GMF 1
1

Geometrické metody fyziky 1

Literatura: Jürgen Jost: Geometry and Physics, Springer 2010

Marián Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov

Theodore Frankel: The Geometry of Physics, Cambridge UP

Dvě základní oblasti matematiky zkoumající geometrické vlastnosti:

a) algebraická geometrie – útvary v daném prostoru ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{CP}^n$, ...) zadané jako množina řešení (systémů) polynomiálních rovnic, tzv. algebraické variety (variety), mohou obsahovat různé typy singularit, viz např. $x \cdot y = 0$ v $\mathbb{R}^2[x,y]$

b) diferenciální geometrie – zkoumání topologických prostorů lokálně vypadajících jako $\mathbb{R}^n$, ze kterého se na ně přenáší pojmy známé z analýzy. Podstatné jsou vnitřní vlastnosti a jejich popis v různých souřadnicích, nikoliv způsob vnoření do nějakého vektorového či afinního prostoru. Základním pojmem je diferencovatelná (neboli hladká) varieta.

Uvažujme topologický prostor (M, τ) s následujícími vlastnostmi:

1) (M,τ) je Hausdorffův, tj. $\forall x,y \in M,\ x \neq y\ \exists\, U = U^\circ, V = V^\circ,\ U \cap V = \emptyset$, $x \in U, y \in V$

2) (M,τ) je parakompaktní. Což znamená:

Def: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$, $\{V_\beta\}_{\beta \in J} \subset \tau$ dvě pokrytí M, tj. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$

$\{V_\beta\}$ je zjemněním $\{U_\alpha\} \iff \forall \beta \in J : \exists \alpha \in I : V_\beta \subset U_\alpha$.

Def: (M,τ) je parakompaktní $\iff \forall$ pokrytí $\{U_\alpha\} \subset \tau$ existuje lokálně konečné zjemnění $\{V_\beta\}$, tj. každý bod $x \in M$ leží v konečně mnoha V_β.

Místo 2) se často žádá silnější podmínka: (M,τ) lokálně kompaktní (tj. každý bod má kompaktní okolí, tj. kompaktní množinu obsahující otevřenou množinu obsahující p) se spočetnou bází topologie $(\exists \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}} : U_\alpha = U_\alpha^\circ \wedge \forall V \in \tau : \exists J \subset \mathbb{N} : V = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha)$

Def: Homeomorfismus $\varphi: U = U^\circ \subset M \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme <u>mapa</u> či <u>lokální souřadnice</u> na M. U nazýváme souřadnicové okolí v M.

Def: Pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ topol. prostoru M vybavené homeomorfismy $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme <u>atlas</u> na M, n nazýváme jeho <u>dimenzí</u>.

Def: Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ na M je <u>třídy C^k</u> $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in I: U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$:

$$\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \text{ je třídy } C^k.$$

Pozn: C^ω ... funkce analytické, tj. Taylorův rozvoj konverguje v každém bodě

Pozn: standardně budeme uvažovat C^∞, tj. funkce libovolněkrát diferencovatelné

Def: Mapa (U, φ) je <u>C^k kompatibilní</u> s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: U \cap U_\alpha \neq \emptyset$:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \text{ je třídy } C^k \wedge \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ je třídy } C^k$$

Def: Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ třídy C^k je <u>maximální</u> $\Leftrightarrow$ obsahuje všechny mapy s ním C^k-kompatibilní. Maximální atlas třídy C^∞ na M nazýváme <u>hladká</u> či <u>diferencovatelná struktura</u> na M. Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor M vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme <u>diferencovatelná</u> (neboli <u>hladká</u>) <u>varieta</u>.

Pozn: • Většinou se setkáme s varietami pokrytými nejvýše spočetným systémem map.

Pak lze topologii přenést pomocí φ_α^{-1} z $\mathbb{R}^n$ a nemusí být zadána předem.

• Maximalita atlasu se vyžaduje za účelem jednoznačnosti pojmu varieta.

Při praktickém počítání použijeme spíš atlas s minimálním počtem map.

Def: Zobrazení ϕ dvou diferencovatelných variet M, N: $\phi: M \to N$ je <u>hladké</u> $\Leftrightarrow$

$\forall$ mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ na M a $\forall$ mapu (V_β, ψ_β) na N: $\phi(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset$ platí

$$\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{(-1)}(V_\beta)) \to \psi_\beta(\phi(U_\alpha) \cap V_\beta) \text{ je hladké}$$

Def: Hladkou bijekci $\phi: M \to N$ takovou, že ϕ^{-1} je též hladké, nazýváme <u>difeomorfismus</u> variet M a N. Difeomorfní variety považujeme za ekvivalentní.

Často diferencovatelné variety zadáváme pomocí vazeb, tj. jako vzor $F^{(-1)}(y_0)$ nějakého vybraného bodu $y_0 \in \mathbb{R}^r$ při zobrazení $F: \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$. Topologii na $F^{(-1)}(y_0)$ uvažujeme indukovanou z $\mathbb{R}^{n+n}$ ($\Rightarrow$ Hausdorff, lok. komp., spočetná báze), mapy vytváříme pomocí věty o implicitní funkci. Její aplikací dostáváme:

Věta: Buď $F: \mathbb{R}^{r+n} \to \mathbb{R}^r$ třídy C^∞, $y_0 \in \mathbb{R}^r$: $F^{(-1)}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{r+n} \mid F(x) = y_0\} \neq \emptyset$ a

nechť $\forall x \in F^{(-1)}(y_0)$ platí $\operatorname{rank} dF(x) = \dim \mathbb{R}^r = r$. Pak $F^{(-1)}(y_0)$ je diferencovatelnou varietou dimenze n s mapami vytvořenými s využitím věty o implicitní funkci.

Pár poznámek k varietám

- pokud $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ může nastat situace, kdy všechny $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jsou holomorfní. Pak máme holomorfní atlas definující n-rozměrnou komplexní varietu. Každá n-rozměrná komplexní varieta je 2n-rozměrnou reálnou varietou, naopak to jít nemusí.
- Máme-li $(M, \tau, U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(N, \sigma, V_\beta, \psi_\beta)$ dvě variety, pak $M \times N$ s topologií $\tau \times \sigma$ a mapami $\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\chi_{\alpha\beta}(u,v) = (\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v))$ je $m+n$-rozměrnou diferencovatelnou varietou.

Tečné vektory k varietě

Chceme zavést na varietě obdobu derivace ve směru vektoru v $\mathbb{R}^n$.

Máme dvě možnosti

(a) pomocí křivek

Def: Hladké zobrazení γ intervalu (a,b), $a < 0 < b$ do variety M nazýváme (hladká) křivka ve varietě M vycházející z bodu $p_0 = \gamma(0)$.

Značení: $C^\infty(M) = \{ f : M \to \mathbb{R} \text{ třídy } C^\infty \}$

Zavádíme ekvivalenci mezi křivkami vycházejícími z $p_0 \in M$:

$$\gamma \sim \gamma' \iff \forall f \in C^\infty(M) : \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma')\Big|_{t=0}$$

Pozn: $f \circ \gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tj. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ má smysl

Def: Tečný vektor X k varietě M v bodě $p_0 \in M$ je třída ekvivalence křivek $[\gamma]$ vycházejících z bodu p_0. Derivace funkce $f \in C^\infty(M)$ ve směru tečného vektoru X je dána vztahem $Xf = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}$ pro libovolnou $\gamma \in [\gamma]$.

V libovolných lokálních souřadnicích $x^i = \varphi^i(p)$, $p \in U = U^\circ$, $p_0 \in U$, $x_0 = \varphi(p_0)$ můžeme tečný vektor ztotožnit se směrovou derivací $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}$, $X^i = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)\Big|_{t=0}$ neboť dle vztahu pro derivaci složené funkce máme

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0} F = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{x_0 = \varphi(\gamma(0))} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$

$F = f \circ \varphi^{-1}$ nazýváme vyjádření funkce f v lokálních souřadnicích (x^i). Většinou ji značíme stejně jako samotnou funkci f a použité souřadnice vyplývají z kontextu.

Podobně většinou píšeme $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ místo $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$, tj. ztotožňujeme bod a jeho souřadnicové vyjádření (v souřadnicích použitých v daném výrazu).

Nadále budeme využívat sumační konvenci: přes index vyskytující se jednou nahoře a jednou dole se sčítá od 1 do dimenze variety.

Při změně souřadnic $(x^i) \to (x'^i)$ se souřadnicové vyjádření tečného vektoru mění podle vztahu pro derivaci složené funkce: X

$$X^i = \frac{d}{dt} x^i(\gamma(t))\Big|_{t=0}, \qquad \boxed{X'^i = \frac{d}{dt} x'^i(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Big|_p \frac{d}{dt} x^j(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Big|_p X^j}$$

tj. $\boxed{X = X'^i \frac{\partial}{\partial x'^i}\Big|_p = X^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x'^i}\Big|_p = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p}$

(b) druhý způsob zavedení tečného vektoru jako zobrazení $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$

Def: <u>Tečný vektor</u> X k varietě M v bodě $p \in M$ je zobrazení $X: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující následujícím podmínkám

i) $X(af+g) = aXf + Xg \quad \forall f,g \in C^\infty(M),\ a \in \mathbb{R}$ linearita

ii) $X(f \cdot g) = f(p)\cdot(Xg) + (Xf)\cdot g(p) \quad \forall f,g \in C^\infty(M)$ Leibnizovo pravidlo

iii) $\forall f,g \in C^\infty(M): (\exists\ U = U^\circ \ni p : f(r) = g(r), \forall r \in U) \Rightarrow Xf = Xg$.

Věta: Uvedené dvě definice tečného vektoru jsou ekvivalentní.

