(1. přednáška)

Lieovy grupy a algebry

Motivace: grupy < > matematický popis symetrií

klasická mechanika: symetrie -> zákony zachování (Věta Noetherové)

speciální relativita teorie invariantní vůči Lorentzově (Poincaréově) grupě

kvantová fyzika: (a) invariance vůči předpokládaným symetriím ← např. na základě experimentu
- např. "částice = ireducibilní reprezentace Poinc. grupy"

(b) využití symetrií při hledání spekter
- např. sférická symetrie => reprezentace $SO(3), SU(2)$

řešení ODE, PDE pomocí symetrií - redukce, invariantní řešení aj.

diferenciální geometrie Lieovy grupy jako variety s řadou speciálních vlastností

Def: Lieova grupa je hladká varieta G vybavená grupovým násobením

$\cdot : G\times G \to G \quad (g,h) \to gh$ takovým, že

1) G je grupa ($\cdot$ asociativní, $\exists e$, $\exists g^{-1}$ pro $\forall g \in G$)

2) $\cdot : G\times G \to G$, $(\,)^{-1} : G \to G \quad (g)^{-1} = g^{-1}$ jsou diferencovatelná zobrazení

Pozn: podle V. Hilbertova problému postačuje $\cdot$, $(\,)^{-1}$ spojité, G topologický prostor lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow$ již implikuje hladkost - bez Dk, analogie $f(x+y) = f(x)f(y)$, f spojité $\Rightarrow f(x) = e^{\alpha x}$, tj. f hladké

Př: $Gl(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A \neq 0\}$

$\det \in C^\infty(\mathbb{R}^{n,n}) \Rightarrow \det^{(-1)}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ je otevřená $\Rightarrow$ 1 souřadnicová mapa
$A.B$ je evidentně hladké, $A^{-1} = 1/\det A \cdot A^{adj}$, elementy A^{adj} polynomy v elementech $A \Rightarrow$ hladké, $1/\det A$ na $Gl(n,\mathbb{R})$ též hladké $\Rightarrow$ je Lieova grupa

$\dim Gl(n,\mathbb{R}) = n^2$

$Gl(n,\mathbb{C})$ obdobně, je Lieova grupa dimenze $2n^2$, lze ji též chápat jako komplexní Lieovu grupu (tj. varietu s komplexní strukturou, kompatibilní s $\cdot$) dimenze n^2
tj. $\cdot$, $(\,)^{-1}$ holomorfní

podgrupy $Gl(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$ - tzv. maticové grupy - viz cvičení

Pozn: $U(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n,n} \mid U^+U = \mathbb{1}\}$ není komplexní grupa - $U^{-1} = U^+$ není holomorfní
$O(p,\mathbb{C}) = \{O \in \mathbb{C}^{n,n} \mid O^T O = \mathbb{1}\}$ je komplexní grupa $O^{-1} = O^T$ je holomorfní

speciální homeomorfismy $G: g\in G$: $L_g, R_g : G \to G$ $\quad L_g h = g\cdot h$, $R_g h = h\cdot g$
levá (pravá) translace

levo-(pravo) invariantní vektorová pole $\boxed{X_{gh} = L_{g*} X_h}$ $\forall g,h \in G$ $\quad (X_{hg} = R_{g*} X_h)$

evidentně postačí ověřovat $\boxed{X_g = L_{g*} X_e}$ $\quad (L_{gh*} = L_{g*} \circ L_{h*} \Leftarrow L_{gh} = L_g L_h)$

jiný zápis s využitím kotečného zobrazení:

připomínka: $\phi : M \to M$, $X \in T_p(M)$, $f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow (\phi_* X) f = X(f\circ\phi)$, $\quad f\circ\phi(p) = \phi^* f(p)$
(viz $f \in \Lambda^0(M)$)

tj. $(\phi_* X) f = X \circ \phi^* f$, pro levoinv. pole
$$L_{g*} X|_h f = (X \circ L_g^*(f))|_h \overset{\text{L}}{=} (Xf)|_{gh} = L_g^* (Xf)|_h$$

$\Rightarrow$ levoinvariantní pole $\Leftrightarrow$ $\boxed{L_g^* \circ X = X \circ L_g^*}$

$\Rightarrow L_g^* \circ [X,Y] = L_g^* \circ X \circ Y - L_g^* \circ Y \circ X = X \circ L_g^* \circ Y - Y \circ L_g^* \circ X = X \circ Y \circ L_g^* - Y \circ X \circ L_g^* = [X,Y] \circ L_g^*$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Def: levoinvariantní vektorová pole tvoří algebru } \mathfrak{g} \text{ - Lieova algebra dané Lieovy grupy } G}$

Levoinvariantní vektorová pole jsou vzájemně jednoznačně určena tečnými vektory v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$, konvenčně vybíráme $g = e$
("$\mathfrak{g} \subset T_e G$" evidentní, protože $X|_g = L_{g*} X_e$, "$\mathfrak{g} \supset T_e G$" vyplývá z hladkosti takto konstruovaného X - zkuste si v lokálních souřadnicích)

$\mathfrak{g}$ není asociativní algebra, ale splňuje následující axiomy abstraktní Lieovy algebry

> Def: Lieova algebra je algebra $(A, +, \cdot, [\,,\,])$ splňující následující podmínky:
> (vekt. prostor; distributivní vzhledem k +)
>
> 1) antisymetrie $\quad [X,Y] = -[Y,X] \quad \forall X,Y \in A$
>
> 2) Jacobiho identita $\quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \forall X,Y,Z \in A$

Zavedeme-li bázi A (X_i) $\Rightarrow$ $[\,,\,]$ je určena Lieovými závorkami bazických vektorů

$$[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k \qquad c_{ij}{}^k \text{ strukturní konstanty Lieovy algebry } A$$

$$c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k \text{ antisymetrie}, \qquad c_{i\ell}{}^m c_{jk}{}^\ell + c_{j\ell}{}^m c_{ki}{}^\ell + c_{k\ell}{}^m c_{ij}{}^\ell = 0 \text{ Jacobiho identity}$$

Máme-li maticovou Lieovu grupu G, pak její Lie algebru $\mathfrak{g} = T_e G$ je možné chápat jako algebru matic (tečné vektory ke křivkám v $G \subset GL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$), Lieova závorka je obyčejný komutátor matic $[X,Y] = X.Y - Y.X$ (dokážeme později)

Př: grupa afinních transformací $\mathbb{R}$ $\quad Af(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ $\quad (x,y)(\tilde{x},\tilde{y}) = (x\tilde{x}, x\tilde{y}+y)$
je možné ji realizovat jako maticovou grupu $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ $\quad$ ($x>0 \Rightarrow$ souvislá komponenta)

$af(1)$: $X|_e = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow X|_{(a,b)} f = L_{(a,b)*} X|_{(1,0)} f = (\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}) f(ax, ay+b)|_{(x,y)=(1,0)}$

$\Rightarrow X|_{(a,b)} f = a \cdot (\alpha \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{(a,b)} + \beta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)|_{(x,y)=(a,b)}) \Rightarrow$ báze $af(1)$ $\boxed{X_1 = x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}}$

$[X_1, X_2] = X_2 \qquad$ Totéž maticově $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[X_1, X_2] = X_2$

(2. přednáška)

Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou,

exponenciální zobrazení

homomorfismus grup $f: G \to H$ $\quad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$, u Lieových grup hladké zobr.
izomorfismus grup ... injektivní a surjektivní homomorfismus, — " — difeomorfismus

$\boxed{\text{1-parametrická podgrupa} \quad g: \mathbb{R} \to G \quad t \to g(t) \quad \text{homomorfismus } (\mathbb{R},+) \text{ do } G \quad \text{tj. } g(s+t) = g(s) g(t) = g(t) g(s) \quad (\Rightarrow g(0) = e)}$

Př: G maticová grupa $\Rightarrow \dot{g}(t) = g(t) \cdot \dot{g}(0) = \underbrace{\dot{g}(0)}_{\text{konst. matice}} \cdot g(t) \Rightarrow g(t) = e^{t \dot{g}(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\dot{g}(0))^k$

obecně $g(s+t) = g(t) \cdot g(s) = L_{g(t)} g(s) \Rightarrow \boxed{\underset{T_{g(t)} G}{\dot{g}(t) \in} = L_{g(t) *} \underset{T_e G}{\dot{g}(0) \in}}$ $\leftarrow$ vzpomeňte si na def. Lieovy algebry Lieovy grupy

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{1-parametrické podgrupy} \longleftrightarrow \text{integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry, vycházející z } e}$

Def: $e^{tX} = \exp(tX)$ 1-parametrická podgrupa generovaná $X \in \mathfrak{g}$

$e^X = e^{1X}$

Pozn: Platí, že levoinvariantní vektorová pole jsou úplná, tj. e^{tX} je definováno $\forall t \in \mathbb{R}$

Př: $Af(1)$ $\quad a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\Big|_e \in T_{(1,0)} Af(1) \to ax\frac{\partial}{\partial x} + bx\frac{\partial}{\partial y} \in af(1)$

integrální křivky $f: \mathbb{R} \to Af(1)$ $\quad \dot{f}_1 = a f_1 \quad \dot{f}_2 = b f_1, \quad f_1(0) = 1, f_2(0) = 0$

$\Rightarrow f_1 = e^{at} \quad \dot{f}_2 = b e^{at} \Rightarrow f_2 = \frac{b}{a}(e^{at} - 1) \Rightarrow f(t) = \left(e^{at}, \frac{b}{a}(e^{at} - 1)\right)$

Maticově: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \exp\left(t \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ta)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k a^{k-1} b}{k!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta} & e^{ta}\frac{b}{a} - \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \left(e^{ta}, \frac{b}{a}(e^{ta} - 1)\right)$ OK.

