GMF1cv.
1

GMF 1 cv.

1

Př: Ukažte, že $\mathbb{R}^n$ se standartní topologií je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bazí

Př: Ukažte, že pokud množina M vylavená nejvýše spočetným systémem podmnožin $\{U_i\}_{i\in I}$, $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ a zobrazení $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) = \phi_i(U_i)^{\circ} \subset \mathbb{R}^n$ takovým, že $\tau_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_i\cap U_j)}$ je homeomorfismus $\phi_j(U_i\cap U_j)$ a $\phi_i(U_i\cap U_j)$ kdykoliv je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, je v přirozeném smyslu varietou třídy C^0. Pokud všechna τ_{ij} jsou třídy C^∞, jedná se o diferencovatelnou varietu.

Př: S^2 jako komplexní varieta pokrytá dvěma mapami:

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ $\quad U_N = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$, $U_S = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$

$\varphi_N(x,y,z) = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z} \equiv U + iV \in \mathbb{C}$ $\quad \varphi_S(x,y,z) = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z} \equiv u + iv \in \mathbb{C}$

Ověřte, že se jedná o diferencovatelnou varietu a že přechodové funkce $\tau_{NS} = \tau_{SN}^{-1}$ jsou holomorfní na svých definičních oborech.

Řešení: $\tau_{SN}(U+iV) = \frac{1}{U+iV}$, tj. $u = \frac{U}{U^2+V^2}$, $v = -\frac{V}{U^2+V^2}$

Př: $\mathbb{C}P^n$ komplexní projektivní prostor (analogicky $\mathbb{R}P^n$)

$\mathbb{C}P^n = \{V \subset\subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \dim V = 1\} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ $\qquad v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}: v = \lambda w$

Mapy: ozn. $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $U_i = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid v_i \neq 0\}$ $\quad i = 0,\dots,n$

$\varphi_i([v]_\lambda) = \left(\frac{v_0}{v_i}, \dots, \frac{v_{i-1}}{v_i}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \dots, \frac{v_n}{v_i}\right) \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n, \mathrm{Ran}\,\varphi_i = \mathbb{C}^n$

Ukažte, že $\mathbb{C}P^n$ s těmito mapami definuje komplexní varietu dimenze n

Analogicky $\mathbb{R}P^n$ s mapami $\varphi_i([v]_\lambda) = \left(\frac{v_0}{v_i}, \dots, \widehat{\frac{v_i}{v_i}}, \dots, \frac{v_n}{v_i}\right) \in \mathbb{R}^n$ definuje diferencovatelnou varietu dimenze n.

Př: Najděte holomorfní difeomorfismus S^2 a $\mathbb{C}P^1$.

②

Př: Uvažujte dvě variety M_ε, $\varepsilon = \pm 1$. Každá je popsaná dvěma mapami φ_1, φ_2 takovými, že $Ran(\varphi_1) = (0, 2\pi) \times (-1,1)$,
$Ran(\varphi_2) = (-\pi, \pi) \times (-1,1)$.

Přechodová funkce τ_{12} má definiční obor $((-\pi,0) \cup (0,\pi)) \times (-1,1)$ a je dána předpisem $\tau_{12}(\vartheta, \sigma) = (\vartheta, \sigma)$, $0 < \vartheta < \pi$, $\sigma \in (-1,1)$,
$= (\vartheta + 2\pi, \varepsilon \cdot \sigma)$, $-\pi < \vartheta < 0$, $\sigma \in (-1,1)$.

Určete, o jaké geometrické objekty se jedná. [plášť válce, Möbiův list]

Převeďte tečný vektor vyjádřený v souřadnicích $[\vartheta, \sigma] = \varphi_2(p)$
$X = \alpha \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big|_{p_0} + \beta \frac{\partial}{\partial \sigma}\Big|_{p_0} \in T_{p_0} M_\varepsilon$ do souřadnic $[\tilde{\vartheta}, \tilde{\sigma}] = \varphi_1(p)$.

Př: Uvažujte varietu $M = \mathbb{R}^+$ s mapami $\varphi_1 : M \to \mathbb{R}^+ : \varphi_1(x) = x$, $\varphi_2 : M \to \mathbb{R} : y = \varphi_2(x) = \ln x$. Tečný vektor $X = \frac{d}{dx}\Big|_{x_0} \in T_{x_0} M$ vyjádřete v souřadnicích y. $\left[X = \frac{1}{x_0} \frac{d}{dy}\Big|_{\ln x_0} = \frac{1}{e^{y_0}} \frac{d}{dy}\Big|_{y_0} \right]$

Př: Uvažujte sféru S^2 popsanou stereografickými projekcemi a tečné vektory $X_1, X_2 \in T_p S^2$, $p \in U_N \cap U_S$ ve tvaru
$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_p$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}\Big|_p$ v souřadnicích (u,v) na U_S.
Najděte vyjádření těchto tečných vektorů v souřadnicích (U,V) na U_N
$\left[X_1 = (V^2 - U^2) \frac{\partial}{\partial U}\Big|_p - 2UV \frac{\partial}{\partial V}\Big|_p,\ X_2 = 2UV \frac{\partial}{\partial U}\Big|_p + (V^2 - U^2) \frac{\partial}{\partial V}\Big|_p \right]$