Dk: $X = [\gamma] \longrightarrow X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X^i = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma)\Big|_{t=0}$ splňuje linearitu, Leibnizovo pravidlo i rovnost na funkcích splývajících na okolí

naopak $X: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující vlastnostem, podle iii) stačí uvažovat v souř. okolí bodu p
$\Rightarrow$ def. v lokálních souřadnicích $\boxed{X^i = X(\varphi^i)\Big|_p}$, $\tilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ a chceme ukázat, že $\forall f \in C^\infty(M)$ platí $Xf = \tilde{X}f$. Bez újmy na obecnosti $\varphi^i(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

$f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} + g(\vec{x})$, kde g je nějaká hladká funkce na okolí $\vec{0}$, $g(\vec{0}) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} = 0$. Z Leibnizova pravidla $X(\text{konst.}) = 0$,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{0}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(xt)\,dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}(1-t)\frac{d}{dt} f(xt)\,dt = -\Big[(1-t)\frac{d}{dt} f(xt)\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2} f(xt)\,dt$$

$$= x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} + \int_0^1 (1-t)\, x^i x^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(xt)\,dt \Rightarrow g(x) = x^i x^j g_{ij}(x),\ \text{kde}$$

$g_{ij}(x) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(xt)\,dt$ jsou nějaké hladké funkce $\Rightarrow$

$Xf = 0 + X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} + X(x^i x^j g_{ij}(x))$, $X(x^i x^j g_{ij}(x)) = 0$ (použitím Leibnizova pravidla - vždy zbude alespoň jedno $x^i\big|_0 = 0$)

$\Rightarrow Xf = \tilde{X}f \Rightarrow$ obě definice jsou ekvivalentní $\square$

Def: <u>Tečný prostor</u> T_pM k varietě M v bodě $p \in M$ je množina všech tečných vektorů k M v p. Podle 2. def. tečného vektoru tvoří vekt. prostor, v lokálních souřadnicích vybavený bází $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$; $\dim T_pM = \dim M = n$.

GME 1 — *Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky*

3.

Zaveďme disjunktní sjednocení všech T_pM, $p \in M$:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM = \{ X_p \in T_pM \mid p \in M \}$$

Na TM zavádíme zobrazení $\pi : TM \to M : \pi(X_p) = p$. Na TM můžeme přirozeným způsobem zavést strukturu diferencovatelné variety. Buď $(U_\alpha, (x^i_\alpha))_{\alpha \in I}$ diferencovatelný atlas na M. Pak zaveďme na TM atlas $(V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha), \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$, kde $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{2\dim M}$ a

$$\psi_\alpha(X_p) = (x^1_\alpha(p), \dots, x^n_\alpha(p), X^1_\alpha(p), \dots, X^n_\alpha(p)), \quad X_p = X^i_\alpha(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

Tento atlas je hladký, neboť přechodová zobrazení mají tvar

$$\tau_{\alpha\beta}(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha, X^1_\alpha, \dots, X^n_\alpha) = (x^1_\beta(x_\alpha), \dots, x^n_\beta(x_\alpha), X^1_\beta, \dots, X^n_\beta), \text{ kde}$$

$$X^i_\beta = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\Big|_{x_\alpha} \cdot X^j_\alpha \quad \text{a} \quad \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\Big|_{x_\alpha} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \forall x_\alpha \text{ kde je definováno.}$$

Diferencovatelnou varietu TM nazýváme *tečný bundle* (též *tečný fibrovaný prostor*).

TM je speciálním případem *fibrovaného prostoru* či *fibre bundle*, což je diferencovatelná varieta E vybavená následujícími dodatečnými strukturami:

1) diferencovatelnou varietou M zvanou *báze* a surjektivním zobrazením $\pi : E \to M$ zvaným *projekce*

2) diferencovatelnou varietou F zvanou *typické vlákno* a *lokálními trivializacemi* $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$: $U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset M$, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$, $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ difeomorfismy takové, že $\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$, kde π_1 je projekce na první složku kartézského součinu $U_\alpha \times F$. Pro dané $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ zobrazení $\tau_{\alpha\beta}(p) : F \to F : (p, \tau_{\alpha\beta}(p)u) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, u)$, $\forall u \in F$ nazýváme *přechodová funkce na vlákně* při přechodu z trivializace (U_α, ψ_α) do trivializace (U_β, ψ_β).

Často klademe omezení na přípustné lokální trivializace: připouštíme pouze takové trivializace, že všechny přechodové funkce na vlákně leží ve vhodně vybrané grupě zobrazení $F \to F$, tj. ve vhodné podgrupě grupy všech difeomorfismů $Diff(F)$. Vybranou grupu nazýváme *strukturní grupa* fibrovaného prostoru E.

Pozn: Pro dané $p \in M$ nazýváme $\pi^{(-1)}(p)$ vlákno nad bodem p. $\pi^{(-1)}(p)$ je diferencovatelná varieta izomorfní typickému vláknu F (izomorfismus není určen jednoznačně).

Př: Pokud F má strukturu vektorového prostoru, je přirozené požadovat, aby strukturní grupa fibrovaného prostoru E s typickým vláknem F byla $GL(\dim F, \mathbb{R})$. Takový fibrovaný prostor nazýváme vektorový fibrovaný prostor.

Def: Zobrazení $\sigma : M \to E$ takové, že $\pi \circ \sigma = id$ nazýváme řez fibrovaného prostoru E. Množinu všech řezů E značíme $\Gamma(E)$.

Def: Mějme dva fibrované prostory (E, M, F, π), $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\pi})$. Dvojici zobrazení $(\phi: E \to \tilde{E},\ \varphi: M \to \tilde{M})$ nazveme zobrazení fibrovaných prostorů E do $\tilde{E}$ (bundle map) právě tehdy, když $\tilde{\pi} \circ \phi = \varphi \circ \pi$.

Def: Vektorové pole X na varietě M je řez tečného bundlu, tj. $X \in \Gamma(TM)$.

Pozn: jinak řečeno, vektorové pole přiřazuje každému $p \in M$ tečný vektor $X(p) \in T_pM$ hladkým způsobem, tj. v libovolných souřadnicích $X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $X^i \in C^\infty(U)$

Def: Integrální křivka vektorového pole $X \in \Gamma(TM)$ vycházející z bodu $p_0 \in M$ je hladké zobrazení $\gamma: (a,b) \to M$, $a < 0 < b$, $\gamma(0) = p_0$ takové, že

$\frac{d}{dt}\gamma(t) \equiv \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$. $\dot{\gamma}(t)$ je definováno jako tečný vektor v $\gamma(t) \in M$ určený třídou ekvivalence $[\tilde{\gamma}]$, kde $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t+s)$.

Def: Vektorové pole X je úplné $\Leftrightarrow$ každou jeho integrální křivku lze rozšířit na int. křivku zobrazující $\mathbb{R}$ do M.

Def: Tok Ψ_X vektorového pole X je zobrazení nějaké $U = U^\circ \subset M \times \mathbb{R}$, $M \times \{0\} \subset U$ do M takové, že $\forall p \in M$ je $\Psi_X(p, \cdot): V_p \subset \mathbb{R} \to M$ integrální křivka vektorového pole X vycházející z bodu $p \in M$. ($V_p = V_p^\circ = U \cap \{p\} \times \mathbb{R}$)

V lokálních souřadnicích (x^i), $(x^1, \dots, x^n) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ máme

$\gamma(t) \leftrightarrow x(\gamma(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, kde $\frac{dx^i}{dt} = X^i(\gamma(t))$, $x^i(0) = x_0^i = x^i(p_0)$

$\Psi_X \leftrightarrow (\Psi_X^i): V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^n$, $V_1 = V_1^\circ \subset \mathbb{R}^n$, $V_2 = V_2^\circ \subset \mathbb{R}$, $0 \in V_2$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_X^i(x^1, \dots, x^n, t) = X^i(\Psi_X(x^1, \dots, x^n, t)) \qquad \forall (x^1, \dots, x^n) \in V_1,\ t \in V_2$$

$$\Psi_X^i(x^1, \dots, x^n, 0) = x^i \qquad \forall (x^1, \dots, x^n) \in V_1$$

GMF 1 **Abstraktnější pohled na vektorová pole**

4\. Def: Vektorový prostor V, který je navíc vybaven bilineárním zobrazením $m: V \times V \to V$ nazýváme algebra. Zobrazení m obvykle nazýváme násobení v algebře.

Pozn: Algebra může být

(a) asociativní $\iff m(u, m(v,w)) = m(m(u,v),w) \quad \forall u,v,w \in V$

(b) Lieova $\iff m(u,v) = -m(v,u), \quad m(u,m(v,w)) + m(v,m(w,u)) + m(w,m(u,v)) = 0 \quad \forall u,v,w \in V$

(c) komutativní $\iff m(u,v) = m(v,u), \quad \forall u,v.$

Podle vlastností se vybírá vhodné značení - asociativní násobení značíme jako součin, násobení v Lieově algebře nazýváme Lieova závorka a značíme $[\ ,\ ]$.

Př: $\mathcal{L}(V) \equiv gl(V)$, $A,B \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow m(A,B) = A\cdot B$ je asociativní algebra

$\mathcal{L}(V) = gl(V) \quad A,B \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow [A,B] = A\cdot B - B\cdot A$ je Lieova algebra

$C^\infty(M)$, $f,g \in C^\infty(M) \Rightarrow f\cdot g\ (p) = f(p)\cdot g(p), \forall p \in M$ je komutativní asociativní algebra

M vybavená Poissonovou závorkou $\Rightarrow C^\infty(M)$, $[f,g] = \{f,g\}$ je Lieova algebra

Def: Derivace algebry V (s násobením m) je libovolné lineární zobrazení $D: V \to V$ vyhovující podmínce $D(m(x,y)) = m(D(x),y) + m(x,D(y)), \ \forall x,y \in V.$

Př: $(\mathcal{L}(V), \cdot) \quad D_C(A) = [C,A] \quad D_C(AB) = CAB - ABC = CAB - ACB + ACB - ABC = (D_C(A))\cdot B + A(D_C(B))$

Př: $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$, $f \in C^\infty(M) \quad D_f(g) = \{f,g\}$.