Věta: Pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\boxed{\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}}$

Dk: pp. $\exists B: D = BAB^{-1}$ je diagonální (diagonalizovatelné matice husté v množině všech matic, obě strany rovnice spojité $\Rightarrow$ musí platit obecně)

$\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} BAB^{-1} = \operatorname{tr} AB^{-1}B = \operatorname{tr} A$

$e^{BAB^{-1}} = B e^A B^{-1}$ z definice pomocí Σ, $\det e^D = \det B \det B^{-1} \det e^A = \det e^A$

$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n}), \det e^D = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = e^{\sum_k \lambda_k} = \exp(\operatorname{tr} D)$ QED

$\boxed{\text{Věta: } \exp: \mathfrak{g} \to G: X \to e^X \text{ je difeomorfismus okolí } \vec{0} \in \mathfrak{g} \text{ na okolí } e \in G.}$

Dk: $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor lze chápat jako varietu, $T_0 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \Rightarrow \exp$ hladké zobrazení variet

$\exp_*\big|_0: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\exp(tX)$ je integr. křivka proch. e s tečným vektorem $X \Rightarrow \exp_* =$ identita $\Rightarrow$ podle věty o inverzní funkci je exp lokální difeomorfismus %

Pozn: do detailů $\exp_*$ $\qquad \exp: X \to e^X$ $\qquad \exp_*(X|_0)f = \lim_{t\to 0} \frac{f(e^{\overbrace{tX+0}^{\text{obraz integr. křivky } 0+tX}}) - f(e^0)}{t}$

$\exp_*(X|_0) = \exp_* X)|_e = X|_e \Longleftarrow = \lim \frac{f(e^{tX}) - f(e)}{t} \overset{\text{def.}}{=} Xf|_e$ (exp (int. křivka))

Pozn: pro matice $\exp_*(X) = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\mathbb{1} + tX + O(t^2)\right)\Big|_{t=0} = X$

Pokrývá exp celou souvislou komponentu grupy? Obecně ne, pro souvislé a kompaktní ano

Def: deformační retrakt variety M^n ... V^k podvarieta M^n taková, že existuje spojitá 1-parametrická rodina (hladkých) zobrazení $r_t: M \to M$ taková, že

1. $r_0 =$ identita $\qquad$ 2. $r_1(M) = V$ $\qquad$ 3. $r_t|_V$ je identita $\forall t \in \langle 0, 1\rangle$

Věta: Je-li $V \subset M$ deformační retrakt, pak V a M mají izomorfní homologické grupy
$H_p(M, G) \approx H_p(V, G)$ $\qquad$ (G je libovolná abel. grupa koeficientů)

Dk: $r_{1*}: H_p(M, G) \to H_p(V, G)$ $\qquad$ (platí pro libov. zobrazení dvou variet, díky $F_* \circ \partial = \partial \circ F_*$)
jestliže z_p cykl, $r_1(z_p)$ je hranicí $z = r_0(z_p)$ je homologický $r_t(z_p)$, tj. $r_1(z_p)$
$\Rightarrow z_p$ je též hranicí $\Rightarrow r_{1*}$ je injektivní, $r_{t*}|_V$ identita $\Rightarrow r_{1*}$ je též surjektivní $\Rightarrow$
$\Rightarrow r_{1*}$ je izomorfismus $\qquad$ QED

Důsledek: Je-li $V \subset M$ deformační retrakt, pak V je souvislá $\Leftrightarrow$ M je souvislá.

$SL(2,\mathbb{R})$ $\qquad \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ $\quad xw - yz = 1$ $\quad$ nekompaktní

lze deformovat na $SO(2)$: nejprve def. $\binom{x}{z}, \binom{y}{w}$, aby $x^2+z^2=1$, $xw-yz=1$. V dalším kroku
$\binom{y}{w} \Rightarrow \binom{y}{w} - t(xy+zw)\binom{x}{z}$, tj. hladká deformace na ON vektory zachovávající $\det(\,)=1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$: $\det(\,) = 1$, $(\,)^T(\,) = \mathbb{1}$ (sloupce ON vektory) $\Rightarrow \in SO(2)$

$SO(2)$ souvislá $\left(SO(2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \langle 0, 2\pi) \right)$, topologicky ekvivalentní S^1

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{R})$ má všechny homologické grupy stejné jako $S^1 \Rightarrow$ je souvislá,
není jednoduše souvislá
(totéž lze ukázat i pro $SL(n,\mathbb{R})$)

$sl(2,\mathbb{R}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}}_{A} \Big| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & \overbrace{xy-yx}^{0} \\ \underbrace{zx-zx}_{0} & zy+x^2 \end{pmatrix} = -\det A \cdot \mathbb{1}$

$$\Rightarrow e^A = \begin{cases} \cos\sqrt{\det A}\,\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sin\sqrt{\det A}\, A & \text{pokud } \det A > 0 \\ \cosh\sqrt{|\det A|}\,\mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \sinh\sqrt{|\det A|}\, A & \det A < 0 \\ \mathbb{1} + A & \det A = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{tr} e^A \geq -2 \quad \forall A \in sl(2,\mathbb{R}) \Rightarrow$ např. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ neleží na žádné 1-parametrické podgrupě, tj. se nedá psát jako e^A, kde $A \in sl(2,\mathbb{R})$.

(3. přednáška)

Levoinvariantní vektorová pole generují <u>pravé translace</u>

. $X \in \mathfrak{g}$ $\quad X_e \in T_eG \Rightarrow e^{tX_e}$ integrální křivka procházející e

$g \in G$? integrální křivka procházející g ... odpověď $g \cdot e^{tX_e}$

nebot' $\displaystyle \frac{d}{dt}\, g \cdot e^{tX_e}\Big|_{t=0} = L_{g*}\frac{d}{dt}e^{tX_e}\Big|_{t=0} = L_{g*}X_e \overset{!}{=} X_g$ jak požadováno

$\Rightarrow$

<u>Věta</u>: Tok generovaný levoinvariantním polem X je 1-parametrická grupa pravých translací $\boxed{\phi_t(g) = g\, e^{tX_e}}$, tj. $\boxed{\phi_t = R_{e^{tX_e}}}$

Důsledek: pravoinvariantní vekt. pole jsou z definice invariantní vůči pravým násobením $R_g^* \circ X^{\text{pravé}} = X^{\text{pravé}} \circ R_g^* \Rightarrow$ v infinitesimálním vyjádření

$$[Y^{\text{levé}}, X^{\text{pravé}}] = 0 \quad \text{kde } Y^{\text{levé}} \text{ levoinv.},\ X^{\text{pravé}} \text{ pravoinv.}$$

nebot' $\displaystyle (XY - YX)f\Big|_g = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big\{X(f\circ R_{e^{tY}} - f)\Big|_g - Xf\Big|_{ge^{tY}} + \cancel{Xf\Big|_g}\Big\}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{X\circ R^*_{e^{tY}} - R^*_{e^{tY}}\circ X\}f\Big|_g = 0 \quad (\Leftarrow X = X^{\text{pravé}})$

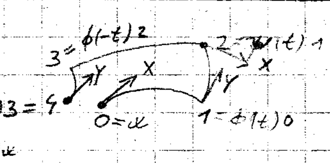
<u>Komutátor matic</u>

X, Y levoinv. vekt. pole $\Rightarrow$ $[X,Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$

<u>Věta</u>: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\phi(t), \psi(t)$ jejich toky, $x \in M$, $\sigma(t) = \psi_{-t}\circ\phi_{-t}\circ\psi_t\circ\phi_t x \Rightarrow$

$$\boxed{[X,Y]f\Big|_x = \lim_{t\to 0}\frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(0))}{t^2}}$$

Dk:



$f(\sigma(t)) - f(0) = [f(4) - f(3)] + [f(3) - f(2)] + [f(2) - f(1)] + [f(1) - f(0)]$

$\displaystyle = -tY_3f + \frac{t^2}{2}Y_3(Yf) - tX_2f + \frac{t^2}{2}X_2(Xf) + \underbrace{tY_1f + \frac{t^2}{2}Y_1(Yf)}_{tY_1f + \frac{t^2}{2}Y_0(Yf) + \sigma(t^3)} + tX_0f + \frac{t^2}{2}X_0(Xf) + \sigma(t^3)$

ozn. $X_0 = X(x)$, $X_1 = X(\phi_t x)$ atd.