DÚ: V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice $[x,y,z]$ a sférické souřadnice $[r, \vartheta, \varphi]$, $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$.
Tečné vektory $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$, $X_4 = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)\Big|_p$
$p \equiv (x_0, y_0, z_0)$ převeďte do sférických souřadnic

$\Big[X_1 = \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\Big|_p + \frac{\cos\vartheta \cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big|_p - \frac{\sin\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p,$

$X_2 = \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}\Big|_p + \frac{\cos\vartheta \sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big|_p + \frac{\cos\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p,$

$X_3 = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial r}\Big|_p - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big|_p,$ $\quad X_4 = \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p \Big]$

GMF1cv. 2 ③

Př: V $\mathbb{R}^2[x,y]$ uvažujte vektorová pole $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Najděte jejich integrální křivky.

[X_1: $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^t$, X_2: $x(t) = x_0\cos t + y_0 \sin t$, $y(t) = -x_0\sin t + y_0\cos t$]

Př: Výše uvedená vektorová pole převeďte do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ a najděte jejich integrální křivky v těchto souřadnicích

[$X_1 = r\frac{\partial}{\partial r}$, $r(t) = r_0 e^t$, $\varphi(t) = \varphi_0$, $X_2 = -\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $r(t) = r_0$, $\varphi(t) = \varphi_0 - t$]

Př: Je vektorové pole $X = x^2\frac{\partial}{\partial x}$ na $\mathbb{R}[x]$ úplné?

[$\Phi_X^t(x) = \frac{x}{1-xt}$, tudíž $\Phi_X^{\frac{1}{x}}(x)$ není definováno, X není úplné]

Př: $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3[x,y,z])$. Najděte jeho tok.

[$\Phi_X^t(x,y,z) = (x\cos t - y\sin t,\ x\sin t + y\cos t,\ z + (x^2+y^2)t)$]

Př: $X = (V^2-U^2)\frac{\partial}{\partial U} - 2UV\frac{\partial}{\partial V} \in \mathfrak{X}(S^2[U,V])$. Najděte jeho integrální křivky

[$\dot U = V^2 - U^2$, $\dot V = -2UV$ $\Rightarrow$ $U = -\frac{1}{2}\frac{\dot V}{V}$ $\Rightarrow$ $2\frac{\ddot V}{V} - 3\frac{\dot V^2}{V^2} + 4V^2 = 0$

integrující faktor $\frac{\dot V}{V^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\dot V^2}{V^3} + 4V = C_1$ $\Rightarrow$ $\dot V^2 = V^3(C_1 - 4V)$,

$$\int\frac{dV}{V^{\frac{3}{2}}\sqrt{C_1-4V}} = \int\frac{\sqrt{C_1-4V}}{V^{\frac{3}{2}}}dV + \int\frac{4\,dV}{C_1V^{\frac{1}{2}}\sqrt{C_1-4V}} \xrightarrow[\text{v 1. členu}]{\text{per partes}} -2\frac{\sqrt{C_1-4V}}{C_1V^{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow (t+C_2)^2C_1^2V = 4(C_1-4V)$ $\Rightarrow$ $V(t) = \frac{4C_1}{C_1^2(t+C_2)^2+16}$, $U(t) = -\frac{1}{2}\ln|V(t)|$

$C_1 = 4\frac{U_0^2+V_0^2}{V_0}$, $C_2 = \frac{U_0}{U_0^2+V_0^2}$ $\Rightarrow$ $U(t) = \frac{U_0 + t(U_0^2+V_0^2)}{1+2tU_0+t^2(U_0+V_0^2)}$, $V(t) = \frac{V_0}{1+2tU_0+t^2(U_0^2+V_0^2)}$]

Př: Výše uvedený příklad řešte v souřadnicích (u,v)

[$X = \frac{\partial}{\partial u}$ $\Phi_X^t(u,v) = (u+t, v)$ $\Phi_X^t(U,V) = \left(\frac{U+t(U^2+V^2)}{1+2tU+t^2(U^2+V^2)}, \frac{V}{1+2tU+t^2(U^2+V^2)}\right)$

④

Př: Určete komutátory vektorových polí X_1, X_2, X_3 na $\mathbb{R}^3$, kde

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ukažte, že $\operatorname{span}\{X_1, X_2, X_3\}$ tvoří podalgebru $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$

$[\ [X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2\ ]$

Př: V $\mathbb{R}$ uvažujte vektorová pole $X_k = x^k \frac{\partial}{\partial x}$. Ukažte, že jediné konečněrozměrné podalgebry v $\operatorname{span}\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ dimenze větší než 1 jsou

$$\operatorname{span}\{X_1, X_k\}_{k=0 \vee k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}, \quad \operatorname{span}\{X_1, X_2, X_3\}$$

$$\left[\quad [X_k, X_l] = (l-k)\, x^{k+l-1}\frac{\partial}{\partial x} = (l-k)\, X_{k+l-1} \quad\right]$$

Př: Ukažte, že obecné rychlosti v Lagrangeově mechanice se transformují jako tečné vektory ke konfigurační varietě, zatímco obecné hybnosti $p_j = \dfrac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q^j}$ se transformují jinak.

