

# Program na cvičení 4. -6. týdne výuky

## 1 Téma: Určitý integrál, aplikace a zobecnění

### 1.1 Výpočet určitého integrálu

1.  $\int_0^2 [e^x] dx$
2.  $\int_0^2 |1 - x| dx$
3.  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sin x} dx$
4.  $\int_0^{\pi/2} \cos^{20} x dx$  a  $\int_0^{\pi/2} \cos^{19} x dx$

### 1.2 Výpočet plochy

1. Vypočítejte obsah elipsy zadané rovnicí  $x^2 + xy + y^2 = 1$
2. Vypočítejte plochu ohraničenou parabolou  $y = x^2$  a přímkou  $x + y = 2$ .
3. V jakém poměru dělí parabola  $y^2 = 2x$  plochu kruhu  $x^2 + y^2 = 8$  ?
4. Vypočítejte obsah plochy ohraničené body křivky  $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$  .

### 1.3 Integrál jako limita posloupnosti

1. Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{2}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right)$$

2. Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}$$

3. Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

## 1.4 Integrál jako funkce horní/dolní meze

1. Zderivujte  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$
2. Zderivujte  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$
3. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x (e^{t^2})^2 dt}$$

## 1.5 Délka grafu funkce

1. Vypočtete délku grafu funkce  $f(x) = x\sqrt{x}$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .
2. Vypočtete délku grafu funkce  $f(x) = e^x$  na intervalu  $\langle 0, a \rangle$ , kde  $0 < a$ .
3. Vypočtete délku grafu funkce  $f(x) = \ln \cos x$  na intervalu  $\langle 0, a \rangle$ , kde  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ .
4. Vypočtete délku grafu křivky  $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ .

## 1.6 Objem a povrch rotačního tělesa

1. Vypočtete objem a povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy  $x$  křivky dané rovnicí  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ .
2. Vypočtete objem a povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce  $f(x) = \sin x$  kolem osy  $x$ , kde  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ .
3. Vypočtete objem a povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy  $x$  plochy ohraničené

$$\text{parabolou } y = x(3-x) \quad \text{a} \quad \text{přímkou } y = x$$

## 1.7 Zobecněný integrál a konvergence

1. Spočítejte  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx$
2. Spočítejte  $\int_0^2 \frac{1}{x^2+x-2} dx$
3. Pro  $p > 0$  rozhodněte o konvergenci

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

a vypočtete hodnotu pro  $p \in \mathbb{N}$ .

4. Rozhodněte o konvergenci integrálu

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x \cdot \cos^q x} dx$$

v závislosti na parametrech  $p, q \in \mathbb{R}$

5. Spočítejte  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$