$X_2f - X_0f = X_2f - X_1f + X_1f - X_0f = tY_1(X(f)) + tX_0(Xf) + \sigma(t^2)$
$\qquad = tY_0(Xf) + \cancel{tX_0(Xf)} + \sigma(t^2)$

$Y_3f - Y_1f = Y_3f - Y_2f + Y_2f - Y_1f = -tX_0(Yf) + tY_0(Yf) + \sigma(t^2)$

$\displaystyle \Rightarrow f(\sigma(t)) - f(0) = t(X_0f - X_2f + Y_1f - Y_3f) + \frac{t^2}{2}(2Y_0(Yf) + 2X_0(Xf))$

$\displaystyle = t^2(-Y_0(Xf) + X_0(Yf)) \Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(\sigma(t)) - f(x)}{t^2} = [X,Y]f\Big|_x$ QED

$\displaystyle \Rightarrow [X,Y]\Big|_e = \lim_{t\to 0}\frac{\phi^Y_{-t}\circ\phi^X_{-t}\circ\phi^Y_t\circ\phi^X_t(\mathbb{1}) - \mathbb{1}}{t^2}$ $\quad$ pro matice (tj. mohli jsme exponenout "f") lineární zobrazení

toky $\to$ pravá násobení e $\displaystyle \Rightarrow [X,Y]\Big|_e = \lim_{t\to 0}\frac{e^{tX}e^{tY}e^{-tX}e^{-tY} - \mathbb{1}}{t^2}$, dosadíme

rozvoj exponenciely do 2. řádu $\Rightarrow [X,Y]\Big|_e = X\cdot Y - Y\cdot X$ (cvičení)

Pozn: podalgebry: Máme-li $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ $\ [\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ podalgebru $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ Lieovy grupy G. Pak existuje vnořená (tj. v topologii G ne nutně uzavřená) podgrupa $H \subset G$ jejíž Lieova algebra je $\mathfrak{h}$.

Př: $T^2 \ni (x,y)$, $x,y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ abelovská kompaktní grupa, $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, $a/b \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ odpovídající podgrupa hustě pokrývá T^2

Pozn k důkazu: je založen na Frobeniově větě o integrabilitě distribucí

Distribuce (k-rozměrná) hladké zobrazení Δ_k přiřazující každému $x \in M$ k-rozměrný podprostor $\Delta_k(x) \subset\subset T_x M$

Integrální podvarieta distribuce Δ_k - r-rozměrná podvarieta M tečná k Δ_k v každém bodě

Δ_k je (úplně) integrabilní $\Leftrightarrow$ v okolí každého bodu existují souřadnice $x^1, .., x^k, y^1, .., y^{n-k}$ takové, že řezy $y^j = \text{const.}$ definují k-rozměrné integrální podvariety Δ_k. Takové (x,y) se nazývá Frobeniova mapa.

Frobeniova věta: Je-li distribuce Δ_k v involuci, tj. $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$, pak k ní existuje v okolí každého bodu integrální podvarieta, tj. Δ_k je integrabilní.

Jednotlivé integrální podvariety lze spojovat do větších - foliace variety M, jejíž prvky jsou souvislá "napojení" integr. podvariet. Maximální list - takový, ke kterému se již nedá žádná integr. podvarieta přidat

Listy již nejsou nutně (vloženými) podvarietami, ale jsou nadále vnořenými podvarietami, tj. $\exists F: V \to M$ hladké zobrazení takové, že F_* je prosté (tj. F je prosté jen lokálně, též v okolí $x \in M$ nemusí existovat souřadnice v nichž $F(V)|_U = \{y^j = konst\}$) viz T^2

Věta (Chevalley): Maximální list foliované variety M je prostě vnořená podvarieta.

$\Rightarrow$ H jako vnořená podvarieta, je podgrupou, protože díky levoinvariantnosti h je gH opět maximální list, ten z definice je buď totožný s původním nebo s ním má prázdný průnik. Ale pokud $g \in H \Rightarrow \underset{H \text{ z def}}{g \cdot e} = g \in H \Rightarrow gH = H$.
Obdobně $g \in H \Rightarrow g^{-1}H = H$ protože $g^{-1}g = e \in H \Rightarrow g^{-1} \in H$

Def: (Levá) akce grupy G na varietě M: $\phi: G \times M \to M$: $\boxed{\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m)) \quad \phi(e,m) = m}$

Podobně pravá akce $\phi: M \times G \to M$ $\phi(m, g_1 g_2) = \phi(\phi(m, g_1), g_2)$

Pokud H je uzavřená podgrupa G, pak orbity (pravé) akce H na G $\phi(g,h) = g \cdot h$

tj. levé cosety $gH = \{\tilde{g} \in G \mid \exists h \in H: \tilde{g} = gh\}$, tvoří množinu G/H,

na níž lze zavést právě jednu strukturu diferencovatelné variety. Dále

G lze chápat jako hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou H, bází G/H

a projekcí $\pi: G \to G/H$, $\pi(g) = gH$. G/H se nazývá homogenní prostor.

Pozn: $G \times M \to M$ tranzitivní akce, $x_0 \in M$, $H = H_{x_0} = \{g \in G \mid g x_0 = x_0\}$ grupa izotropie (stability) či malá grupa x_0
$\Rightarrow \forall x \in M \; \exists g_x : x = g_x x_0 \Rightarrow H_x = g_x H_{x_0} g_x^{-1} \Rightarrow$ všechny grupy izotropie na M jsou izomorfní,
a M je izomorfní G/H, ve značení výše $x \leftrightarrow g_x H$. Dk: cvičení, na cvičení též $S^2 \approx SO(3)/SO(2)$,
$\mathbb{R}^{1,3} =$ Poincaré / Lorentz, též připravit $so(3) = su(2)$

(4. přednáška)

Reprezentace Lieovy grupy (algebry)

Def: Reprezentace Lieovy grupy G (na vektorovém prostoru V): hladký homomorfismus $\phi: G \to GL(V)$ – regulární lineární operátory na (nějakém) vektorovém prostoru V

Def: Reprezentace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ (na vektorovém prostoru): $\phi: \mathfrak{g} \to gl(V)$ (hladký) homomorfismus algeber, $gl(V)$ lin. operátory na V

Př: $so(3)$ na $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\quad X_1 = -y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y}$ $\quad X_2 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$ $\quad X_3 = -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$

Def: Reprezentace ϕ grupy (algebry) je věrná $\Leftrightarrow$ ϕ je prosté zobrazení.

Pozn: Obraz věrné reprezentace je izomorfní původní grupě (algebře), tj. jej lze chápat jako jednu z možných definujících realizací grupy (algebry) – viz např. $so(3)$ jako matice nebo jako vektorová pole.

Def: Reprezentace ϕ grupy G (algebry $\mathfrak{g}$) je reducibilní $\Leftrightarrow \exists W \subsetneq V, W \neq \{0\}: \boxed{\phi\binom{G}{\mathfrak{g}} W \subset W}$

Def: —— // —— ireducibilní $\Leftrightarrow W \subsetneq V, \phi\binom{G}{\mathfrak{g}} W \subset W \Rightarrow W = \{0\}$

Def: —— // —— úplně reducibilní $\Leftrightarrow \forall W \subsetneq V, W \neq \{0\}; \phi(\,)W \subset W \ \exists \widetilde{W}$
$V = W \oplus \widetilde{W}, \ \phi(\,)\widetilde{W} \subset \widetilde{W}$

Fyzikové (i matematici) mají rádi unitární reprezentace grup, tj. $\phi: G \to U(V)$

kde V je komplexní Hilbertův prostor, $U(V) = \{A \in GL(V) \mid A^+ A = \mathbb{1}\}$

Takové reprezentace jsou mj. úplně reducibilní neboť $\phi W \subset W \Rightarrow \phi W^\perp \subset W^\perp$

Reprezentace příslušných algeber jsou pak realizovány anti-Hermitovskými operátory neboť $\left.\begin{aligned}(e^A)^+ &= e^{A^+}\\ &= e^{-A}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A^+ = -A$. Proto se lze ve fyzice často setkat s dodatečnými imaginárními jednotkami $A \to A_F = -iA \Rightarrow A_F^+ = A_F$, $g = e^{iA_F}$, $[X_i, X_j] = c_{ij}^{\ k} X_k$