Př: Na varietě $M = \mathbb{R}^2[p, q]$ uvažujte tzv. Hamiltonovská vektorová pole $X_H = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\dfrac{\partial}{\partial p} + \dfrac{\partial H}{\partial p}\dfrac{\partial}{\partial q}$, kde $H = H(p,q) \in C^\infty(M)$

Hledejte integrální křivky vektorového pole X_H pro následující volby funkce H:

1) $H = \frac{1}{2}p^2$ $\qquad [\, p = p_0,\ q = q_0 + p_0 t\ ]$

2) $H = \frac{1}{2}p^2 + kq$ $\qquad [\, p = p_0 - kt,\ q = q_0 - \frac{1}{2}kt^2 + p_0 t\,]$

3) $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q$ $\qquad [\, p = p_0\cos\omega t - \omega q_0 \sin\omega t,\ q = \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t + q_0\cos\omega t\,]$

Př: Hopfova fibrace $S^3 \longrightarrow S^2$

Ukažte, že S^3 lze interpretovat jako fibrovaný prostor nad $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ s vláknem S^1.

$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ $\qquad \pi: S^3 \to \mathbb{C}P^1 \qquad \pi(z_1, z_2) = [(z_1, z_2)]_\lambda$

Mějme $V \subset\subset \mathbb{C}^2$, $\dim V = 1 \Rightarrow \exists\, \vec z \in \mathbb{C}^2, |\vec z| = 1 : V = \operatorname{span}\{\vec z\}$. Platí

$\pi^{(-1)}([\vec z]_\lambda) = \{\alpha \vec z \mid \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\} \Rightarrow \pi^{(-1)}([\vec z]_\lambda)$ lze ztotožnit s $S^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$

Trivializace: $U_1 = \{[(1,z)]_\lambda \mid z \in \mathbb{C}\}$, $U_2 = \{[(z,1)]_\lambda \mid z \in \mathbb{C}\}$ $\qquad \psi_1(\alpha\cdot(1,z)) = \left([(1,z)]_\lambda, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right)$, $\psi_2(\alpha(z,1)) = \left([(z,1)]_\lambda, \frac{\alpha}{|\alpha|}\right)$

$\tau_{12}([(z,1)]_\lambda)\,\alpha = \frac{z}{|z|}\cdot\alpha$

GMF 1 cv.

(3)

(5)

Př: V $\mathbb{R}^3$ uvažujte kartézské souřadnice (x,y,z) a sférické souřadnice (r,ϑ,φ). Následující diferenciální formy převeďte z jedněch souřadnic do druhých

1) dx $[= \sin\vartheta\cos\varphi\, dr + r\cos\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta - r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi]$

2) dy $[= \sin\vartheta\sin\varphi\, dr + r\cos\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta + r\sin\vartheta\cos\varphi\, d\varphi]$

3) dz $[= \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta]$

4) $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ $[= r\,dr]$

5) $y\,dx - x\,dy$ $[-r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi]$

6) $dx\wedge dy\wedge dz$ $[r^2\sin\vartheta\, dr\wedge d\vartheta\wedge d\varphi]$

7) dr $[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)]$

8) $d\vartheta$ $[\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{xz\,dz}{\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{yz\,dy}{\sqrt{y^2+x^2}} - \sqrt{y^2+x^2}\,dz\right)]$

9) $d\varphi$ $[\frac{1}{y^2+x^2}(x\,dy - y\,dx)]$

10) $dr\wedge d\vartheta\wedge d\varphi$ $[\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)}}dx\wedge dy\wedge dz]$

Př: Na S^2 uvažujte stereografické souřadnice (u,v), (U,V) a sférické souřadnice (ϑ,φ): $(u,v) = \left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1-\cos\vartheta}, \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1-\cos\vartheta}\right)$.

Převeďte

1) dU, dV do souřadnic (u,v) $[dU = \frac{+1}{(u^2+v^2)^2}((v^2-u^2)du - 2uv\,dv)]$

$[dV = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}(2uv\,du + (v^2-u^2)dv)]$

2) 2-formu $\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\wedge d\varphi$ do souřadnic (u,v), (U,V)

$[\omega = -\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}du\wedge dv = -\frac{4}{(1+U^2+V^2)^2}dU\wedge dV]$

DÚ: Na M uvažte dva souřadné systémy $(x^1,\dots,x^n)$ a $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$.