Věta: Uvažujme $C^\infty(M)$ jako asociativní komutativní algebru s násobením $f\cdot g(p) = f(p)g(p)$. Množinu $\mathcal{X}(M)$ všech derivací algebry $C^\infty(M)$, tj. všech zobrazení
$X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $X(af+g) = aXf + Xg$, $X(fg) = (Xf)g + f\,Xg$,
lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech vektorových polí $\Gamma(TM)$ předpisem $X(p)(f) = (Xf)(p)$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Tj. $\mathcal{X}(M) \simeq \Gamma(TM)$

Dk: $X \in \Gamma(TM)$, tj. $X: M \to TM$, $X(p) \in T_p(M)$ hladké zobrazení $\Rightarrow$ definujme $\tilde{X}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$: $(\tilde{X}f)(p) = X(p)f$. Z hladkosti X vyplývá, že $\tilde{X}f$ je v každých lokálních souřadnicích hladké zobrazení, tj. je hladké i na celém M. Z vlastností tečných vektorů pak vyplývá linearita a podmínka na derivaci $\tilde{X}(fg)(p) = (\tilde{X}f)(p)\cdot g(p) + f(p)\cdot(\tilde{X}g)(p)$

naopak, tuď $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definujme $X(p): C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ $\quad X(p)f = (Xf)(p)$

Evidentně $\quad X(p)(af+g) = a\,X(p)f + X(p)g, \quad X(p)(f\cdot g) = X(p)f\cdot g(p) + f(p)\cdot X(p)g.$

Jak je to s podmínkou lokality, tj. $X(p)f = X(p)\tilde{f} \quad \forall f, \tilde{f} \in C^\infty(M): \exists U = U^\circ \subset M,$

$$p \in U: f(q) = \tilde{f}(q), \ \forall q \in U \ ?$$

Ekvivalentně ji uvažujeme ve tvaru: $\forall f \in C^\infty(M): \forall p \in M: \exists U = U^\circ \subset M, p \in U:$

$$f(q) = 0 \quad \forall q \in U \implies X(p)f = 0$$

Využijeme skutečnost, že existuje funkce $g \in C^\infty(M): g(q) = 0 \quad \forall q \notin U, \ g(p) = 1$

sestavená vhodným přeškálováním intervalu a kartézským součinem z funkce $g_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g_0(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}, \quad |x| < 1 \qquad \text{DÚ: ověřte, že } \lim_{x\to 1^-} g_0^{(n)}(x) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \setminus\{0\}$$
$$= 0 \qquad |x| \geq 1$$

Tudíž $\quad gf(p) = 0 \quad \forall p \in M \Rightarrow X(gf) = 0, \quad X(p)(gf) = 0$

$$= X(p)g \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(p)}} + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{g(p)}}\, X(p)f$$

$\Rightarrow \quad X(p)f = 0$, tj. $X(p)$ vyhovuje i lokalitě. Hladkost vzniklého vektorového pole vyplývá z toho, že $X: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ a tudíž složky v souřadnicovém vyjádření, které se dají určit způsobem $X^i(p) = X(x^i)(p)$ jsou hladké funkce.

Pozn. díky lokalitě $X \in \mathfrak{X}(M)$ definuje $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$, kde $U = U^\circ$ je souřadnicové okolí, na němž jsou x^i definovány. $\square$

Nadále budeme ztotožňovat $\mathfrak{X}(M)$ a $\Gamma(TM)$ a využívat definici vektorového pole vhodnější pro právě řešenou úlohu.

Věta: Derivace dané algebry A vždy tvoří Lieovu algebru, ozn. $\mathrm{Der}(A)$

Dk: to, že $\mathrm{Der}(A)$ je vektorový prostor je zřejmé.

Lieova závorka na $\mathrm{Der}(A)$ se definuje $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$

ověření $[D_1, D_2]\, m(u,v) = (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)\, m(u,v) = D_1 (m(D_2 u, v) + m(u, D_2 v))$

$- D_2 (m(D_1 u, v) + m(u, D_1(v))) = m(D_1 D_2 u, v) + \cancel{m(D_2 u, D_1 v)} + \cancel{m(D_1 u, D_2 v)} + m(u, D_1 D_2 v)$

$- m(D_2 D_1 u, v) - \cancel{m(D_1 u, D_2 v)} - \cancel{m(D_2 u, D_1 v)} - m(u, D_2 D_1 v) = m([D_1, D_2]u, v) + m(u, [D_1, D_2]v)$

antisymetrie $[\,,\,]$ a Jacobiho identita vyplývá ze způsobu definice $[\,,\,]$ $\square$

Důsledek: $\mathfrak{X}(M)$ je nekonečněrozměrná <u>Lieova algebra vektorových polí</u> na varietě M.

Pozn: Často uvažujeme i vektorová pole definovaná na podmnožině $U \subset M$ jako: $X: U \to TM$, $\pi \circ X = id|_U$. Pokud $U = U^\circ$ lze beze zbytku přenést definice a tvrzení z M. Jinak některé pojmy, např. $[\,,\,]$ mohou ztratit význam.

GMF1 **Diferenciální formy**

5. V každém bodě p variety M můžeme uvažovat vektorový prostor duální k tečnému prostoru T_pM. Značíme ho T_p^*M a nazýváme kotečný prostor. Prvky T_p^*M obvykle značíme řeckými písmeny a nazýváme 1-formy v bodě p, tj. $\omega \in T_p^*M \Leftrightarrow \omega : T_pM \to \mathbb{R}$, $\omega(aX+Y) = a\omega(X)+\omega(Y)$, $\forall X,Y\in T_pM, a\in\mathbb{R}$

Mějme lokální souřadnice x^i na $U=U^0\subset M$, $p\in U$. Pak báze T_pM má tvar $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$. Bázi T_p^*M k ní duální, tj. funkcionály $\varphi^i\in T_p^*M$: $\varphi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta^i_j$ značíme $\left(dx^i|_p\right)_{i=1}^n$, tj. $dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)=\delta^i_j$ (důvod pro toto značení bude zřejmý později). Souřadnice 1-formy ω v bázi (dx^i) značíme ω_i, tj. $\omega = \omega_i\, dx^i|_p$.

Při změně souřadnic $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$ máme $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \Rightarrow$

$$d\tilde{x}^k|_p\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right) = \delta^k_i$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\, d\tilde{x}^k|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \Big/ \cdot \frac{\partial \tilde{x}^\ell}{\partial x^j} \Rightarrow d\tilde{x}^k|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\Big|_p \Rightarrow$$

$$\boxed{d\tilde{x}^k|_p = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\Big|_p \cdot dx^j|_p} \text{ a pro } \omega = \omega_i dx^i = \tilde{\omega}_i d\tilde{x}^i \Rightarrow \boxed{\tilde{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_p \omega_j}.$$

Podobně, jako jsme zavedli tečný fibrovaný prostor, zavádíme i kotečný fibrovaný prostor (cotangent bundle) T^*M

$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M$, $\pi: T^*M \to M: \omega\in T_p^*M: \pi(\omega) = p$,

$F \simeq \mathbb{R}^n$. Buď $(U_\alpha)_{\alpha\in I}: \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$, $U_\alpha = U_\alpha^0$ souřadnicové okolí se souřadnicemi x^i_α.

Pak definujeme systém lokálních trivializací (V_α, ψ_α), $V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$,

$\psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \times F$, $\psi_\alpha\left(\omega = \omega^\alpha_i\, dx^i_\alpha|_p\right) = \left(p, (\omega^\alpha_i)_{i=1}^n\right)$. Topologii na T^*M zavádíme jako topologii indukovanou vzorem otevřených množin při ψ_α, $\alpha\in I$.

Přechodové funkce na vlákně $\tau_{\alpha\beta}(p)(\omega^\alpha_i) = \left(\frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^i_\beta}\, \omega^\alpha_j\right)_{i=1}^n$ jsou tedy inverzemi přechodových funkcí na vlákně tečného bundlu.

Kotečný a tečný bundle jsou tudíž geometricky odlišné struktury.

Def: Diferenciální 1-forma na M je řez kotečného fibrovaného prostoru, $\omega\in\Gamma(T^*M)$. V lokálních souřadnicích x^i na souřadnicovém okolí U máme vyjádření $\omega\in\Gamma(T^*M)$ ve tvaru

$\omega(p) = \omega_i(p)\, dx^i$, kde $\omega_i \in C^\infty(U)$. Většinou značíme $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$.

Def: Buď $1 \le k \le n$, $p \in M$. <u>k-forma v bodě p</u> je p-lineární totálně antisymetrické zobrazení $\omega : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}$, $\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi\, \omega(X_1, \ldots, X_k)$

$\forall X_1, \ldots, X_k \in T_pM$, $\pi \in S_k = Bij(\{1, \ldots, k\})$

Prostor všech k-forem v bodě p značíme $\Lambda^k(T_p^*M)$ nebo $\Lambda_p^k M$. Podobně jako pro tečný prostor konstruujeme vektorový fibrovaný prostor ozn. $\Lambda^k(T^*M)$ či $\Lambda^k M$ jako disjunktní sjednocení $\Lambda^k(T^*M) = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$.

K vyjádření jeho lokálních trivializací potřebujeme bázi $\Lambda^k(T_p^*M)$ indukovanou souřadnicemi x^i na $U = U^\circ \subset M$. Tu definujeme následujícím způsobem:

Buď $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)_{i=1}^n$ báze T_pM. Bazické vektory $\Lambda^k(T_p^*M)$ značíme $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}|_p$ a definujeme $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)\Big|_p = \sum_{\pi \in S_k} \delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}} \ldots \delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}} \cdot \operatorname{sgn}\pi$

Př: $dx^1 \wedge dx^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = -1$, $dx^1 \wedge dx^3\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = 0$

Pro další použití zavádíme multiindexy $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n$, $|J| = k$

$\vec{J} = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$, $\delta_J^I = \sum_{\pi \in S_k} \delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}} \ldots \delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}} \operatorname{sgn}\pi$, $dx^{\vec{J}} = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$

Souřadnicové vyjádření $\omega \in \Lambda_p^k(T^*M)$ je

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} = \omega_{\vec{J}}\, dx^{\vec{J}}, \text{ kde } \omega_{\vec{J}} = \omega_{j_1 \ldots j_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right).$$

$(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k}$ neboli $(dx^{\vec{J}})$ tudíž tvoří bázi $\binom{n}{k}$-rozměrného vektorového prostoru $\Lambda^k(T_p^*M)$.