$\Rightarrow [X_{Fi}, X_{Fj}] = -c_{ij}^{\ k} X_k = -i\, c_{ij}^{\ k} X_{Fk}$ $\quad$ ((-1) není moc důležitá, lze odstranit $X_j \to -X_j$)

Věta (Schurovo lemma) Je-li $\Sigma \subset gl(V)$ ireducibilní, $A \in gl(V): [A, S] = 0, \ \forall S \in \Sigma$ a V je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ $\Rightarrow A = \kappa \mathbb{1}$, kde $\kappa \in \mathbb{C}$

Dk: nechť λ je vlastní číslo A, $W \subset V: (A - \lambda\mathbb{1}) W = 0 \Rightarrow (A - \lambda\mathbb{1}) S W = S(A - \lambda\mathbb{1}) W = 0, \ \forall S \in \Sigma$
$\Rightarrow W$ je invariantní a Σ ireducibilní $\Rightarrow W = V, \ A = \lambda\mathbb{1}$ $\quad$ QED

Pozn: Je-li $\Sigma \subset gl(V)$ úplně reducibilní, pak lze větu obrátit: $(\forall A \in gl(V): [A, S] = 0 \ \forall S \in \Sigma \Rightarrow \exists \kappa \in \mathbb{C}: A = \kappa\mathbb{1}) \Longrightarrow \Sigma$ je ireducibilní

Dk: $V = W \oplus \widetilde{W}$, $\overset{\neq\{0\}}{W}, \widetilde{W}$ invariantní $\Rightarrow$ def. A: $AW \subset W$, $A\widetilde{W} \subset \widetilde{W}$, $A|_W = \kappa\mathbb{1}$, $A|_{\widetilde{W}} = \lambda\mathbb{1}$
$\Rightarrow [A, S] = 0 \ \forall S \in \Sigma \Rightarrow$ předpokládaná implikace vyžaduje aby $A = \alpha\mathbb{1}$
$\Rightarrow \widetilde{W} = 0 \Rightarrow \Sigma$ ireducibilní $\quad$ QED

Jednoduchá souvislost

pokud je $\pi_1(M)$ abelovská pak též $\cong H_1(M)$

Připomenutí: Souvislá varieta je jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ její fundamentální grupa $\pi_1(M) \cong \{0\}$
$\Leftrightarrow$ všechny 1-cykly jsou hranice $\Leftrightarrow$ všechny uzavřené křivky lze
hladce zdeformovat do bodu, tj. na konstantní zobrazení $S^1 \to x_0 \in M$.

Def: Nakrytí $\bar{M}$ souvislé variety M je souvislá varieta $\bar{M}$ spolu s projekcí $\pi: \bar{M} \to M$ takovou, že
$\forall x \in M: \exists U = U^0 \subset M, x \in U: \pi^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U_\alpha,\ U_\alpha = U_\alpha^0,\ U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset\ \forall \alpha \neq \beta,\ \pi|_{U_\alpha}: U_\alpha \to U$ difeomorfismus

Def: Univerzální nakrytí $\bar{M}$ variety M = jednoduše souvislé nakrytí

Konstrukce: $x_0 \in M$ fixní, pak $\bar{M} = \{[\gamma] / \gamma: \langle 0,1 \rangle \to M,\ \gamma(0) = x_0\},\ \gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$
$\wedge\ \gamma\tilde{\gamma}^{-1}$ je možno kontrahovat do bodu

dostatečně malé okolí $x \in M$ je jednoduše souvislé $\Rightarrow$ jeho zdvihem $\pi^{-1}_{(x,U)}$ na okolí $[\gamma]$, kde $\gamma(1) = x$.

$\left(\pi^{-1}_{(x,U)}: y \in U \to \gamma\gamma_{xy},\ \gamma_{xy}: \langle 0,1 \rangle \to U\ \text{(tj. všechny } \gamma_{xy} \text{ homotopické} \Rightarrow \pi^{-1}_{(x,U)} \text{ dobře def)}\right)$

konstruujeme souřadnicová okolí v $\bar{M}$

Je-li G souvislá Lieova grupa pak lze na $\bar{G}$ jednoznačně definovat grupové operace
- např. $C_g: \langle 0,1 \rangle \to G,\ C_g(1) = g,\ C_h: \langle 0,1 \rangle \to G,\ C_h(1) = h \Rightarrow$ def. $gC_h: \langle 0,1 \rangle \to G,\ gC_h(t) = g \cdot C_h(t)$

$\Rightarrow C_g \cdot C_h \overset{def}{=} C_g \circ gC_h\ \ \langle 0,1 \rangle \to G,\ (C_g C_h)(1) = gh \Rightarrow \bar{g} \cdot \bar{h} \overset{def}{=} [C_g C_h]$

$\bar{e} = [(\gamma: \langle 0,1 \rangle \to G,\ \gamma(t) = e)]$ atd.

ke každé souvislé Lieově grupě G existuje jednoznačně určená jednoduše souvislá grupa $\bar{G}$ která ji nakrývá a platí $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}$ (neboť nakrytí je lokální difeomorfismus).

Obecně platí:

Věta: Ke každé Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathfrak{g}$ je její Lieova algebra (pozn. platí jen pro konečněrozměrné algebry).
Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy s touto Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$ jsou nakrývány G a mohou být proto zapsány jako G/D kde D je diskrétní ($\Leftarrow$ nakrytí) normální (či invariantní $\Leftarrow$ grupovost G/D) podgrupa G.

Pozn: D diskrétní, invariantní $\Rightarrow g d_0 g^{-1} \in D,\ \forall g \in G,\ d_0 \in D,\ G$ souvislá $\Rightarrow \{g d_0 g^{-1} / g \in G\}$
souvislá a současně diskrétní $\Rightarrow g d_0 g^{-1} = d_0 \Rightarrow \boxed{d_0 g = g d_0}$

Pozn: jednoduchá souvislost je důležitá i v teorii reprezentací
- reprezentaci Lieovy algebry lze vždy "vyintegrovat" na reprezentaci odpovídající jednoduše souvislé grupy, ale tato reprezentace grupy nemusí být kompatibilní s faktorizací na G/D, tj. $\phi(g) \neq \phi(gd)$, tj. $\phi(d) \neq \mathbb{1}$
$\Rightarrow$ tzv. víceznačné reprezentace, například spinorová reprezentace $SO(3)$

Příklad: $SU(2)$ univerzální nakrytí $SO(3)$ $\qquad (SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}^2)$

kde $\pi: SU(2) \to SO(3)$ definujeme akcí $SU(2)$ na $\mathbb{R}^3 \cong i\,su(2) = i\,so(3)$ $\quad Ad: SU(2) \to GL(i\,su(2))$
$Ad(g)X = gXg^{-1}$. Na cvičení ukážeme, že $SU(2) \approx S^3$ ($\Rightarrow$ jedn. souvislá),
že Ad definuje nakrytí (tj. je na $SO(3)$, je lokálním difeomorfismem) a $\mathrm{Ker}\,Ad = \{\pm \mathbb{1}\}$
$\Rightarrow SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}^2$ $\qquad$ (viz Frankel)

Lieovy algebry – základní pojmy (5. přednáška)

Def: Podalgebra $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$ ... podprostor, $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$

Pozn: $[a,b] = \text{span}\{[x,y] \mid x \in a, y \in b\}$

Př: podalgebra generátorů rotací v Lorentzově algebře $so(1,3)$ (naopak boosty netvoří podalgebru)

Def: Ideál $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ... podprostor, $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, faktoralgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{x+\mathfrak{h} \mid x \in \mathfrak{g}\}$, $[x+\mathfrak{h}, y+\mathfrak{h}] = [x,y]+\mathfrak{h}$

Př: rotace netvoří ideál v Lorentzově či Poincarého algebře, translace v P.a. ano

Pozn: ideál $\Rightarrow$ podalgebra, naopak platit nemusí

Def: Prostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ ... její jediné ideály jsou $\mathfrak{g}$ a $\{0\}$ a $\dim \mathfrak{g} > 1$.

Př: algebra $so(3)$, $sl(n,\mathbb{R})$, Lorentzova algebra $so(1,3)$

Def: Abelovská Lieova algebra $\mathfrak{g}$ $\quad [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$

Def: Poloprostá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ .. její jediný abelovský ideál je $\{0\}$

Pozn: Později ukážeme, že poloprosté algebry jsou direktním součtem prostých

Def: $\mathfrak{g}$ je direktním součtem $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \Leftrightarrow 0 \neq \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \subsetneq \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2$, $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2] = 0$

Je-li možné $\mathfrak{g}$ takto rozložit, algebra se nazývá rozložitelná, v opačném případě nerozložitelná.