Ukažte, že pro $\omega = \omega_{1\dots n}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n \in \Omega^n(M)$ platí

$$\omega = \omega_{1\dots n}\det\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)}\,d\tilde{x}^1\wedge\dots\wedge d\tilde{x}^n.$$

Př: V $\mathbb{R}^3$ vybaveném kartézskými souřadnicemi definujme následující přiřazení:
$$A = A^x\frac{\partial}{\partial x} + A^y\frac{\partial}{\partial y} + A^z\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \longleftrightarrow A^{(1)} = A^x dx + A^y dy + A^z dz$$
$$\longleftrightarrow A^{(2)} = A\, dy\wedge dz + A^y dz\wedge dx + A^z dx\wedge dy$$

Ukažte, že pak platí
$$df = (\operatorname{grad} f)^{(1)}$$
$$dA^{(1)} = (\operatorname{rot} A)^{(2)}$$
$$dA^{(2)} = \operatorname{div} A \; dx\wedge dy\wedge dz$$

Dále ukažte, že $d^2 = 0$ je ekvivalentní známým identitám rot grad $= 0$, div rot $= 0$.

Př: V $\mathbb{R}^2$ uvažujte kartézské a polární souřadnice. Podobně jako v předchozím příkladě definujme $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$

Nalezněte vyjádření vektorového pole grad$f$ v polárních souřadnicích a porovnejte jej s výrazem pro vnější derivaci df

[$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ vs. $df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$]

Př: Uvažujte vektor magnetické indukce odpovídající magnetickému monopólu lokalizovanému v počátku kartézských souřadnic v $\mathbb{R}^3$
$\vec{B} = \frac{g}{r^3}(x,y,z) = \frac{g}{r^3}\cdot\vec{r} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\})$. Přiřaďte mu příslušnou 2-formu magnetické indukce $B = (\vec{B})^{(2)}$.

Ukažte, že B je uzavřená, tj. $\vec{B}$ vyhovuje Maxwellově rovnici $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

Nalezněte 1-formy A_N, A_S na $U_N = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,|\,z\le 0\}$, $U_S = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\,|\,z\ge 0\}$ takové, že $B|_{U_N} = dA_N$, $B|_{U_S} = dA_S$.

Nápověda: A_N, A_S hledejte ve sférických souřadnicích, výsledek převeďte do kartézských souřadnic.

[$B = g\sin\vartheta\, d\vartheta\wedge d\varphi$
$$A_N = g(1-\cos\vartheta)d\varphi = g\frac{z-r}{r(y^2+x^2)}(y\,dx - x\,dy)$$
$$A_S = -g(1+\cos\vartheta)d\varphi = g\frac{z+r}{r(y^2+x^2)}(y\,dx - x\,dy)$$]

Př: $S^2[u,v]$, $\omega = \frac{1}{u^2+v^2}\left(2uv\,du + (v^2-u^2)dv\right)$. Určete $d\omega$.

Hledejte $\alpha\in\Omega^1(S^2)$ takové, že $d\alpha = \frac{du\wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$. [např. $\alpha = \frac{1}{4}(1+\cos\vartheta)d\varphi = \frac{1}{2(1+u^2+v^2)}(u\,dv - v\,du)$
(neexistuje $\alpha\in\Omega^1(S^2)$, pouze $\alpha\in\Omega^1(U_{N/S})$) $= \frac{v\,du - u\,dv}{2(1+u^2+v^2)(u^2+v^2)}$]

GMF1 cv

4 7

Př: Uvažujte $S^2[\vartheta,\varphi]$ vnořenou v $\mathbb{R}^3[x,y,z]$: ϕ: $x = a\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = b\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = c\cos\varphi$, kde $a,b,c \in \mathbb{R}^+$

Určete, zda se jedná o vnoření či dokonce vložení.

Spočítejte $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big|_{(\vartheta_0,\varphi_0)}\right)$, $\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{(\vartheta_0,\varphi_0)}\right)$ a

$\phi^*(dx)$, $\phi^*(dy)$, $\phi^*(dz)$, $\phi^*(dx\wedge dy\wedge dz)$ a $\phi^*\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}\right)$

[$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big|_p\right) = a\cos\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\phi(p)} + b\sin\varphi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\phi(p)} - c\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{\phi(p)}$

$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_p\right) = -a\sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\phi(p)} + b\cos\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\phi(p)}$

$\phi^*(dx) = a\cos\varphi\cos\vartheta\, d\vartheta - a\sin\varphi\sin\vartheta\, d\varphi$, $\phi^*(dy) = b\sin\varphi\cos\vartheta\, d\vartheta + b\cos\varphi\sin\vartheta\, d\varphi$

$\phi^*(dz) = -c\sin\vartheta\, d\vartheta$, $\phi^*(dx\wedge dy\wedge dz) = 0$, $\phi^*\left(\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}\right) = 0$]

Př: Nalezněte integrální křivku γ vektorového pole

$X = z\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ z bodu $(x,y,z) = (1,0,0)$

Výsledné zobrazení promítněte do roviny (x,y) : $\varphi: \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}^2[x,y]$,

$\varphi(t) = (\gamma^x(t), \gamma^y(t))$. Určete $\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right)$, $\varphi^*(a\,dx + b\,dy)$, $\varphi^*(dx\wedge dy)$.