Lokální trivializace na $\Lambda^k M$ zavádíme opět pomocí souřadnic na M:

$$\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} : \psi_\alpha(\omega_{\vec{J}}\, dx^{\vec{J}}|_p) = (p, (\omega_{j_1 \ldots j_k})_{j_1 < j_2 < \ldots < j_k})$$

Def: $\omega \in \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$ nazýváme <u>diferenciální k-forma</u> na varietě M

Ozn: $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$. Též je možné používat vyjádření

$$\Omega^k(M) = \{\omega : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \mid \omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \omega(X_1, \ldots, X_k)$$

$$\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \pi \in S_k, \quad \omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega(Y_1, \ldots, Y_k)(p), \forall X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(M), p \in M : \forall j = 1, \ldots, n : X_j(p) = Y_j(p)\}$$

Direktním součtem všech nenulových $\Lambda^k(T_p^*M)$, tj. $k = 0, \ldots, n = \dim M$ dostáváme 2^n-rozměrný vektorový prostor $\Lambda(T_p^*M)$. K němu příslušný vektorový fibrovaný prostor (tj. vybudovaný podobně jako výše) značíme $\Lambda^\bullet(T^*M)$ nebo $\Lambda^\bullet M$.

Jeho řezy $\omega \in \Gamma(\Lambda M) = \Omega^\bullet(M)$ jsou obecné diferenciální formy na varietě M. Každé $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ se dá jednoznačně rozložit na $\omega = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}$, $\omega^{(k)} \in \Omega^k(M)$.

GMF 1 — <u>Operace s diferenciálními formami</u>

6. Na vektorovém prostoru $\Lambda_p^\bullet M$ zavádíme binární operaci zvanou <u>vnější součin</u> následujícím způsobem:

$$\tau \in \Lambda_p^k M, \quad \omega \in \Lambda_p^l M, \quad X_1, \dots, X_{k+l} \in T_p M:$$

$$\tau \wedge \omega\,(X_1, \dots, X_{k+l}) = \sum_{\substack{\vec{I}, \vec{J},\\ |I|=k,\, |J|=l}} \delta^{\vec{I}\vec{J}}_{(1,\dots,k+l)}\, \tau(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})\, \omega(X_{j_1}, \dots, X_{j_l})$$

Z této definice je zřejmé, že $\tau \wedge \omega \in \Lambda_p^{k+l} M$ (multilinearita roznásobením pravé strany, antisymetrie využitím $\operatorname{sgn} \pi_1 \circ \pi_2 = \operatorname{sgn} \pi_1 \operatorname{sgn} \pi_2$.

Vlastnosti vnějšího součinu (důkazy zřejmé, rozepsáním)

1) je bilineární $(a\tau_1 + \tau_2) \wedge \omega = a\tau_1 \wedge \omega + \tau_2 \wedge \omega$, $\tau \wedge (a\omega_1 + \omega_2) = a\,\tau \wedge \omega_1 + \tau \wedge \omega_2$

2) $\tau \wedge \omega = (-1)^{k \cdot l}\, \omega \wedge \tau$ (viz znaménko permutace $\begin{pmatrix} 1, \dots, & & k+l \\ k+1, \dots, l+k, & 1, \dots, & k \end{pmatrix}$)

3) je asociativní $(\sigma \wedge \tau) \wedge \omega = \sigma \wedge (\tau \wedge \omega)$ neboť $\delta_{\vec{I}}^{\vec{J}\vec{M}} \delta_{\vec{M}}^{\vec{K}\vec{L}} = \delta_{\vec{I}}^{\vec{J}\vec{K}\vec{L}} = \delta_{\vec{I}}^{\vec{N}\vec{L}} \delta_{\vec{N}}^{\vec{J}\vec{K}}$

Pro obecné prvky $\tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M$ vnější součin definujeme distributivně

$$\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)} + \dots + \tau^{(n)}, \quad \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \dots + \omega^{(n)} \Rightarrow \tau \wedge \omega = \sum_{a,b=1}^{n} \tau^{(a)} \wedge \omega^{(b)}$$

V lokálních souřadnicích x^i máme $\tau = \tau_{\vec{I}}\, dx^{\vec{I}}$, $|I| = k$, $\omega = \omega_{\vec{J}}\, dx^{\vec{J}}$, $|J| = l$

$$(\tau \wedge \omega)_{\vec{K}} = \delta^{\vec{I}\vec{J}}_{\vec{K}}\, \tau_{\vec{I}}\, \omega_{\vec{J}}, \quad dx^{\vec{I}} \wedge dx^{\vec{J}} = \delta^{\vec{I}\vec{J}}_{\vec{K}}\, dx^{\vec{K}}, \; |\vec{K}| = k+l$$

Takto zkonstruovanou 2^n-rozměrnou asociativní nekomutativní algebra $\Lambda_p^\bullet M$ nazýváme <u>vnější algebra</u> v bodě $p \in M$

Vnější součin zavádíme i na $\Omega^\bullet(M)$ způsobem $(\omega \wedge \tau)(p) = \omega(p) \wedge \tau(p)$, $\omega, \tau \in \Omega^\bullet(M)$

Tím se $\Omega^\bullet(M)$ stává algebrou. Je však současně též (zv. $C^\infty(M)$-modulem neboť máme násobení $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ libovolnou funkcí $f \in C^\infty(M)$: $(f\omega)(p) = f(p)\,\omega(p)$, a platí $f(\omega_1 + \omega_2) = (f\omega_1) + (f\omega_2)$, $(f g)\,\omega = f(g\omega)$. Struktura $C^\infty(M)$-modulu a algebry na $\Omega^\bullet(M)$ jsou kompatibilní ve smyslu

$$(f\tau) \wedge \omega = \tau \wedge (f\omega) = f(\tau \wedge \omega), \quad f \in C^\infty(M),\; \tau, \omega \in \Omega^\bullet(M)$$

Na $\Omega^\bullet(M)$ dále zavádíme <u>vnější derivaci</u>, což je lineární zobrazení $d: \Omega(M) \to \Omega(M)$ které zobrazuje $\Omega^k(M)$ do $\Omega^{k+1}(M)$, a vyhovuje následujícím podmínkám

1) $d(\tau \wedge \omega) = d\tau \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge d\omega$, $\tau \in \Omega^k(M)$, $\omega \in \Omega^l(M)$, $k, l = 0, \dots, n$,

2) $df(X) = Xf$, $\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$,

3) $d^2 = 0$.

Podmínka 2) v lokálních souřadnicích x^i znamená, že $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$,
tj. vnější derivace funkce je prostě její derivací (totálním diferenciálem).
Současně je zřejmý význam označení bazických 1-forem dx^i. Jsou to skutečně diferenciály souřadnicových funkcí x^i.

Existenci a jednoznačnost operátoru d ukážeme v souřadnicích. Pak ukážeme, že nezávisí na výběru souřadnic.

V souřadnicích máme $\omega = \omega_{\vec{J}} dx^{\vec{J}}$, $d\omega = d\omega_{\vec{J}} \wedge dx^{\vec{J}} = \frac{\partial \omega_{\vec{J}}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{\vec{J}}$.

Ověříme vlastnosti $d^2=0$, $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$ pro formy ve tvaru $\omega_a = f_a dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ (dále linearitou): $d\omega = df \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$

$$d^2\omega = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\text{sym. v } i,j} \underbrace{dx^i \wedge dx^j}_{\text{antisym v } i,j} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = 0$$

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(f_1 f_2) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l} =$$
$$= (df_1 \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) \wedge (f_2 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) +$$
$$(-1)^k (f_1 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) \wedge (df_2 \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) =$$
$$= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$$

Při změně souřadnic máme $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = f \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_k}$

$$d\omega = d\left(f \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\right) \wedge d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_k} = df \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\right) d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_k}$$
$$+ f\left(\left(\underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1} \partial \tilde{x}^{j}}}_{\text{sym v } j_1, j} \dots\right) \underbrace{d\tilde{x}^{j} \wedge d\tilde{x}^{j_1}}_{\text{antisym v } j_1, j} \wedge \dots + \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_2}}{\partial \tilde{x}^{j_2} \partial \tilde{x}^{j}}}_{\text{sym v } j_2, j} \dots\right) \underbrace{d\tilde{x}^{j} \wedge \dots}_{\text{antisym v } j_2, j} + \right)$$
$$= df \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\right) d\tilde{x}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{j_k} = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

tj. definice d nezávisí na výběru lokálních souřadnic. □

Speciální třídy k-forem

(a) forma ω je <u>uzavřená</u> $\iff$ $d\omega = 0$

(b) forma ω je <u>exaktní</u> $\iff$ $\exists\, \tau \in \Omega^\bullet(M)$: $\omega = d\tau$ (tudíž exaktní je uzavřená)

Ukazuje se, že pro libovolnou uzavřenou formu $\omega \in \Omega^\bullet(M)$, $\omega \notin \Omega^0(M)$ a bod $p \in M$ existuje okolí $U = U^\circ \ni p$ a $\tau \in \Omega^\bullet(U)$ takové, že $\omega = d\tau$ (důkaz snad později)

Def: Buď $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. <u>Vnitřní součin</u> či <u>zúžení</u> X a ω $i_X \omega \equiv X \lrcorner\, \omega$ je $(k-1)$-forma definovaná předpisem $i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$.

Speciálně $\omega \in \Omega^1(M) \Rightarrow i_X \omega = \omega(X) \equiv \langle \omega, X \rangle \equiv \langle X, \omega \rangle$, kde $\langle , \rangle$ je párování T_pM a T_p^*M.

GMF 1 <u>Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety</u>

7\. Uvažujme dvě variety M a N a hladké zobrazení $\phi : M \to N$.

Def: Mějme $p \in M$. <u>Tečné zobrazení</u> ϕ_* indukované zobrazením ϕ je

$$\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}N : \quad \phi_*(X)\, f = X(f\circ\phi) \qquad \forall X \in T_pM, f \in C^\infty(N)$$

V souřadnicích x^i na $U = U^\circ \ni p$, y^a na $V = V^\circ \ni \phi(p)$ máme ϕ vyjádřené

předpisem $y^a = \varphi^a(x^i)$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \Rightarrow \boxed{\phi_*(X) = X^i \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a}\Big|_{\phi(p)}}$

jak vyplývá ze vztahu $\phi_*(X)^a = \phi_*(X)\, y^a = X(\varphi^a(x^i))$.