Př: $gl(n) = a(1) \oplus sl(n)$ $\qquad a(1) = \text{span}\{x\}, [x,x] = 0$
$u(n) = a(1) \oplus su(n)$

Def: Ideál $\xi \subset \mathfrak{g}$ je centrum $\mathfrak{g}$ $\Leftrightarrow [\xi,\mathfrak{g}] = 0 \wedge \xi$ je maximální ideál s touto vlastností.

Def: Charakteristické série $\mathfrak{g}$

derivovaná série $\quad \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$. Pokud existuje $k>0: \mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ algebra se nazývá řešitelná

dolní centrální série $\quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}]$. Pokud existuje $k>0: \mathfrak{g}^k = \{0\}$ algebra se nazývá nilpotentní

(horní centrální série $\quad \xi^1 = \xi$, $\xi^k = \xi^{k-1} + \text{centrum}(\mathfrak{g}/\xi^{k-1})$. Existence $k>0: \xi^k = \mathfrak{g}$ je ekvivalentní nilpotentnosti.)

Dk: $K = \min\{k \mid \mathfrak{g}^k = \{0\}\} \Rightarrow \mathfrak{g}^{K-1} \subset \xi^1$, $\mathfrak{g}^{K-j} \subset \xi^j \Rightarrow \xi^K \supset \mathfrak{g} \Rightarrow \xi^K = \mathfrak{g}$
naopak $\tilde{K} = \min\{k \mid \xi^k = \mathfrak{g}\}$, $[\xi^k, \mathfrak{g}] \subset \xi^{k-1} \Rightarrow \mathfrak{g}^j \subset \xi^{\tilde{K}-j} \Rightarrow \mathfrak{g}^{\tilde{K}} = \{0\}$ QED

Př: $\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$ řešitelná, není nilpotentní, $\begin{pmatrix} 0 & * \\ & 0 \end{pmatrix}$ nilpotentní, $\mathfrak{h}(d) = \{X_i, P_i, \mathbb{I}, i = 1..d \mid [X_i, P_j] = \delta_{ij}\mathbb{I}\}$
Heisenbergova algebra je nilpotentní

Pozn: $\mathfrak{g}^{k+1} \supset \mathfrak{g}^{(k)} \Rightarrow$ nilpotentní algebra je řešitelná, řešitelná nemusí být nilpotentní

Pozn: Nilpotentní, resp. řešitelné mohou být též ideály v algebře.

Platí, že průnik $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ a součet řešitelných (nilpotentních) ideálů je řešitelný (nilpotentní) ideál.

Dk: sami či na cvičení.

Vzhledem k předchozí poznámce existuje v dané algebře $\mathfrak{g}$ maximální řešitelný ideál zvaný <u>radikál</u> a maximální nilpotentní ideál zvaný <u>nilradikál</u>.

Nechť $\mathfrak{r}$ je radikál algebry $\mathfrak{g}$. Uvažujme $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ a v ní abelovský ideál $\mathfrak{h}/\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$

tj. $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{r} \Rightarrow \mathfrak{h}^{(1)} = \mathfrak{r}$ a současně $\exists k$ $\mathfrak{r}^{(k)} = 0 \Rightarrow \mathfrak{h}^{(k+1)} = 0$

$\Rightarrow$ podle předpokladu maximality $\mathfrak{r}$ je $\mathfrak{h} = \mathfrak{r} \Rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ nemá netriviální abel. ideály
$\Rightarrow$ je poloprostá. Platí dokonce ještě silnější tvrzení (bez důkazu):

> **Leviho teorém**: Každou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ lze rozložit na (polopřímý) součet poloprosté algebry $\mathfrak{s}$ a radikálu $\mathfrak{r}$
>
> $$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r} \qquad \text{tj.} \quad [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, \ [\mathfrak{s},\mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}, \ [\mathfrak{r},\mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$$
>
> přičemž $\mathfrak{s}$ je určena až na izomorfii. $\mathfrak{s}$ nebo $\mathfrak{r}$ může být rovna 0.

Def: <u>Derivace Lieovy algebry $\mathfrak{g}$</u> $\quad D: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad D([X,Y]) = [D(X),Y] + [X,D(Y)] \ \forall X,Y \in \mathfrak{g}$

Def: <u>adjungovaná akce grupy G</u> $\quad \phi: G \times G \to G \quad \phi(g)h = ghg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}} h$

<u>adjungovaná reprezentace grupy G</u> $\quad Ad: G \to Gl(\mathfrak{g}) \quad Ad(g) = \phi_*(g)\big|_e = L_{g*} \circ R_{g^{-1}*}$

<u>adjungovaná reprezentace algebry $\mathfrak{g}$</u> $\quad ad: \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g}) \quad ad_X(Y) = \frac{d}{dt} Ad(e^{tX})Y\Big|_{t=0} = Ad_*(X)Y$

Pozn: místo <u>adjungovaná</u> se též používá <u>přidružená</u>

Pozn: pro $X \in \mathfrak{g}$ máme $X(f)(a) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(ae^{sX}), \forall f \in C^\infty(G)$; $e^{\phi_*(Y)} = \phi(e^Y), \forall \phi$ homomorfismus $\Rightarrow$

$$\Rightarrow ad_X(Y)(f)(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Ad(e^{tX})Y)(f)(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f\left(ae^{s\,Ad(e^{tX})Y}\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \underbrace{f(ae^{tX}e^{sY}e^{-tX})}_{F(t,s,-t)} =$$

ozn. $F(\alpha,\beta,\gamma) = f(ae^{\alpha X}e^{\beta Y}e^{\gamma X})$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} F(t,s,-t)\Big|_{t=0,s=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta} F - \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \gamma} F\Big|_{\alpha=\beta=\gamma=0} = \frac{d}{d\alpha}\frac{d}{d\beta} f(ae^{\alpha X}e^{\beta Y})\Big|_{\alpha=\beta=0} - \frac{d}{d\beta}\frac{d}{d\gamma} f(ae^{\beta Y}e^{\gamma X})$$

$$= \frac{d}{d\alpha} Yf(ae^{\alpha X})\Big|_{\alpha=0} - \frac{d}{d\beta} Xf(ae^{\beta Y}) = X(Y(f))(a) - Y(X(f))(a) = [X,Y]f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{ad_X(Y) = [X,Y]}$$

Pozn: pro matice je to ihned $\frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} = XY - YX = [X,Y]$

díky Jacobiho identitám je ad_X derivace (ověřte si). Derivace D, pro které existuje X: $D = ad_X$ se nazývají <u>vnitřní</u>, všechny ostatní <u>vnější</u>.

(6. přednáška)

Vztah reálných a komplexních algeber

$\mathfrak{g}$ … reálná Lieova algebra $\Rightarrow$ existuje jediná komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ nazývaná komplexifikace $\mathfrak{g}$, kterou je možné definovat jako

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\,\mathfrak{g} = \mathbb{C}\mathfrak{g} \qquad \text{tj.} \quad [x+iy, z+iv] = [x,z] - [y,v] + i[y,z] + i[x,v]$$

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}} \qquad \text{resp.} \quad (\alpha + i\beta)(x+iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

$\mathfrak{g}$ … komplexní Lieova algebra $\Rightarrow$ existuje jediná reálná Lieova algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, kterou sestrojíme tak, že k nějaké bázi $\{X_j\} \subset \mathfrak{g}$ přidáme $\{iX_j\}$ a všechny rozklady do této báze provádíme nad tělesem $\mathbb{R}$
($\Rightarrow$ strukturní konstanty jsou reálné a imaginární části původních)

$$\boxed{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}}$$

Def: Reálná forma komplexní Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je libovolná reálná Lieova algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ taková, že $\boxed{\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}}$

Pozn: tj. reálná forma není $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$!

Př: $sl(2,\mathbb{C}) = sl(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = su(2)_{\mathbb{C}}$ různé reálné formy

$sl(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = so(1,3)$

Zobrazení Lieových algeber $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ (nad stejným tělesem)

Def: Lineární zobrazení $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfismus $\Leftrightarrow [\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X,Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Homomorfismus $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je endomorfismus $\Leftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

Homomorfismus $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je izomorfismus $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \phi = \{0\}$, $\phi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$.

Izomorfismus $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je automorfismus $\Leftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

Př: $\forall g \in G$ je $Ad_g\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ automorfismus. Dk: pro matice zřejmé, obecně z def. Ad

ad_X není automorfismus (ani homomorfismus), nýbrž derivace.