Pro jaká $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}[t])$ existuje $\varphi_*(X)$?

[$\gamma(t) = \left(\cos\frac{t^2}{2}, -\sin\frac{t^2}{2}, t\right)$, $\varphi(t) = \left(\cos\frac{t^2}{2}, -\sin\frac{t^2}{2}\right)$,

$\varphi_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\right) = -t_0\sin\frac{t_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\varphi(t_0)} - t_0\cos\frac{t_0^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\varphi(t_0)}$ $\varphi^*(dx) = -t\sin\frac{t^2}{2}dt$, $\varphi^*(dy) = -t\cos\frac{t^2}{2}dt$

$\varphi_*(X)$ existuje $\Leftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$ platí $X = X^t(t)\frac{d}{dt}$, kde $X^t(\sqrt{t^2+4\pi}) = \sqrt{\frac{t^2}{t^2+4\pi}}\,X^t(t)$]

Př: Uvažujte varietu M a její kotečný bundle $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Definujme

$\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ následovně $\lambda(\alpha) = \pi^*\alpha$, $\forall \alpha \in T^*M$. Na M

zaveďme souřadnice (x^i) a na T^*M souřadnice (x^i, p_i), kde

$x^i(\omega) = x^i(\pi\omega)$, $p_i(\alpha = \alpha_j dx^j|_q) = \alpha_i$. Nalezněte souřadnicové

vyjádření diferenciální 1-formy λ, spočítejte $\omega = d\lambda$ a ukažte, že

pro každý nenulový $X \in T_\alpha(T^*M)$ je $i_X\omega \in T^*_\alpha(T^*M)$ nenulové

[$\lambda = p_i\, dx^i$, $\omega = dp_i \wedge dx^i$, $X = X^i_x\frac{\partial}{\partial x^i} + X^p_j\frac{\partial}{\partial p_j} \Rightarrow i_X\omega = X^p_j dx^j - X^i_x dp_i$]

⑧

Př: Vyjádřete Lieovu derivaci $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ podle $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

$\left[\mathcal{L}_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right]$

Př: Vyjádřete Lieovu derivaci $\omega = \omega_i\, dx^i$ podle $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\left[\mathcal{L}_X \omega = \left(\omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^j \right.$

Př: Vyjádřete Lieovu derivaci $\omega = \omega_{ij} \cdot dx^i \wedge dx^j$ podle $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\left[\mathcal{L}_X \omega = \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} X^k + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \omega_{kj} + \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \omega_{ik} \right) dx^i \wedge dx^j \right]$

Př: Ukažte, že Lieova derivace uzavřené formy je exaktní.

Př: $\mathbb{R}^3 [x,y,z]$, $X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$

Určete

1) $\mathcal{L}_{X_1} dx$, $\mathcal{L}_{X_1} dy$, $\mathcal{L}_{X_1} dz$, $\mathcal{L}_{X_1} dx \wedge dy \wedge dz$

2) $\mathcal{L}_{X_2} dx$, $\mathcal{L}_{X_2} dy$, $\mathcal{L}_{X_2} dz$, $\mathcal{L}_{X_2} dx \wedge dy \wedge dz$

[X_1: $-dy$, dx, 0, 0 $\qquad$ X_2: dx, dy, dz, $3\, dx \wedge dy \wedge dz$]

Př: Je zřejmé, že platí $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t$, $\forall t,s \in \mathbb{R} \Rightarrow [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = 0$, $[X,Y] = 0$. Ukažte, že naopak $[X,Y] = 0$ implikuje $\Psi_X^t \circ \Psi_Y^s = \Psi_Y^s \circ \Psi_X^t$.

Nápověda: využijte větu o existenci a jednoznačnosti řešení ODE

Př: Nechť ω je kanonická 2-forma na T^*M, $f, g \in C^\infty(T^*M)$.

Definujme X_f požadavkem $i_{X_f} \omega = -df$. Ukažte, že $X_f \in \mathcal{X}(T^*M)$ je tím určeno jednoznačně. Dále ukažte, že $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$ a že $X_f(g) = 0 \Leftrightarrow X_g(f) = 0$. Jednotlivá odvození provádějte abstraktně i v souřadnicích (x^i, p_i) na T^*M.

5

Př: Na $S^2[u,v]$ uvažujte 2-formu $\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$. Ukažte, že ji lze hladce dodefinovat na celém S^2 a že ω je symplektická. Nalezněte tvar obecného Hamiltonovského pole na S^2. Zkonstruujte Darbouxovy souřadnice

[$\omega = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{dU \wedge dV}{(1+U^2+V^2)^2} = -\frac{1}{4} \sin\vartheta \, d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{1}{4} d(\cos\vartheta \, d\varphi)$

$\Rightarrow$ $p = \frac{1}{4}\cos\vartheta$, $x = \varphi$, v bodech na poledníku $\varphi = 0 \equiv 2\pi$ zkonstruujeme souřadnice vzhledem k pootočené souř. soustavě

$X_f = (1+u^2+v^2)^2 \left(-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} \right)$]

Př: Ve výše uvedeném příkladě ověřte $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$.