Def: Mějme $p \in M$. <u>Kotečné zobrazení</u> ϕ^* indukované zobrazením ϕ je

$$\phi^* : T^*_{\phi(p)}N \to T^*_pM : \quad (\phi^*\omega)\, X = \omega(\phi_* X), \quad \forall X \in T_pM,\ \omega \in T^*_{\phi(p)}N$$

V souřadnicích x^i na $U = U^\circ \ni p$, y^a na $V = V^\circ \ni \phi(p)$ máme $y^a = \varphi^a(x^i)$,

$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^a}\Big|_{\phi(p)}$, $\omega = \omega_a\, dy^a\big|_{\phi(p)}$, $(\phi^*\omega)_i = \omega\left(\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)\right) = \omega_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\Big|_p$

tj. $\boxed{\phi^*\omega = \omega_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\Big|_p\, dx^i\big|_p}$

Kotečné zobrazení ϕ^* dále můžeme rozšířit na $\omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N$ způsobem

$$(\phi^*\omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi_*(X_1), \dots, \phi_*(X_k)) \qquad \forall X_1, \dots, X_k \in T_pM$$

Tímto způsobem máme definována zobrazení ϕ v bodě p, ϕ^* v bodě $\phi(p)$.

Lze je rozšířit na zobrazení celého $\mathfrak{X}(M)$, resp. $\Omega^\bullet(M)$?

V případě kotečného zobrazení ano. Pro libovolnou k-formu $\omega \in \Omega^k(N)$

definujeme $\phi^*\omega \in \Omega^k(M)$ předpisem

$$\phi^*\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega(\phi(p))(\phi_*(X_1|_p), \dots, \phi_*(X_k|_p)), \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$$

(Linearita, antisymetrie, závislost pouze na $X_i(p)$ je zřejmá, hladkost je vidět v lokálních souř.)

Pozn: pro $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$ definujeme $\phi^* f(p) = (f\circ\phi)(p)$.

Def: Výše zavedené zobrazení $\phi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ nazýváme

<u>pullback</u> při zobrazení ϕ.

Naopak $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ obecně definovat nelze

Důvody: a) $(\phi_* X)(p) \equiv \phi_*(X|_p)$ není definováno na celém N, ale jen

na $\phi(M)$

b) nemusí být korektní: pokud $\exists\, p, \tilde{p} \in M : \phi(p) = \phi(\tilde{p}) \wedge \phi_*(X_p) \neq \phi_*(X_{\tilde{p}}) \in T_{\phi(p)}N$

Pokud ϕ je difeomorfismus, pak $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ existuje a je definováno předpisem $(\phi_* X)(p) = \phi_*(X|_p)$

Pokud ϕ je prosté, je $\phi_*(X)$ definováno jako prvek $\mathfrak{X}(\phi(N))$, kde $\phi(N)$ není nutně otevřená. Podobně pokud pro dané ϕ a X nevzniká problém s nejednoznačností můžeme použít pro výsledek konstrukce bod po bodu označení $\phi_*(X)$.

Pozn: změna souřadnic na $U=\mathring{U}$ je speciálním případem difeomorfismu $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$ na $\tilde{U}\subset\mathbb{R}^n$ a dříve zavedené změny složek vektoru resp. formy při změně souřadnic je možné odvodit z obecných vztahů pro tečné resp. kotečné zobrazení.   Pozn: při skládání zobrazení $\phi: M\to N$, $\psi: N\to O$ máme $(\psi\circ\phi)_* = \psi_*\circ\phi_*$
$(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*$

ϕ_*, ϕ^* vs. vnější součin, vnější derivace a komutátor

Z definice vnějšího součinu a ϕ^* je vidět, že $\boxed{\phi^*(\omega_1\wedge\omega_2) = \phi^*\omega_1\wedge\phi^*\omega_2}$

Dále platí $\quad d\phi^*\omega = \phi^* d\omega \quad \forall\omega\in\Omega^\bullet(M)$, tj. $\boxed{d\circ\phi^* = \phi^*\circ d}$

Odvození je stejné jako při důkazu nezávislosti $d\omega$ na výběru souřadnic.

Buď $\phi: M\to N$, $p\in M$, $X\in T_pM$, $\omega\in\Lambda^k_{\phi(p)}N$. Pak platí $\phi^*(i_{\phi_*(X)}\omega) = i_X(\phi^*\omega)$ Dk dosazením
Na $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\omega\in\Omega^\bullet(N)$ lze totéž aplikovat pokud je ϕ difeomorfismus.

Dále pro difeomorfismus ϕ platí $\quad \phi_*[X,Y] = [\phi_*(X), \phi_*(Y)]$

Dk: $(\phi_*[X,Y])(\phi(p))f = X(Y(f\circ\phi))(p) - Y(X(f\circ\phi))(p) = X(\phi_*Y(f)\circ\phi)(p)$
$- Y(\phi_*X(f)\circ\phi)(p) = (\phi_*X(\phi_*Y(f))\circ\phi)(p) - (\phi_*Y(\phi_*X(f))\circ\phi)(p) =$
$= ([\phi_*X, \phi_*Y]f)(\phi(p)) \quad \forall p, \forall f\in C^\infty(N)$, ϕ difeo $\Rightarrow \{\phi(p)\,|\,p\in M\} = N \Rightarrow \square$

Pozn: Máme-li difeomorfismus $\phi: M\to N$ můžeme definovat též $\phi^*: \mathfrak{X}(N)\to\mathfrak{X}(M)$ předpisem $\quad \phi^*X f = X(f\circ\phi^{-1}), \quad \forall f\in C^\infty(M)$.

Podvariety

Mějme $\phi: M\to N$. ϕ nazýváme vnoření (immersion) M do N pokud ϕ_* je prosté v každém bodě $p\in M$. M pak nazýváme vnořená podvarieta variety N. Pokud ϕ je prosté vnoření takové, že $\forall p\in M$ existuje okolí $U=U^\circ\subset N$ bodu $\phi(p)$ a souřadnice $(y^a)_{a=1}^{\dim N}$ na U takové, že $\phi(M)\cap U = \{g\in U \,|\, y^a(g)=0,\ a=1,\dots,\dim N-\dim M\}$ nazýváme ϕ vložení (embedding) a M nazýváme (vložená) podvarieta variety N.

Whitneyho věta o vnoření

Každá diferencovatelná varieta dimenze n je difeomorfní nějaké vložené C^ω-podvarietě Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. $\qquad$ Bez důkazu

GMF1 Lieova derivace

8. Uvažujme tok Ψ_X daného vektorového pole $X \in \mathfrak{X}(M)$. Z definice Ψ_X vyplývá, že $\Psi_X(t, \Psi_X(s,p)) = \Psi_X(t+s, p)$ $\forall p \in M$, $s,t \in \mathbb{R}$ taková, že l.h.s. má smysl. Dk: DÚ

Zavedeme označení $\Psi_X^t : M \to M$ (či tam, kde je definováno pro zvolené t)

$$\Psi_X^t(p) = \Psi_X(t,p)$$

Důsledek: $\exists (\Psi_X^t)^{-1} : (\Psi_X^t)^{-1} = \Psi_X^{-t}$

Pozn: Pro difeomorfismus $\phi: M \to N$ zavádíme $\phi^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M) : \phi^* \circ \phi_* = id|_{\mathfrak{X}(M)}$

Def: Buď $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definujeme Lieovu derivaci ve směru vektorového pole X jako zobrazení $\mathcal{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ předpisem

$$\boxed{\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t*}\omega - \omega\right)}, \text{ tj. } \mathcal{L}_X \omega(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t*}(\omega(\Psi_X^t(p))) - \omega(p)\right)$$

Pozn: 1) $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

2) $\mathcal{L}_X f(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\Psi_X^t(p)) - f(p)\right) = Xf(p)$, $\forall p \in C^\infty(M)$

Tímto způsobem je definována Lieova derivace forem a podobně i libovolného kovariantního tenzoru na varietě M, tj. multilineárního hladkého zobrazení $(\mathfrak{X}(M))^{\times k} \to M$ definovaného bod po bodu. Pro vektorová pole a obecněji kontravariantní tenzory, tj. multilineární zobrazení $(\Omega^1(M))^{\times k} \to M$ definovaná bod po bodu, definujeme

Def: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad \boxed{\mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t*}(Y) - Y\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y - \Psi^t_{X*}(Y)\right)$

Pozn: $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\Psi_{X*}^{-t}(Y) - Y\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Psi_{X*}^{-t}\left(Y - \Psi^t_{X*}(Y)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(Y - \Psi^t_{X*}(Y)\right)$

neboť $\lim_{t\to 0} \Psi^t_{X*}(Z) = Z$

Z vlastností tečného zobrazení a pullbacku a z vlastností Lieovy derivace vyplývají následující vlastnosti

1) $d\mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X d\omega$ $\forall \omega \in \Omega^\bullet(M)$, tj. $\boxed{d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d}$

2) $\mathcal{L}_X i_Y \omega = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t*} i_Y \omega - i_Y\omega\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t*}Y}(\Psi_X^{t*}\omega) - i_Y\omega\right) =$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t*}Y}(\Psi_X^{t*}\omega) - i_{\Psi_X^{t*}Y}(\omega) + i_{\Psi_X^{t*}Y}(\omega) - i_Y\omega\right) =$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\, i_{\Psi_X^{t*}Y}\left(\Psi_X^{t*}\omega - \omega\right) + i_{\lim \frac{1}{t}(\Psi_X^{t*}(Y) - Y)}\,\omega = i_Y(\mathcal{L}_X\omega) + i_{\mathcal{L}_X(Y)}\,\omega$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_X \circ i_Y = i_Y \circ \mathcal{L}_X + i_{\mathcal{L}_X(Y)}}$

3) $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\tau) = \mathcal{L}_X\omega\wedge\tau + \omega\wedge\mathcal{L}_X\tau \qquad \forall \omega,\tau\in\Omega^\bullet(M)$