Killingova forma

Def: Symetrická bilineární forma ω na $\mathfrak{g}$ je invariantní $\overset{\text{vůči automorfismům } \mathfrak{g}}{\Leftrightarrow}$ $\omega(\phi(X), \phi(Y)) = \omega(X,Y) \quad \forall \phi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$

Pozn: invariance vzhledem k Ad vyplývá po zderivování $\omega(ad_X Y, Z) + \omega(Y, ad_X Z) = 0 \Rightarrow$

Def: $\boxed{\omega([X,Y], Z) + \omega(Y, [X,Z]) = 0} \Leftrightarrow \omega$ je ad-invariantní = invariantní

Pozn: pro neprosté algebry se tyto definice liší (viz $\mathfrak{g}$ abelovská), invariance vůči automorfismům je silnější požadavek

Def: Killingova forma $K: g \times g \to g$ $\quad K(X,Y) = tr(ad_X \circ ad_Y)$

Pozn: Killingova forma je evidentně symetrická bilineární, je invariantní vůči automorfismům

neboť $\quad ad_{\phi(X)} Y = [\phi(X), Y] = [\phi(X), \phi(\phi^{-1}(Y))] = \phi[X, \phi^{-1}(Y)] = \phi \circ ad_X \circ \phi^{-1}(Y)$

$\Rightarrow K(\phi(X), \phi(Y)) = tr(\phi\, ad_X \phi^{-1} \phi\, ad_Y \phi^{-1}) = tr(\phi^{-1}\phi\, ad_X ad_Y) = tr(ad_X ad_Y)$

Pozn: $K([X,Y], Z) = tr(ad_{[X,Y]} ad_Z) = tr(ad_X ad_Y ad_Z - ad_Y ad_X ad_Z) = tr(ad_Y ad_{[Z,X]}) = -K(Y,[X,Z])$

Pozn: $I \subseteq g$ ideál $\Rightarrow K_I = K_G|_{I \times I}$

Dk: $X,Y \in I \Rightarrow ad_X, ad_Y: g \to I \Rightarrow$ seřadíme-li vhodnou bázi g, aby prvních $\dim I$ vektorů tvořilo bázi I máme matice s pouze prvními $\dim I$ řádky nenulovými $\Rightarrow$ též jejich součin $\Rightarrow tr(\underbrace{\dots}_{A}) = \sum_{k=1}^{\dim g} A_{kk} = \sum_{k=1}^{\dim I} A_{kk} \Rightarrow K_G(X,Y) = K_I(X,Y)$ QED

Nilpotentní a řešitelné algebry

Pozn: Homomorfní obraz řešitelné (nilpotentní) algebry je řešitelný (nilpotentní)

Dk indukcí $\phi(g^{(k)}) = \phi(g)^{(k)}$, $\phi(g^k) = (\phi(g))^k$ Důsledek: faktoralgebry řeš./nilp. algebry jsou řeš./nilp.

Pozn: I řešitelný ideál g, g/I řešitelná $\Rightarrow g$ řešitelná. $I \subseteq \xi(g)$ ideál, g/I nilpotentní $\Rightarrow g$ nilpotentní

Dk: $(g/I)^{(k)} = 0 \Leftrightarrow g^{(k)} = 0 \mod I \Leftrightarrow g^{(k)} \subseteq I$, $I^{(J)} = 0 \Rightarrow g^{(K+J)} = 0 \Rightarrow g$ řešitelná

$(g/I)^k = 0 \Leftrightarrow g^k = 0 \mod I \Leftrightarrow g^k \subseteq I$, $[I,g] = 0 \Rightarrow g^{k+1} = 0 \Rightarrow g$ nilpotentní

Pozn: ϕ homomorfismus g takový, že $\phi(g)$, $\ker\phi$ jsou řešitelné. Pak g je řešitelná

Dk: $\phi(g) \cong g/\ker\phi \Rightarrow g/\ker\phi$, $\ker\phi$ řešitelné ($\ker\phi$ je ideál neboť $X \in \ker\phi \Rightarrow \phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$
$\Rightarrow g$ řešitelná QED $\quad [X,Y] \in \ker\phi \Leftarrow \quad = 0\ \forall Y \in g$)

Pozn: g je řešitelná $\Leftrightarrow ad_g = \{ad_X | X \in g\}$ je řešitelná

Dk: ad je homomorfismus $g \to gl(g)$, $\ker ad = \xi(g)$, $\xi(g)$ abel. $\Rightarrow$ řešitelná QED

Pozn: g nilpotentní $\Leftrightarrow ad_g$ je nilpotentní (Lieova algebra) Dk: ditto

Vlastnosti operátorů (resp. matic) $\in gl(V)$

Def: Operátor $A \in gl(V)$ je diagonalizovatelný (poloprostý) existuje-li báze V tvořená jeho vlastními vektory. Soubor operátorů $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je současně diagonalizovatelný, existuje-li báze V tvořená společnými vlastními vektory A_α, tj. $A_\alpha x_j = \lambda_j^{(\alpha)} x_j$.

Def: Operátor $A \in gl(V)$ je nilpotentní pokud existuje $k \in \mathbb{N}: A^k = 0$

Př: horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou

Věta (Jordanův rozklad): Nechť $X \in gl(V)$, V nad $\mathbb{C}$. Pak existuje jednoznačně určený rozklad $X = S + N$, kde S je poloprostý, N je nilpotentní, $[S,N] = 0$. S, N jsou polynomy v X.

Bez Dk. Pro matice to znamená existenci Jordanovy formy matice, ve vhodné bázi $A \sim \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$
kde $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}$ je $m_i \times m_i$ blok, $\lambda_i \in \sigma(A)$, $m_i \geq 1$, λ_i nemusí být navzájem různá

Věty Lieova a Engelova

7. přednáška

Věta Lieova: Nechť $\mathfrak{g}$ je podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$, V nad $\mathbb{C}$. Pak je možné elementy $\mathfrak{g}$ přivést současně k hornímu trojúhelníkovému tvaru právě tehdy když $\mathfrak{g}$ je řešitelná.

Def: $X \in \mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní $\iff \exists n \in \mathbb{N}: (ad_X)^n = 0$

Pozn: každý element nilpotentní algebry je ad-nilpotentní ($\Leftarrow \exists k: ad_{X_1} \dots ad_{X_k} = 0, \forall X_j \in \mathfrak{g}$, speciálně $(ad_X)^k = 0$) ale nemusí být nilpotentní sám jako matice, viz $\{\lambda \mathbb{1} | \lambda \in \mathbb{C}\}$

Věta Engelova: Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je nilpotentní právě tehdy když každý element $\mathfrak{g}$ je ad-nilpotentní. Každá komplexní maticová nilpotentní algebra je izomorfní podalgebře algebry matic tvaru

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & ? \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}}_{m_1} \Big\}{m_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & ? \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}}}_{m_2} \Big\}{m_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Důkaz:

Lemma 1: Každý nilpotentní element $\mathfrak{gl}(V)$ je ad-nilpotentní.
Dk: $(ad_X)^k Y = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} X^j Y X^{k-j} \binom{k}{j}$ (indukcí) $\Rightarrow$ pokud $X^n = 0 \Rightarrow$ pro $k = 2n$ je buď $X^j = 0$ nebo $X^{k-j} = 0 \Rightarrow (ad_X)^k = 0$

Lemma 2: I ideál v $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $W = \{v \in V | Xv = 0, \forall X \in I\}$. Pak $\mathfrak{g} W \subset W$.
Dk: $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow Xv \overset{?}{\in} W$ $\quad Y \in I \Rightarrow YXv = X\underbrace{Yv}_{0} + \underbrace{\underbrace{[Y,X]}_{\in I} v}_{=0} = 0 \Rightarrow Xv \in W$

Lemma 3: $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ taková, že všechny elementy $\mathfrak{g}$ jsou nilpotentní. Pak existuje $w \in V$, $w \neq 0$, $Xw = 0\ \forall X \in \mathfrak{g}$.
Dk: indukcí podle dimenze $\mathfrak{g}$ - $\dim \mathfrak{g} = 1 \Rightarrow$ triviální, viz lineární algebra
pp. že platí pro všechny Lieovy algebry do dimenze $n-1$ včetně
$\dim \mathfrak{g} = n$ pp. $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ podalgebra maximální dimenze

def. akci $\mathfrak{h}$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: $\phi(X)(Y + \mathfrak{h}) = ad_X Y + \mathfrak{h}$ $\quad X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow \phi(X)$ Lieova algebra operátorů působících na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, její $\dim \leq \dim \mathfrak{h}$
$\forall X \in \mathfrak{h}$: $\phi(X)$ je nilpotentní ($\Leftarrow ad_X$ je nilpot. podle L1) $\Rightarrow$ dle indukčního pp.
$\exists S \in \mathfrak{g}$: $S + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $S + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$, $\phi(X)(S + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\forall X \in \mathfrak{h} \Rightarrow$
$\Rightarrow S \notin \mathfrak{h}$, $[X, S] \in \mathfrak{h}$, $\forall X \in \mathfrak{h} \Rightarrow \mathrm{span}\{S\} + \mathfrak{h}$ je podalgebra, její $\dim = \dim \mathfrak{h} + 1$
$\Rightarrow$ podle pp. $= \mathfrak{g}$, a je zřejmé, že $\mathfrak{h}$ je ideál

