangle = \cdots$, pro kterou existuje zobecněný integrál $\int_a^b f$, ale neexistuje určitý Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$. Vše odůvodněte.
(30) Vyslovte integrální kritérium pro konvergenci řad. Jeho pomocí odvoďte, pro jaké $\alpha > 0$ řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\ln(n+1)\right)^{\alpha}}$ konverguje resp. diverguje.