4) $\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$ Dk dále

Z 2) dostáváme důsledek $\mathcal{L}_X(i_Y df) = i_Y\mathcal{L}_X df + i_{\mathcal{L}_X(Y)} df$, tj.

$$X(Yf) = Y(Xf) + (\mathcal{L}_X(Y))f \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]}$$

Dále je užitečné si uvědomit, že jakékoliv zobrazení $A:\Omega^\bullet(M)\to\Omega^\bullet(M)$ vyhovující $A(\omega\wedge\tau) = (A\omega)\wedge\tau + \omega\wedge(A\tau)$, $d\circ A = A\circ d$, $Af = Xf$, $\forall f\in C^\infty(M)$ už nutně musí být totožné s $\mathcal{L}_X$. Dk: díky d je totožné na 1-formách, pak pomocí $\wedge$

Věta: $\mathcal{L}_X = d\circ i_X + i_X\circ d$

Dk: využitím předchozí poznámky a následujícího lemmatu

Lemma: $\omega\in\Lambda^k_pM,\ \tau\in\Lambda^l_pM,\ X\in T_pM \Rightarrow i_X(\omega\wedge\tau) = i_X\omega\wedge\tau + (-1)^k\omega\wedge i_X\tau$

Dk: $i_{X_0}(\omega\wedge\tau)(X_1,\dots,X_{k+l-1}) = \sum_{\substack{\vec I,\vec J\\ |\vec I|=k,\ |\vec J|=l}} \delta^{\vec I\vec J}_{(0,1,\dots,k+l-1)}\omega(X_{\vec I})\tau(X_{\vec J}) = \sum_{0\in\vec I}(\dots) + \sum_{0\in\vec J}(\dots)$

$$= \sum_{\substack{\vec H,\vec J\\ |\vec H|=k-1,\ |\vec J|=l}}\delta^{\vec H\vec J}_{(1,\dots,k+l-1)}\omega(X_0,X_{\vec H})\tau(X_{\vec J}) + \sum_{\substack{\vec I,\vec G\\ |\vec I|=k,\ |\vec G|=l-1}}\delta^{\vec I\vec G}_{(1,\dots,k+l-1)}\omega(X_{\vec I})\tau(X_0,X_{\vec G})(-1)^k$$

$$= (i_{X_0}\omega\wedge\tau + (-1)^k\omega\wedge i_{X_0}\tau)(X_1,\dots,X_{k+l-1})$$

Dk věty: na funkcích $i_Xf=0$, $i_X df = Xf = \mathcal{L}_X f$

rhs splňuje $d(d\circ i_X + i_X\circ d) = d^2\circ i_X + d i_X\circ d = d\circ i_X\circ d = (d\circ i_X + i_X\circ d)\circ d$

a $(d\circ i_X + i_X\circ d)\,\omega\wedge\tau = d i_X\omega\wedge\tau + \cancel{(-1)^k d\omega\wedge i_X\tau} + \cancel{(-1)^{k-1} i_X\omega\wedge d\tau} + \omega\wedge d i_X\tau$

$$+ i_X d\omega\wedge\tau + \cancel{(-1)^k i_X\omega\wedge d\tau} + \cancel{(-1)^{k+1} d\omega\wedge i_X\tau} + \omega\wedge i_X d\tau$$

$$= ((di_X + i_Xd)\omega)\wedge\tau + \omega\wedge((di_X+i_Xd)\tau) \qquad \square$$

Důsledek: $\forall\omega\in\Omega^1(M)$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ platí $d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$, tzv. Cartanův vzorec

Dk: $d\omega(X,Y) = i_Y i_X d\omega = i_Y(\mathcal{L}_X\omega - d\underbrace{i_X\omega}_{\in C^\infty(M)}) = (i_Y\circ\mathcal{L}_X)\omega - Y(\omega(X)) = (\mathcal{L}_X\circ i_Y)\omega - i_{\mathcal{L}_X(Y)}\omega$

$$- Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \qquad \square$$

Zobecnění:

$\omega\in\Omega^k(M)\Rightarrow d\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}X_j(\omega(X_1,\dots,\hat X_j,\dots,X_{k+1})) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat X_i,\dots,\hat X_j,\dots,X_{k+1})$

Dk indukcí

Pozn: lhs závisí jen na $X_i|_p$, výrazy na pravé straně závisí i na X_i v okolí $p\in M$. Z odvození ovšem vyplývá, že celá rhs závisí jen na $X_i|_p$

K důkazu: $i_{X_{k+1}}\dots i_{X_1} d\omega = -i_{X_{k+1}}\dots i_{X_2} d i_{X_1}\omega + i_{X_{k+1}}\dots i_{X_3}(\underbrace{i_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}\omega}_{\mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{[X_1,X_2]}\omega = \dots})$

Věta: $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$

Dk: pro funkce a vektorová pole zřejmé, pro formy

$$\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = di_Xdi_Y + di_Xi_Yd + \cancel{i_Xd^2i_Y} + i_Xdi_Yd - di_Ydi_X - di_Yi_Xd - \cancel{i_Yd^2i_X} - i_Ydi_Xd$$

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = di_{[X,Y]} + i_{[X,Y]}d = d\circ\mathcal{L}_X\circ i_Y - d i_Y\mathcal{L}_X + \mathcal{L}_X\circ i_Y\circ d - i_Y\circ\mathcal{L}_X\circ d = \cancel{d^2 i_X i_Y} + di_Xdi_Y - di_Ydi_X - di_Yi_Xd + di_Xi_Yd +$$

$$+ i_Xdi_Yd - i_Ydi_Xd - \cancel{i_Yd^2i_X} \qquad \square$$

též jinak $[i_Xd + di_X, \mathcal{L}_Y] = \dots = -i_{\mathcal{L}_Y(X)}d - di_{\mathcal{L}_Y(X)}$

GMF1

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

9. Uvažujme varietu N a její kotečný bundle T^*N. Již víme, že je vhodným objektem pro matematický popis fázového prostoru mechanického systému s konfiguračním prostorem N. Na T^*N existuje význačná, tj. kanonická 1-forma definovaná následujícím předpisem: buď $\pi: T^*N \to N$ projekce ve fibr. prostoru T^*N. Definujeme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*N))$: $\lambda(\omega) = \pi^*(\omega)$, $\forall \omega \in T^*N$.

V lokálních souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ \subset N$ zavádíme souřadnice p_i na T^*U: $p_i(\omega_k(q)dx^k) = \omega_i(q)$, $q \in U$. Společně (x^i, p_i) tvoří souřadnice na T^*U.

V nich máme $\lambda = p_i dx^i \in \Gamma(T^*(T^*U))$. Dále můžeme uvažovat kanonickou (Cartan-Poincaré) 2-formu $\omega = d\lambda$. V lokálních souřadnicích máme $\omega = dp_i \wedge dx^i$.

Evidentně ω je exaktní a tudíž uzavřená. Dále je nedegenerovaná ve smyslu $\forall a\ \forall 0 \neq X \in T_a(T^*N)\ \exists Y \in T_a(T^*N): \omega(a)(X,Y) \neq 0$. Tyto vlastnosti jsou základem pro zobecnění.

Def: Diferencovatelná varieta M vybavená nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou ω se nazývá symplektická. Pozn: nedegenerovanost ω implikuje $2 \mid \dim M$

Př: $M = T^*N$, $\omega = d\lambda$

Věta (Darboux) Buď (M,ω) symplektická varieta, $q \in M$. Pak existuje okolí $U = U^\circ \subset M$, $q \in U$ a souřadnice (p_i, x^i) na U takové, že $\omega|_U = dp_i \wedge dq^i$. Bez důkazu

Nyní se budeme snažit zformulovat Hamiltonovskou mechaniku na symplektické varietě. Základní poznatek je, že nedegenerovaná $\omega \in \Omega^2(M)$ nám umožňuje ztotožnit T_qM a T_q^*M, resp. $\mathfrak{X}(M)$ a $\Omega^1(M)$.

Věta: Zobrazení $\varphi: T_qM \to T_q^*M$: $\varphi(X) = i_X\omega(q)$ je izomorfismus vektorových prostorů

Dk: $X \in \ker\varphi \iff i_X\omega(q) = 0 \iff \omega(X,Y) = 0\ \forall Y \in T_qM \iff X = 0$ z nedegenerovanosti. □

Věta: $\varphi: \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$: $\varphi(X) = i_X\omega$ je izomorfismus vektorových prostorů.

Dk: bod po bodu viz výše, hladkost zřejmá z hladkosti $i: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^0(M)$ □

Def: Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ je lokálně hamiltonovské $\iff$ $i_X\omega$ je uzavřená.

Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ je hamiltonovské $\iff$ $i_X\omega$ je exaktní, $i_X\omega = -df$.

Pak značíme $X \equiv X_f$.

Důvod pro definici: Buď $H(p_i, x^i)$. Pak $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ (kontrola $i_{X_H}\omega = -dH$)

Tudíž integrální křivky vektorového pole X_H jsou řešení Hamiltonových pohybových rovnic $\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$

Věta: Vektorové pole X je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow \mathcal{L}_X \omega = 0$

Dk: $\mathcal{L}_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega = d i_X \omega$ $\square$

Věta: $\mathcal{L}_X \tau = 0 \Leftrightarrow \forall t: \Psi_X^{t*} \tau = \tau$. Podobně $\mathcal{L}_X Y = 0 \Leftrightarrow \Psi^t_{X*}(Y) = Y$.

Dk: $\frac{d}{dt}(\Psi_X^{t*}\tau) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\Psi_X^{s+t*}\tau - \Psi_X^{t*}\tau) = \lim_{s\to 0} \Psi_X^{t*}(\frac{1}{s}(\Psi_X^{s*}\tau - \tau)) = \Psi_X^{t*}\mathcal{L}_X\tau = 0$ $\square$

Věta: Toky komutujících vektorových polí X, Y komutují, $\Psi_X^s \circ \Psi_Y^t = \Psi_Y^t \circ \Psi_X^s$.