Př: Mějme symplektickou varietu (M,ω), $q \in M$ a dvoje Darbouxovy souřadnice na okolí q, $\omega = dp_i \wedge dx^i = dP_i \wedge dX^i$. Tudíž

$$d(p_i dx^i - P_i dX^i) = 0$$

tj. existuje $U = U^0 \ni q$ a $F \in C^\infty(M)$ takové, že $p_i dx^i - P_i dX^i = dF$.

Tento fakt interpretujte pro aktivní transformaci definovanou předpisem $(p_i(\varphi(m)), x^i(\varphi(m))) = (P_i(m), X^i(m))$, $m \in U$ jako existenci vytvořující funkce kanonické transformace φ.

Pokud $(x^i(m), X^i(m))$ tvoří souřadnice na U, ukažte, že φ je určeno implicitními rovnicemi $p_i(m) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x^i}(x^i(m), x^i(\varphi(m)))}_{\equiv \frac{\partial F}{\partial x^i}(m)}$, $p_i(\varphi(m)) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial X^i}(x^i(m), x^i(\varphi(m)))}_{\equiv \frac{\partial F}{\partial X^i}(m)}$

Pokud $(x^i(m), P_i(m))$ tvoří souřadnice na U, je φ určeno analogicky rovnicemi

$p_i(m) = \frac{\partial \tilde F}{\partial x^i}(m)$, $x^i(\varphi(m)) = \frac{\partial \tilde F}{\partial P_i}(m)$, kde $\tilde F(m) = F(m) + P_i(m) X^i(m)$

Najděte vytvořující funkci pro identickou transformaci [$\tilde F = x^i P_i$]

Př: $M = \mathbb{R}^2[x,p]$, $H = x \cdot p$. Najděte příslušné Hamiltonovské vektorové pole, jeho tok a vytvořující funkci těchto kanonických transformací.

[$X_H = -p\frac{\partial}{\partial p} + x\frac{\partial}{\partial x}$, $\Psi^t_X(p,x) = (e^{-t}p, e^{t}x)$, $\tilde F(x,P) = e^t x \cdot P$]

Př: Nalezněte všechny $f \in \mathbb{R}^2[x,p]$ takové, že $\{f, x\cdot p\} = 0$

[$f(x,p) = g(x \cdot p)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$]

⑩

Př: Zdůvodněte, že pro libovolný vekt. prostor V, $U = U^\circ \subset V$, orientaci σ, variety M, N, $F: U \to M$ a difeomorfismus $\phi: M \to N$ platí

$$\int_{(\phi(\tilde{U}),\, \phi\circ F)} \omega = \int_{(\tilde{U}, F)} \phi^* \omega, \quad \forall \omega \in \Omega^n N \qquad (\text{kde } \tilde{U} = F(U),\ \dim V = n)$$

Př: $M = S^2[u,v]$, $\omega = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv$, $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 1$.

Spočítejte $\int_{S^2} \omega$

[$\int_{S^2} \omega = \pi$. Mezivýpočty $\int \frac{du}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{u}{2(1+v^2)(1+u^2+v^2)} + \frac{\arctan \frac{u}{\sqrt{1+v^2}}}{2(1+v^2)\sqrt{1+v^2}}$,
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{\pi}{2(1+v^2)^{3/2}}$, $\int \dots dv = \frac{v\pi}{2\sqrt{1+v^2}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dv = \pi$]

Př: (M, ω), ϕ kanonické zobrazení, $\tilde{U} = \psi(U)$ pro nějaké $\psi: \mathbb{R}^k \to M$, $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^k$.

Ukažte, že $\int_{\phi(\tilde{U})} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \int_{\tilde{U}} \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (pro vhodné k).

Př: M, $\omega \in \Omega^n(M)$, $n = \dim M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ukažte, že platí

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_X^t(U)} \omega = \int_U \mathcal{L}_X \omega \qquad \forall U = U^\circ \subset M$$

Př: V $\mathbb{R}^3[x,y,z]$ uvažujte $\omega = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ a zobrazení

$F: U = (0,1) \to \mathbb{R}^3$ $\quad F(t) = (\cos t^2, \sin t^2, t^2)$, $\tilde{U} = F(U)$

Určete $\int_{(\tilde{U}, F)} \omega$

[$F^*\omega = -\frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt$, $-\int \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}^3} dt = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, $\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$]

Př: Stejnou úlohu řešte pro $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

[$F^*\omega = -\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}^3}$, $-\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$]

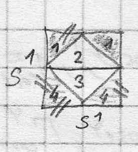
Př: Uvažujte $S^2[\vartheta, \varphi]$ vnořené v $\mathbb{R}^3[x,y,z]$ způsobem $F(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{1+\frac{\vartheta^2}{\pi^2}}(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$

a $\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy)$. Určete $\int_{(S^2, F)} \omega$.