$W = \{w \in V | \mathfrak{h} w = 0\} \Rightarrow W$ invariantní dle L2, S je nilpotentní, $SW \subset W$
$\Rightarrow$ existuje $w \in W$: $Sw = 0 \wedge w \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g} w = 0 \Rightarrow$ L3 platí pro $\dim \mathfrak{g} = n \Rightarrow$ dokázáno

Lemma 4: Každá Lieova algebra $\mathfrak{g}$ nilpotentních operátorů je izomorfní podalgebře horních trojúhelníkových matic s nulovou diagonálou, tj. $\mathfrak{g}$ je nilpotentní algebrou

Dk: dle L... $\exists v_1 \in V$ $Xv_1 = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$, definujme
akci $\mathfrak{g}$ na $V/\mathrm{span}[v_1]$ $\phi(X)(v + [v_1]) = Xv + [v_1]$ $\phi(X)$ jsou evidentně
opět nilpotentní $\Rightarrow$ v_2 : $X(v_2 + [v_1]) = [v_1] \Rightarrow Xv_2 = \alpha v_1$
indukcí získáváme <u>kompoziční řadu</u> $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$

$\dim V_i/V_{i-1} = 1$ $\mathfrak{g} V_i \subset V_{i-1}$ $\Rightarrow$ v bázi tvořené
elementy $v_i \in V_i$ <u>jsou matice</u> operátorů X <u>horní trojúhelníkové s nul. diag.</u>

$\Rightarrow$ <u>Dk Engelovy věty</u> $\forall X \in \mathfrak{g}$ <u>ad-nilpotentní</u> $\Rightarrow$ $ad_{\mathfrak{g}}$ je nilpotentní dle L4 $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ nilpot.
naopak viz pozn. před Engelovou větou (6 přednáška)

Dk Lieovy věty

<u>Lemma 5</u>: $\mathfrak{g} \subset gl(V)$ řešitelná podalgebra, V nad $\mathbb{C}$. Pak existuje $v \in V, v \neq 0$: $Xv = \lambda(X)v$, $\forall X \in \mathfrak{g}$
λ je lineární funkcionál.

Dk: indukcí dle dim $\mathfrak{g}$ ... $\dim \mathfrak{g} = 1$ triviální
$\mathfrak{g}^{(1)} \subsetneq \mathfrak{g}$ protože $\mathfrak{g}$ řešitelná, I podprostor $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} \subset I$, I dimenze $\dim \mathfrak{g} - 1$

$\Rightarrow I$ je ideál $([I, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset I)$, I řešitelný $\Rightarrow \exists v_0 \neq 0 \in I$: $Xv_0 = \lambda_0(X) v_0$

libovolné $Z \in \mathfrak{g} \setminus I$, def. $v_{j+1} = Z v_j$ $j = 0, 1, 2, \dots$ $\Rightarrow W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\dim W \leq \dim V < +\infty$

$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$: $W = \mathrm{span}\{v_j\}_{j=0}^{p}$ $ZW \subset W$

$$Xv_1 = XZv_0 = ZXv_0 + [X,Z]v_0 = \lambda_0(X)v_1 + \lambda_0([X,Z])v_0$$
$$Xv_2 = ZXv_1 + [X,Z]v_1 = \lambda_0(X)v_2 + 2\lambda_0([X,Z])v_1 + \lambda_0([[X,Z],Z])v_0$$

indukcí $Xv_k \in \mathrm{span}\{v_0, \dots, v_k\}$, tj. W je invariantní vůči I, $X|_W$ v bázi $(v_j)_{j=0}^{p}$
je horní trojúhelníková matice s $\lambda_0(X)$ na diagonále, tj.
$tr_W(X) = \lambda_0(X) \dim W$. Protože $tr_W([X,Z]) = tr_W(XZ) - tr_W(ZX) = 0$
máme $\lambda_0([X,Z]) = 0$ $\forall X \in I$ $\Rightarrow$ indukcí máme
$Xv_{j+1} = \lambda_0(X) v_{j+1}$ $\Rightarrow X$ jsou současně diagonální na W

$ZW \subset W \Rightarrow \exists w \in W$: $Zw = \alpha w$, $w \neq 0$ $\Rightarrow$ L5 <u>dokázáno</u> $(\lambda(\beta Z + X) = \beta\alpha + \lambda_0(X))$

k Lieově větě v_1 společný vlastní vektor $\forall X \in \mathfrak{g}$, $Q_1 = V/\mathrm{span}[v_1]$

$\Rightarrow \phi(X): Q_1 \to Q_1$ $\phi(X)(v + [v_1]) = Xv + [v_1]$, dle L5 existuje
$v_2 \in V \setminus \mathrm{span}[v_1]$: $\phi(X)(v_2 + [v_1]) = Xv_2 + [v_1] = \lambda_2(X)v_2 + [v_1]$, tj. $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 \mod [v_1]$

indukcí $v_1, \dots, v_n \in V$ $Xv_i = \lambda_i(X) v_i \mod \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$
tj. $\Leftarrow$ v Lieově větě dokázáno, $\Rightarrow$ zřejmé QED

Pozn: $\boxed{\mathfrak{g} \text{ je řešitelná} \iff \mathfrak{g}^{(1)} \text{ je nilpotentní}}$

Dk: $\Leftarrow$ zřejmé
nad $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ elementy tvaru $[X,Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ jsou ad-nilpotentní, protože $ad_{[X,Y]} = ad_X ad_Y - ad_Y ad_X$
a ad_X, ad_Y jsou dle Lieovy věty ve vhodné bázi horní troj. matice $\Rightarrow$ jejich
komutátor je horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou $\Rightarrow$ $ad_{[X,Y]}|_{\mathfrak{g}^{(1)}}$
je též nilpotentní $\Rightarrow$ podle Engelovy věty je $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotentní

nad $\mathbb{R}$: $(\mathfrak{g}^{(k)})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{(k)}$, $(\mathfrak{g}^{k})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{k}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ je nilpotentní / řešitelná $\iff$ $\mathfrak{g}$ je nilpotentní / řešitelná QED

Cartanova kritéria

(8. přednáška)

Věta: $\mathfrak{g} \subset gl(V)$ podalgebra, $\operatorname{Tr} XY = 0$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Pak je $\mathfrak{g}$ řešitelná.

Dk pro komplexní V (jinak komplexifikací)

chceme dokázat, že $\forall X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ je nilpotentní ($\Rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ nilpot. $\Rightarrow \mathfrak{g}$ řešitelná)

$X = S + N$, $S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ve vhodné bázi, $[S,N] = 0 = [X,N] = [X,S]$

$\Rightarrow \operatorname{ad}_S (E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \Rightarrow \operatorname{ad}_S$ diagonální $((E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb})$

N nilpot. $\Rightarrow \operatorname{ad}_N$ nilpot. $\Rightarrow \operatorname{ad}_S + \operatorname{ad}_N$ je Jordanův rozklad $\operatorname{ad}_X \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ad}_S$ je polynom v ad_X $\quad \operatorname{ad}_S = p(\operatorname{ad}_X)$ $\qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ $\quad \bar\lambda_i - \bar\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} a_k (\lambda_i - \lambda_j)^k$

$Y \in \mathfrak{g}$ $\quad [S,Y] = \operatorname{ad}_S Y = p(\operatorname{ad}_X) Y \in \mathfrak{g}$ $\qquad$ jestli $\lambda_i - \lambda_j = \tilde\lambda_i - \tilde\lambda_j \Rightarrow \overline{\lambda_i - \lambda_j} = \overline{\tilde\lambda_i - \tilde\lambda_j}$

$\Rightarrow a_k$ vždy existují

$\bar S = \operatorname{diag}(\bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_n) \Rightarrow \operatorname{ad}_{\bar S}(E_{ij}) = (\bar\lambda_i - \bar\lambda_j) E_{ij} \Rightarrow \exists$ polynom g: $\bar\lambda_i - \bar\lambda_j = g(\lambda_i - \lambda_j)$

$\Rightarrow \operatorname{ad}_{\bar S} = g(\operatorname{ad}_S) = \tilde p(\operatorname{ad}_X) \Rightarrow [\bar S, Y] \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$

$\bar S$ je diagonální a $[\bar S, N] = \tilde p(\operatorname{ad}_X) N = \tilde p(0) \cdot N$, tj. $[\bar S, N] = 0 \mod \operatorname{span}\{N\} \Rightarrow$

$\bar S N$ je nilpotentní, $\operatorname{Tr} \bar S N = 0$ (ve vhodné bázi, v níž $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ to je ostatně zřejmé)

$\operatorname{Tr} \bar S X = \operatorname{Tr}(\bar S (S+N)) = \operatorname{Tr} \bar S S = \sum_i |\lambda_i|^2$

$X \in \mathfrak{g}^{(1)} \Rightarrow X = \sum_r [A_r, B_r] \Rightarrow \operatorname{Tr} \bar S X = \operatorname{Tr} \sum \bar S [A_r, B_r] = \operatorname{Tr} \sum \overbrace{\underbrace{[\bar S, A_r]}_{\in \mathfrak{g}} \underbrace{B_r}_{\in \mathfrak{g}}}^{=0}$

$\Rightarrow \operatorname{Tr} \bar S X = 0 \Rightarrow \sum_i |\lambda_i|^2 = 0 \Rightarrow S = 0 \Rightarrow X = N$ je nilpotentní. $\qquad$ QED

Věta (1. Cartanovo kritérium) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je řešitelná $\Leftrightarrow K(X,Y) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$.

