Program cvičení na 9. - 11. týden výuky LS 2020

Čísla odkazů u návodů odpovídají textu přednášky na internetových stránkách E. Pelantové (NE tištěnému skriptu)

1 Téma: Taylorovy polynomy

1.1 Určení Taylorových polynomů

1. Pro funkci $f(x) = x^5 + 5x^7 + 3x + 1$ odvoďte

   a) $T_3(x)$ v bodě $a = 0$;

   b) $T_8(x)$ v bodě $a = 0$;

   c) $T_2(x)$ v bodě $a = 2$.

2. Z definice odvoďte 3. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ pro funkci

$$f(x) = \mathrm{tg}(x)$$

3. Odvoďte v bodě $a = 0$ tyto Taylorovy polynomy (lze použít Větu 6.1.12 a už odvozené Taylorovy polynomy funkcí e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$ a $(1+x)^\alpha$. Inspirujte se příkladem 6.1.13).

   a) $T_n(x)$ pro funkci $f(x) = \ln(5 - 3x)$;

   b) $T_3(x)$ pro funkci $f(x) = \sin(\sin x)$.

   c) $T_n(x)$ pro funkci $f(x) = (x^2 - 6x)\sqrt[3]{1 - x^3}$;

4. Odvoďte n-tý Taylorův polynom funkcí

$$\arccos x \quad \text{a} \quad \arcsin x$$

   v bodě $a = 0$.

   Návod: Inspirujte se příkladem 6.1.14 a využijte Poznámku před tímto příkladem.

5. Odvoďte n-tý Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \frac{1}{3x+5}\,.$$

6. Odvoďte n-tý Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \frac{x^6}{15 + 2x - x^2}$$

   v bodě $a = 0$.

   Návod: Rozložte na parciální zlomky $\frac{1}{15+2x-x^2} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{5-x}$ a postupujte jako v předchozím příkladě.

1.2 Výpočet limit pomocí Taylora

Podobné řešené příklady jsou 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6

7. Spočítejte limitu (přepsaním funkcí pomocí Taylorova vzorce)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$$

8. Spočítejte limitu (přepsaním funkcí pomocí Taylorova vzorce)

$$\lim_{x\to +\infty} \Big((x^3 - x^2 + \tfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 - 1} \Big)$$

1.3 Výpočet hodnoty funkce

Řešený příklad je 6.2.3 a 6.2.4.

9. Spočítejte s přesností 10^{-5} hodnotu $\ln(1.1)$.

10. Spočítejte s přesností 10^{-5} hodnotu $\sqrt[12]{4000}$.

    Návod: $\sqrt[12]{4000} = \sqrt[12]{2^{12} - 96} = 2\left(1 - \frac{3}{2^7}\right)^{\frac{1}{12}}$.

11. Jaké maximální chyby se dopustíme, když při výpočtu funkce $\sin x$ použijeme přibližné vyjádření

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{pro } x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

12. Z jak velkého okolí nuly mohu brát x, aby při použití vzorce

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

    jsme se dopustili chyby menší než 10^{-4} ?

13. Jaké minimální n máme vzít, aby při použití vzorce

$$e^x \doteq T_n(x) \quad \text{na každé} \quad x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

    jsme se dopustili chyby menší než 10^{-4} ?

1.4 Užití Taylorova vzorce při konvergenci řad

U následujících tří příkladů upravte n-tý člen řady pomocí Taylorova vzorce a rozhodněte o konvergenci řady. Inspirujte se příkladem 6.1.8.

14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p}$ Návod: $\frac{(-1)^n}{\left(n+(-1)^n\right)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$

2 Téma: Mocninné řady

2.1 Obor konvergence mocninné řady

1. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

2. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$

3. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$.
   Svůj výpočet zkontrolujte dosazením $x = \frac{3}{4}$.

4. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$

2.2 Rozvoj funkce do mocninné řady

V následujících příkladech využijte znalosti rozvoje do mocninné řady pro funkce

- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ pro každé $x \in (-1, 1]$
- $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$ pro každé $x \in (-1, 1)$

5. Rozviňte do mocninné řady $\sin x$ s použitím důkazu, že Lagrangeův zbytek $R_n(x) \to 0$, když $n \to \infty$, a to pro každé $x \in \mathbb{R}$. Postup je obdobný příkladu 6.2.5

6. Rozvoj $f(x) = \ln(2+3x)$ v bodě $a = 1$

7. Rozvoj $f(x) = \arcsin x$ v bodě $a = 0$. Inspirujte se příkladem 7.2.1.

8. Rozvoj $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ v bodě $a = 0$.

9. Rozvoj $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$ v bodě $a = 0$

10. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = (1+x)e^x$ v bodě $a = 0$.

11. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ v bodě $a = 0$.

12. Rozviňte do mocninné řady $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ v bodě $a = 0$

    Návod: roznásobte dvě mocninné řady pomocí součinové řady, viz Důsledek 5.4.8 a postupem při součinu komplexních exponenciál před začátkem sekce 7.3.

2.3 Součet řady

Inspirujte se v kapitole 7.3. Aplikace mocninných řad bodem 1) Sčítání nekonečných sum.

13. Sečtěte mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$

14. Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

15. Sečtěte řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, n$