Pozn: Není-li uvedeno jinak, bere se orientace v uvedeném pořadí souřadnic $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = 1$

[$F^*\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$, $\int_{S^2} F^*\omega = \int_{(S^2,F)} \omega = 4\pi$]

6 Př: Nalezněte triangulaci S^2, $T^2 = S^1 \times S^1$ a $B(0,1)$. Určete ∂S^2, $\partial B(0,1)$

Proč  nedefinuje triangulaci?

Př: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2[x,y]$, $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}$, tj. $\omega = f(x,y)\,dz = (f_R(x,y) + i f_I(x,y))(dx + i\,dy)$
Ukažte, že
$d\omega = 0 \iff f$ je holomorfní

a interpretujte Cauchyho větu jako speciální případ Stokesovy věty.

Př: $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}[x,y,z]$ $\quad \omega \in \Omega^2(M)$ $\quad \omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$

$N_1 = \{(x,y,z) \mid \frac{(x-99)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1\}$, $N_2 = \{(x,y,z) \mid \frac{(x-101)^2}{100^2} + y^2 + 30z^2 = 1\}$

Určete $\int_{N_1} \omega$ a $\int_{N_2} \omega$. Nápověda: využijte $d\omega = 0$.

$[\int_{N_1} \omega = 4\pi, \int_{N_2} \omega = 0]$

Př: Proč na $S^2[\vartheta, \varphi]$ není $\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi \in \Omega^2(S^2)$ není exaktní?
(Předpokládáme hladké dodefinování ω na celé S^2)

Př: Uvažujte hladké zobrazení $\phi: \langle 0,1) \times M \to M$ takové, že $\forall t \in \langle 0,1)$

je $\phi_t: M \to M$: $\phi_t(p) = \phi(t,p)$ difeomorfismus. Buď V vnořená podvarieta dimenze p,

$V(t) = \phi_t(V)$, $\omega \in \Omega^p(M)$, $V_0 \equiv V(0)$. Ukažte, že platí

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \omega = \int_{V(t)} \mathcal{L}_{X_t} \omega, \quad \text{kde} \quad X_t(q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \phi_s(\phi_t^{-1}(q))$$

$$\Big[\mathcal{L}_{X_t}\omega(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\big((\phi_{t+\varepsilon} \circ \phi_t^{-1})^* \omega(\phi_{t+\varepsilon} \circ \phi_t^{-1}(q)) - \omega(q)\big) \Rightarrow \int_{V(t)} \mathcal{L}_{X_t}\omega = \int_{V(t)} \lim_{\varepsilon \to 0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{V(t+\varepsilon)} \omega - \int_{V(t)} \omega\Big) = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \omega\Big]$$

Důsledek: $\frac{d}{dt}(\phi_t^* \omega) = \phi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega$ $\qquad$ [Dk plyne z libovolnosti integrační oblasti V]

Lemma: Buď $M = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$, $\omega \in \Omega^k(M)$, $d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M): \omega = d\alpha$

Dk: $\phi_t(x) \equiv (1-t)x \Rightarrow X_t(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t}(1-s)\frac{y}{1-t} = -\frac{y}{1-t}$, $t < 1$, $\phi_0 = id$, $\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_0^* = id$, $\phi_1^* = 0$

$$\omega(x) = \phi_0^*\omega(x) = \phi_0^*\omega(\phi_0(x)) - \phi_1^*\omega(\phi_1(x)) = -\lim_{\varepsilon \to 1^-}\int_0^\varepsilon \frac{d}{ds}\big(\phi_s^*\omega(\phi_s(x))\big)\,ds =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 1^-}\int_0^\varepsilon \phi_s^*\big((\mathcal{L}_{X_s}\omega)(\phi_s(x))\big)\,ds = -\lim_{\varepsilon \to 1^-}\int_0^1 \phi_s^*\big(d i_{X_s}\omega(\phi_s(x))\big) = -\lim_{\varepsilon \to 1^-} d\int_0^1 \phi_s^*\big(i_{X_s}\omega(\phi_s(x))\big)\,ds$$

existenci limity ukážeme v souřadnicích $\omega = \omega_{\vec{I}}\, dx^{\vec{I}}$, def. $\omega_I = \delta_I^{\vec{J}} \omega_{\vec{J}} \Rightarrow$

$i_X \omega = X^i \omega_{i\vec{J}}\, dx^{\vec{J}} \Rightarrow i_{X_s}\omega(y) = -\frac{y^i}{1-s}\omega_{i\vec{J}}(y = (1-s)x)\, d\cancel{y}^{\vec{J}} \Rightarrow \phi_s^*(i_{X_s}\omega(\phi_s(x))) = -x^i \omega_{i\vec{J}}(x(1-s))(1-s)^{p-1} dx^{\vec{J}}$

ozn. $\tau = 1-s \Rightarrow \alpha = -\int_0^1 d\tau\,(-x^i \tau^{p-1}\omega_{i\vec{J}}(\tau x)\, dx^{\vec{J}}) = \int_0^1 d\tau\,(\tau^{p-1}\omega_{i\vec{J}}(\tau x)) \cdot x^i dx^{\vec{J}}$, $\omega = d\alpha$ $\square$

Věta: Buď ω uzavřená k-forma na varietě M a $U = U^\circ \subset M$ difeomorfní otevřené
(Poincaréovo lemma)
kouli v $\mathbb{R}^{\dim M}$, $k \geq 1$. Pak existuje $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ taková, že $\omega|_U = d\alpha$.