Dk: $p \in M$, γ int. křivka Y z p, $\tilde{\gamma}$ int. křivka Y z $\Psi_X^s(p)$, tj. $\gamma(t) = \Psi_Y^t(p)$,

$\tilde{\gamma}(t) = \Psi_Y^t(\Psi_X^s(p))$. Platí $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = Y(\Psi_Y^t(\Psi_X^s(p)))$, $\tilde{\gamma}(0) = \Psi_X^s(p)$. Podobně

$\frac{d}{dt}\Psi_X^s(\gamma(t)) = \Psi^s_{X*}(Y(\Psi_Y^t(p))) \underset{\Psi^s_{X*}(Y)=Y}{=} Y(\Psi_X^s(\Psi_Y^t(p)))$, $\Psi_X^s(\gamma(0)) = \Psi_X^s(p)$

Tj. máme dvě řešení stejné dif. rovnice se stejnou poč. podmínkou $\Rightarrow \Psi_X^s(\gamma(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ $\square$

Def: (M,ω) symplektická varieta. $\phi: M \to M$ je <u>kanonické zobrazení</u> $\Leftrightarrow \phi^*\omega = \omega$.

Věta: (M,ω) symplektická varieta, $X \in \mathfrak{X}(M)$. X je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow$ jeho tok Ψ_X definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací.

Pozn: <u>1-parametrická lokální grupa transformací</u> variety M je zobrazení

$\phi: U = U^\circ \subset \mathbb{R}\times M \to M$, $\{0\}\times M \subset U$, $\phi(0,p) = p$, $\forall p \in M$, $\phi(s, \phi(t,p)) = \phi(s+t, p)$

$\forall s, t \in \mathbb{R}, p \in M: (t,p) \in U, (s, \phi(t,p)) \in U$

Def: (M,ω) symplektická varieta, $f, g \in C^\infty(M)$. <u>Poissonova závorka</u> f a g je definována:

$\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{X_f} dg = i_{X_g} df = X_g(f) = -X_f(g)$.

Pozn: V Darbouxových souřadnicích máme $\omega = dp_i \wedge dx^i$, $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$.

Věta: $f, g \in C^\infty(M) \Rightarrow X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$

Dk: $h = \{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega \Rightarrow i_{X_h}\omega = -d(i_{X_f} i_{X_g}\omega) = -\mathcal{L}_{X_f}(i_{X_g}\omega) + i_{X_f} d(i_{X_g}\omega) =$

$= -\mathcal{L}_{X_f} i_{X_g}\omega + i_{X_f}\underbrace{\mathcal{L}_{X_g}\omega}_{=0} = -i_{[X_f, X_g]}\omega - i_{X_g}\underbrace{\mathcal{L}_{X_f}\omega}_{=0} = -i_{[X_f,X_g]}\omega \Rightarrow X_h = -[X_f, X_g]$ $\square$

Věta: $\{\ ,\ \}$ vyhovuje Jacobiho identitám, $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$.

Dk: $\{f,\{g,h\}\} = -X_f(i_{X_g} i_{X_h}\omega) = -\mathcal{L}_{X_f}(i_{X_g} i_{X_h}\omega) = -i_{[X_f,X_g]} i_{X_h}\omega - i_{X_g} i_{[X_f,X_h]}\omega$

$+ \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = (i_{X_g} i_{X_{\{h,f\}}} + i_{X_h} i_{X_{\{f,g\}}})\omega = i_{X_g} i_{-[X_h,X_f]}\omega + i_{X_h} i_{-[X_f,X_g]}\omega = (+i_{X_g} i_{[X_f,X_h]} + i_{[X_f,X_g]} i_{X_h})\omega$

$\underset{\text{Jacobi}}{=} \ldots = 0$ $\square$

Věta: $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f,g\} = 0 \Rightarrow f \circ \Psi^t_{X_g} = f$, $g \circ \Psi^t_{X_f} = g$. Dk: zřejmý

Naopak, lokální 1-param. grupa kanonických transf. zachovávajících $f \in C^\infty(M) \Rightarrow \exists$ lokálně def. $g \in C^\infty(M): \{f,g\} = 0$, $\phi(t,\cdot) = \Psi^t_{X_g}$.

GMF 1 Integrace forem

10. Jedním z důvodů zavedení diferenciálních forem na varietách je to, že jsou přirozenými objekty, které se dají integrovat.

Uvažujme na n-rozměrné varietě M n-formu ω v lokálních souřadnicích x^i, resp. $\tilde{x}^j$. Máme

$$\omega = \omega_{12\ldots n}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \sum_{\vec{I}} \omega_{12\ldots n}(x(\tilde{x})) \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\, d\tilde{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^{i_n} =$$

$$= \sum_{\vec{I}} \omega_{12\ldots n}(x(\tilde{x}))\, \delta^{\vec{I}}_{(1\ldots n)} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\, d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n = \det \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\ldots n}(x(\tilde{x}))\, d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega}_{12\ldots n}(\tilde{x}) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \cdot \omega_{1\ldots n}(x(\tilde{x}))$$

Tento vztah připomíná větu o substituci v Lebesgueově integrálu

$$x^i = \varphi^i(\tilde{x}) \qquad \int_{\varphi(\Omega)} f\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{\Omega} f \circ \varphi \left|\det \frac{\partial \varphi^i}{\partial \tilde{x}^j}\right| d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n$$

V definici integrálu n-formy ovšem narazíme na dvě nesnáze:

(a) rozdíl v absolutní hodnotě Jakobiánu – řešíme zavedením orientace

(b) možná neexistence globálních souřadnic na M – řešíme pomocí tzv. rozkladu jednotky.

Def: <u>Orientace vektorového prostoru</u> V, $\dim V = n$ je zobrazení σ přiřazující každé n-tici LN vektorů číslo ± 1 a vyhovující

$$\forall e_1, \ldots, e_n \in V, (e_1, \ldots, e_n) \text{ LN}, \; T \in GL(V) \qquad \sigma(T(e_1), \ldots, T(e_n)) = \frac{\det T}{|\det T|}\, \sigma(e_1, \ldots, e_n).$$

Def: Mějme vektorový prostor V s orientací σ, $\dim V = n$, $U = U^\circ \subset V$, diferencovatelnou varietu M, $\dim M \geq n$ a $F: U \to M$ hladké zobrazení. Označme $\tilde{U} = F(U)$. Buď $\omega \in \Omega^n(M)$. Definujeme <u>integrál n-formy</u> ω na množině $\tilde{U}$ při parametrizaci F předpisem

$$\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \sigma(e_1, \ldots, e_n) \int_U (F^* \omega)_{12\ldots n}\, dx^1 \ldots dx^n,$$ kde $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou standardní souřadnice na V, $x^j(a^i e_i) = a^j$ ve zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ vekt. prostoru V, $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Takto definovaný integrál $\int_{(\tilde{U},F)} \omega$ má následující vlastnost: při výběru jiného V', σ', U' a F' takového, že $F'(U') = \tilde{U}$ a že existuje difeomorfismus $\phi: U \to U'$ zachovávající orientaci ve smyslu $\sigma'\left(\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p\right), \ldots, \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right)\right) = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \wedge$

$\wedge\, F = F' \circ \phi$ platí podle věty o substituci v Lebesgueově integrálu $\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \int_{(\tilde{U},F')} \omega$.

Def: Orientace σ variety M je zobrazení přiřazující každému $p \in M$ orientaci tečného prostoru T_pM takovým způsobem, že $\forall\, U = U^\circ \subset M$, $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ $(n = \dim M)$, $(X_1|_p, \dots, X_n|_p)$ LN $\forall p \in U$ platí $\sigma(p)(X_1|_p, \dots, X_n|_p) = f(p)$ je konstantní (či ekvivalentně hladká) funkce na U. Varietu, na níž existuje orientace, nazýváme orientovatelná. Označení $\sigma(p)(X_1|_p, \dots, X_n|_p) = \sigma(X_1|_p, \dots, X_n|_p)$.

Pozn: Pokud na M existuje $\omega \in \Omega^n(M)$, $\omega(p) \neq 0$ $\forall p \in M$ pak M je orientovatelná, $\sigma(X_1|_p, \dots, X_n|_p) = \frac{\omega(X_1, \dots, X_n)(p)}{|\quad "\quad|}$.

Důsledek: T^*M je vždy orientovatelná (Dk DÚ). TM orientovatelná být nemusí.

Pozn: Pokud v M existuje $\gamma: \langle 0,1 \rangle \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, $U = U^\circ \ni \gamma(\langle 0,1 \rangle)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$, $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ $\forall t$ a $E_1, \dots, E_n \in T_{\gamma(0)}M = T_{\gamma(1)}M$ taková, že $(\Psi^1_{X*}(E_1), \dots, \Psi^1_{X*}(E_n))$ je báze opačně orientovaná než $(E_1, \dots, E_n)$, tj. matice přechodu z jedné báze do druhé má záporný determinant, pak M není orientovatelná. Př: Möbiův list

Def: Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $U = U^\circ$ souřadnicové okolí se souřadnicemi x^i, $\varphi: x(U) \subset \mathbb{R}^n \to U$ zobrazení inverzní k souřadnicím. Buď $\omega \in \Omega^n(M)$, $\operatorname{supp} \omega = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}} \subset U$. Definujeme integrál z formy ω na varietě M předpisem $\int_M \omega = \int_{(U,\varphi)} \omega = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \int_{x(U)} (\varphi^* \omega)_{1 2 \dots n}\, dx^1 \dots dx^n$.

Dle výše uvedeného $\int_M \omega$ nezávisí na výběru souřadnic na U.

Jak integrovat formy, jejichž nosič nelze pokrýt jedinou mapou?

Def: Buď M diferencovatelná varieta, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ její otevřené pokrytí. Indexová množina J a soubor funkcí $f_\beta \in C^\infty(M)$, $\beta \in J$ tvoří rozklad jednotky podřízený pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ pokud jsou splněny následující podmínky:

(1) $\forall \beta \in J\ \exists \alpha \in I$: $\operatorname{supp} f_\beta \subset U_\alpha \wedge \operatorname{supp} f_\beta$ je kompaktní

(2) $\forall p \in M\ \exists K_p \subset J$, $\#\{K_p\} < +\infty$ a $U = U^\circ \ni p$ takové, že $\forall q \in U, \forall \beta \in J \setminus K_p$: $f_\beta(q) = 0$.