Dk: přenesení výše uvedeného lemmatu difeomorfismem

Př: $S^2[\vartheta, \varphi]$ $\quad g = d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2\vartheta \, d\varphi \otimes d\varphi$

Ukažte, že $g = \phi^* g_{cart}$, hde $\phi(\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $g_{cart} = \sum_{i=1}^{3} dx^i \otimes dx^i$

Nalezněte Γ^i_{jk}, $j,k = \vartheta, \varphi$ $\quad [\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \mathrm{cotg}\,\vartheta,\ \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta,\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \mathrm{cotg}\,\vartheta]$

Určete tenzor křivosti $\quad [R_{\vartheta\varphi}{}^{\vartheta}{}_{\varphi} = \sin^2\vartheta = -R_{\varphi\vartheta}{}^{\vartheta}{}_{\varphi},\ R_{\vartheta\varphi}{}^{\varphi}{}_{\vartheta} = -1 = -R_{\varphi\vartheta}{}^{\varphi}{}_{\vartheta}]$

Př: $\mathbb{R}^3[x,y,z]$, $g = g_{cart}$. Vyjádřete g v souřadnicích r, ϑ, φ.

Nalezněte při standartní orientaci $\sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = 1$ explicitní vyjádření

$* : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $\Omega^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ v obou souřadnicích

a podobně vyjádřete $d^* : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

[$g = dr \otimes dr + r^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi \otimes d\varphi$

$\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz \qquad *\alpha = \alpha_z dx\wedge dy + \alpha_y dz \wedge dx + \alpha_x dy \wedge dz$

$\beta = \beta_z dx\wedge dy + \beta_y dz\wedge dx + \beta_x dy \wedge dz \qquad *\beta = \beta_x dx + \beta_y dy + \beta_z dz$

$\alpha = \alpha_r dr + \alpha_\vartheta d\vartheta + \alpha_\varphi d\varphi \qquad *\alpha = \frac{1}{\sin\vartheta}\alpha_\varphi dr\wedge d\vartheta + \sin\vartheta \, \alpha_\vartheta d\varphi \wedge dr + r^2\sin\vartheta \, \alpha_r d\vartheta \wedge d\varphi$

$\beta = \beta_\varphi dr \wedge d\vartheta + \beta_\vartheta d\varphi \wedge dr + \beta_r d\vartheta \wedge d\varphi \qquad *\beta = \frac{\beta_r}{r^2 \sin\vartheta} dr + \frac{\beta_\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta + \sin\vartheta \, \beta_\varphi d\varphi$

$d^* = *d* \qquad d^*\alpha = \partial_x \alpha_x + \partial_y \alpha_y + \partial_z \alpha_z =$

$$= \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(2r\sin^2\vartheta \, \alpha_r + r^2 \sin^2\vartheta \frac{\partial \alpha_r}{\partial r} + \sin\vartheta\cos\vartheta \, \alpha_\vartheta + \sin^2\vartheta \frac{\partial\alpha_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\alpha_\varphi}{\partial\varphi}\right)]$$

Př: Uvažujte Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru (ve vakuu)

Faraday: $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} d\vec{S} \qquad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

Gauss: $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \, dV \qquad$ Ampér: $\oint_{\partial S} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \, d\vec{S} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Chceme Maxwellovy rovnice zapsat v podobě nezávislé na výběru souřadnic a připouštějící i křivý prostoročas. Jak?

a) stacionární případ $M = \mathbb{R}^3$, $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$, $\vec{B} \neq \vec{B}(t)$ $\Rightarrow$ 1. řádek ryze geometrický, přirozeně $\vec{B}$ uzavřená 2-forma, $\vec{E}$ uzavřená 1-forma. Pak v 2. řádku potřebujeme Hodgeovy duály, využitím Stokesovy věty dostáváme stacionární tvar Maxwellových rovnic $dB = 0$, $dE = 0$, $d^*E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $d^*B = \mu_0 j$, $j \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

b) nestacionární případ $M = \mathbb{R}^{1,3}[t,x,y,z]$, položme $c = 1$. Geometrická (tj. na proudech a nábojích nezávislá) část Maxwellových rovnic se dá přepsat jako $dF = 0$ pro $F = B + E \wedge dt \in \Omega^2(M)$. (Ověřte) Druhá serie Maxwellových rovnic se pak dá kompaktně zapsat ve tvaru $d^*F = j$, kde $j = b\left(\sum_k q_k \gamma_k \left(1\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$, $\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2}}$.
$\in \Omega^1(M)$