(3) $f_\beta(p) \geq 0$, $\forall \beta \in J, p \in M$, (4) $\forall p \in M$: $\sum_{\beta \in J} f_\beta(p) = \sum_{\beta \in K_p} f_\beta(p) = 1$.

Věta: Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ existuje jemu podřízený rozklad jednotky.

Bez důkazu. K platnosti věty potřebujeme parakompaktnost v definici variety.

Definice: Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M = n$. Buď $\omega \in \Omega^n(M)$.

Integrál z formy ω na varietě M definujeme předpisem

$$\int_M \omega = \sum_{\beta \in J} \int_M f_\beta \omega,$$ kde $\{f_\beta\}_{\beta \in J}$ je rozklad jednotky podřízený nějakému souřadnicovému pokrytí $\{U_\alpha, x^i_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Pozn: $\int_M \omega$ nezávisí na výběru $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Dk: společné zjemnění $\{U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta\}_{\alpha \in I, \beta \in \tilde{I}}$ a jemu podřízený rozklad jednotky

GMF 1 — <u>Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta</u>

11 **Věta:** Buď ϕ difeomorfismus variet M a N stejné dimenze n, $\omega \in \Omega^n(N)$, $U = U^\circ \subset M$.

Pak platí $\displaystyle\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^* \omega$.

Dk: pomocí rozkladu jednotky převedeme na součet integrálů v $\mathbb{R}^n$, dále viz substituce v Lebesgovi

Def.: Buď M s orientací o vnořená podvarieta N, $\phi: M \to N$ vnoření, $\dim M = m$, $\dim N = n \geq m$.

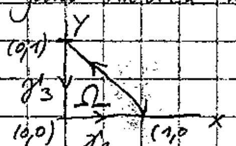
Pak pro $\omega \in \Omega^m(N)$ definujeme $\displaystyle\int_{(\phi(M),\phi)} \omega = \int_M \phi^* \omega$.

Pozn.: opět nezávisí na konkrétním způsobu parametrizace N, ale může se lišit pro ϕ, ϕ', která nelze propojit difeomorfismem $\psi: M \to M$: $\phi = \phi' \circ \psi$.

Nyní chceme dospět k jedné ze základních vlastností integrálů z forem, tzv. Stokesově větě $\displaystyle\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Nejprve budeme uvažovat dva speciální případy, jež nám umožní větu odvodit.

Př: Uvažujme $\mathbb{R}^2[x,y]$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezenou jako vnitřek konvexního lineárního obalu $\Omega = ([(0,0),(1,0),(0,1)]_K)^\circ$



Na $\mathbb{R}^2$ definujeme orientaci $\sigma((1,0),(0,1)) \equiv \sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$,

úseky hranice oblasti Ω orientujeme tak, aby $\sigma^\partial(\frac{\partial}{\partial \tau}) = 1 \Leftrightarrow \sigma(n|_\partial, \frac{\partial}{\partial \tau}|_\partial) = 1$, kde

n je vnější normála k Ω v $q \in \gamma_i$ a τ je souřadnice podél γ_i

Buď $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $d\omega = (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\, dx \wedge dy$. Pak platí

$$\int_\Omega d\omega = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\, dx\, dy = -\int_0^1 dx\, (\omega_x(x,1-x) - \omega_x(x,0)) + \int_0^1 dy\, (\omega_y(1-y,y) - \omega_y(0,y))$$

$$= -\int_0^1 dy\, \omega_y(0,y) + \int_0^1 dx\, \omega_x(x,0) + \int_0^1 d\tau \underbrace{(\omega_y(1-\tau,\tau) - \omega_x(1-\tau,\tau))}_{\gamma_2^* \omega,\ \text{kde}\ \gamma_3(\tau) = (1-\tau,\tau)} = \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

Př: $\mathbb{R}^n[x^1,\dots,x^n]$, (e_i) stand. báze $\mathbb{R}^n$, $x^i(a^j e_j) = x^j$, $\Omega = ([\vec{o}, e_1, \dots, e_n]_K)^\circ$,

orientace $\sigma(e_1,\dots,e_n) = 1$, $\displaystyle\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n [e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]_K$, $e_0 \equiv \vec{o}$

Na $[e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]_K \equiv \partial\Omega_i$ zavádíme orientaci opět tak, že $\sigma^\partial(f_1,\dots,f_{n-1}) = 1$ pro $f_j \in V = T[\ ]_K$ LN

$\Leftrightarrow \sigma(n, f_1, \dots, f_{n-1}) = 1$, kde n je ven orientovaná normála k hyperrovině obsahující $[e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]_K$

$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $d\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \omega_i\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\substack{0<x^i<1 \\ \sum_{j=1}^n x^j < 1}} dx^1 \dots dx^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_i = \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1, j\neq i}^n x^j < 1}} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \Big(\omega_i(x^1, \dots, \overset{i}{1 - \textstyle\sum_{j\neq i} x^j}, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, \overset{i}{0}, \dots, x^n)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega + \int_{\partial\Omega_0} \sum (-1)^{i+1} \omega_i\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=0}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega \equiv \int_{\partial\Omega} \omega$$

Def.: Mějme $\mathbb{R}^p$ se standartní bazí $(e_1,\dots,e_p)$ a orientací σ: $\sigma(e_1,\dots,e_p) = 1$. <u>Standartní</u>

<u>p-simplex</u> Δ_p je $\Delta_p = [e_0 \equiv \vec{o}, e_1, \dots, e_p]_K = \{a^i e_i \mid a^i \geq 0, \sum_{i=1}^p a^i \leq 1\}$.

Def: *(Singulární) p-simplex* v n-rozměrné varietě M je hladké zobrazení σ_p nějakého $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^p$, $\Delta_p \subset U$ do M.

Pozn. Ve značení často nerozlišujeme σ_p a $\sigma_p(\Delta_p)$.

Pozn. Dva singulární p-simplexy σ_p a σ_p' považujeme za *ekvivalentní*, pokud existuje $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^p$, $\Delta_p \subset V$ a difeomorfismus $\phi : V \to V$ takový, že $\sigma_p'(q) = \sigma_p(\phi(q))$, $\forall q \in \Delta_p$.

Def: *(Singulární) p-řetězec* v n-rozměrné varietě M je libovolná formální lineární kombinace singulárních p-simplexů (modulo ekvivalence).

Def: *Operátor hranice* ∂ přiřazuje standartnímu p-simplexu následující p-řetězec
$$\partial \Delta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \Delta_{p-1}^{(k)}, \quad \text{kde } \Delta_{p-1}^{(k)} = [e_0, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_p]_k \text{ je třeba chápat jako}$$
singulární $(p-1)$-simplex ve varietě $\mathbb{R}^p$, $\Delta_{p-1}^{(k)} : \overset{\mathbb{R}^{p-1}}{U} \supset \Delta_{p-1} \to \mathbb{R}^p$

Tj. operátor hranice přiřazuje p-simplexu orientovaný součet jeho stěn, kde orientace je indukována vnější normálou a orientací $\mathbb{R}^p$, tj. $\sigma'(f_1, \dots, f_{p-1}) = \sigma(n, f_1, \dots, f_{p-1})$

Def: *Operátor hranice* ∂ přiřazuje singulárnímu p-simplexu na varietě M $(p-1)$-řetězec
$$\partial \Delta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_p \circ \Delta_{p-1}^{(k)}.$$
Lineárním rozšířením definujeme *hranici libovolného p-řetězce.*

Pozn: Z elementární geometrie dostáváme $\partial^2 \Delta_p = \partial \circ \partial(\Delta_p) = 0$ a tudíž $\partial^2 = 0$ obecně.

Def: Buď c_p singulární p-řetězec ve varietě M, $c_p = \sum_{i=1}^{K} a_i \sigma_p^{(i)}$. *Integrál p-formy* ω přes p-řetězec c_p je definován předpisem $\int_{c_p} \omega = \sum_{i=1}^{K} a_i \int_{(\sigma_p^{(i)}(\Delta_p), \sigma_p^{(i)})} \omega = \sum_{i=1}^{K} a_i \int_{\Delta_p} \sigma_p^{(i)*} \omega$.

Věta (Stokesova pro p-řetězce) Buď c_p p-řetězec na varietě M, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí
$$\int_{c_p} d\omega = \int_{\partial c_p} \omega$$
Dk: viz integrály po standartních simplexech a definice integrálu po p-řetězci

Buď N orientovaná varieta, $\dim N = p$, ϕ její prosté vnoření do variety M. Buď dále $\overline{\phi(N)}$ kompaktní. Pak existuje *triangulace* vnořené podvariety N, tj. její pokrytí p-řetězcem $c_p = \sum_{k=1}^{K} \sigma_p^{(k)}$, $k \in \hat{K}$, $\sigma_p^{(k)} : U^{(k)} \supset \Delta_p \to \phi(N)$ takovým, že ke každému $q \in \phi(N)$ existuje právě jedno k a $\tilde{q} \in \Delta_p^\circ = \Delta_p \setminus \partial\Delta_p$ takové, že $q = \sigma_p^{(k)}(\tilde{q})$ nebo $q \in \sigma_p^{(k)}(\partial\Delta_p)$ pro jedno či více $k \in \{1, \dots, K\}$, a současně všechna $\sigma_p^{(k)}$ zachovávají orientaci.

Takový p-řetězec nazýváme *simpliciální* (též požadujeme, že $\sigma_p^{(k)}$ v simpliciálním řetězci musí být prostá).

$\partial c_p \equiv \partial N$ lze popsat jako konečné sjednocení vnořených variet přehrývajících se na množině míry nula z hlediska $\int_{\partial c_p}$. Vnitřní stěny se při integraci (či rovnou v lin. kombinaci simplexů) navzájem vyruší, neboť jsou v ∂c_p vždy obsaženy 2x, s navzájem opačnou orientací. Tudíž dostáváme

Věta (Stokes): N orientovaná vnořená podvarieta M, $\overline{N}$ kompaktní, $\dim N = p$, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega}$.