Dk: $\Leftarrow$ $K(X,Y) = 0 \Rightarrow K(X,Y) = 0$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)} \Rightarrow \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y = 0$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$

$\Rightarrow \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}}$ je řešitelná $\Rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$ je řešitelná, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ je abelovská, tj. řešitelná $\Rightarrow \mathfrak{g}$ řešitelná

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ řešitelná, pp. komplexní (jinak komplexifikací) $\Rightarrow \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ řešitelná

$\overset{\text{Lie}}{\Rrightarrow}$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ ve vhodné bázi horní ∇ matice, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{(1)}} = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}})^{(1)} \Rightarrow$ striktně horní trojúhelníkové matice $\Rightarrow \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$, $Y \in \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{g}^{(1)}$ též $\Rightarrow K(X,Y) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(1)}$ $\qquad$ QED

Věta (2. Cartanovo kritérium) Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je poloprostá $\Leftrightarrow$ její Killingova forma je nedegenerovaná.

Dk: $\mathfrak{g}$ není poloprostá $\Rightarrow \exists I \subset \mathfrak{g}$, $[I, \mathfrak{g}] \subset I$, $[I,I] = 0$, $I \neq 0$

$X \in I$, $Y \in \mathfrak{g}$ $\quad (\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y)^2 = 0$ $\quad$ neboť $[X,[Y,[X,[Y,Z]]]] = 0$ $\quad$ ($[I,I] = 0$)

$\Rightarrow \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$ nilpotentní

$\Rightarrow \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y = 0 \Rightarrow K(X,Y) = 0$ $\forall Y \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow K$ degenerovaná

K degenerovaná $\quad$ def. $\operatorname{rad} K = \{X \mid K(X,Y) = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ $\quad$ $\operatorname{rad} K$ je ideál (níže)

$\Rightarrow K|_{\operatorname{rad} K \times \operatorname{rad} K} = 0 \Rightarrow$ dle 1. Cartanova kritéria $\operatorname{rad} K$ je řešitelný $\Rightarrow \mathfrak{g}$ není poloprostá $\qquad$ QED

Pozn: $(\operatorname{rad} K)^{(k)}$ jsou ideály nejen v $\operatorname{rad} K$, ale i v $\mathfrak{g}$
neboť $X, Y \in (\operatorname{rad})^{(k-1)}$, $Z \in \mathfrak{g} \Rightarrow [Z,[X,Y]] = [\underbrace{[Z,X]}_{(\operatorname{rad} K)^{(k)}}, Y] + [X, \underbrace{[Z,Y]}_{(\operatorname{rad} K)^{(k)}}]$

Def: Ortogonální doplněk vzhledem ke Killingově formě ideálu $I \subset \mathfrak{g}$

$$I^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid K(X,Y) = 0, \ \forall Y \in I\}$$

Pozn: $I^\perp$ je ideál: $X \in I^\perp$, $Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X,Y]$: $\quad Z \in I$ $\quad K([X,Y],Z) = -K(X,[Z,Y]) = 0 \Rightarrow [X,Y] \in I^\perp$

Věta: Poloprostou Lieovu algebru lze rozložit na přímý součet prostých ideálů

ex. pp. $\mathfrak{g}$ není prostá, tj. $\exists I \subsetneq \mathfrak{g}$, $I \neq 0$ ideál $\Rightarrow I \cap I^\perp$ je abelovský $\Rightarrow I \cap I^\perp = \{0\}$

$\left(X,Y \in I \cap I^{\perp}, Z \in g \quad K([X,Y],Z) = -K(\underbrace{X}_{\in I^{\perp}}, \underbrace{[Z,Y]}_{\in I}) = 0 \quad \forall Z \Rightarrow \text{díky nedeg. } [X,Y]=0 \right)$

$\dim I + \dim I^{\perp} = \dim g$ (ve zvolené bázi $\{V_i\} \subset I \quad A: g \to I \quad A(X) = V_i K(V_i, X)$
$\Rightarrow \dim \ker A + \dim A(g) = \dim g$)

g poloprostá $\Rightarrow g = I + I^{\perp}, \ I \cap I^{\perp} = 0, \ [I, I^{\perp}] \subset I, \subset I^{\perp} \Rightarrow [I, I^{\perp}] = 0 \Rightarrow g = I \oplus I^{\perp}$ dál indukcí QED

Věta: Všechny derivace poloprosté Lieovy algebry jsou vnitřní.

Dk: ozn. $\mathcal{D}(g)$ Lieovu algebru všech derivací algebry g, $ad: g \to \mathcal{D}(g)$
g poloprostá $\Rightarrow \mathcal{E}(g)=0 \Rightarrow ad$ je izomorfismus g a $ad_g \Rightarrow ad_g$ je poloprostá

$D \in \mathcal{D}(g) \Rightarrow [D, ad_X]Y = D([X,Y]) - [X, D(Y)] \overset{\text{def}}{\underset{\text{der.}}{=}} [D(X), Y] \Rightarrow [D, ad_X] = ad_{D(X)} \Rightarrow ad_g$ je ideál v $\mathcal{D}(g)$

$(ad_g)^{\perp}$ je též ideál $\Rightarrow ad_g \cap ad_g^{\perp}$ je ideál, $\underset{\text{Killing. f. na } \mathcal{D}(g)}{K}\Big|_{ad_g \cap ad_g^{\perp} \times ad_g \cap ad_g^{\perp}} = 0 \Rightarrow ad_g \cap ad_{g^{\perp}}$ řešitelný

ad_g je poloprostá $\Rightarrow ad_g \cap ad_{g^{\perp}}$ řešitelný ideál v ní $\Rightarrow ad_g \cap ad_{g^{\perp}} = 0$

$D \in (ad_g)^{\perp} \Rightarrow \underset{\in ad_g}{ad_{D(X)}} = [D, ad_X] \in (ad_g)^{\perp}$ (ideál) $\Rightarrow ad_{D(X)} = 0 \quad \forall D \in (ad_g)^{\perp}, \forall X \in g$

$\Rightarrow \forall X \in g: D(X) \in \ker ad = \{0\} \Rightarrow (ad_g)^{\perp} = 0 \ \wedge \ \dim ad_g + \dim (ad_g)^{\perp} \geq \dim \mathcal{D}(g)$
$\Rightarrow ad_g = \mathcal{D}(g)$ QED (viz hledání $(ad_g)^{\perp}$ řešením lin. soustavy)

Def: Normalizátor podalgebry $h \subset g$ je množina $X \in g: [X, h] \subset h$.

Pozn: evidentně h je ideálem svého normalizátoru

Def: Cartanova podalgebra h Lieovy algebry g je nilpotentní podalgebra, která splývá se svým normalizátorem.

Ukážeme, že každá poloprostá Lieova algebra má Cartanovu podalgebru.

$g \quad X \in g \Rightarrow g = \bigoplus_{\lambda} g_{\lambda}(X), \quad g_{\lambda}(X) = \{Y \in g \mid \exists k \in \mathbb{N}: (ad_X - \lambda \mathbb{1})^k Y = 0\}$

$ad_X X = 0 \Rightarrow g_0(X) \neq 0, \quad \dim g_0(X)$ .. nulita ad_X

Def: $X \in g$ je regulární $\Longleftrightarrow \dim g_0(X)$, tj. nulita ad_X, je nejmenší možná.

Věta: Je-li H regulární element poloprosté Lieovy algebry pak $g_0(H)$ je Cartanova podalgebra g.

Dk:

Pozn: $(ad_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1})^n [A,B] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad_X - \lambda\mathbb{1})^j A, (ad_X - \mu\mathbb{1})^{n-j} B]$

Dk: $n=0$ evidentní, $n \to n+1 \quad (ad_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1})^{n+1}[A,B] = (ad_X - (\lambda+\mu)\mathbb{1}) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad_X - \lambda\mathbb{1})^j A, (ad_X - \mu\mathbb{1})^{n-j} B]$

$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad_X - \lambda\mathbb{1})(ad_X - \lambda\mathbb{1})^j A, (\ )^{n-j} B] + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} [(ad_X - \lambda\mathbb{1})^j A, (\ )^{n-j+1} B]$

$= \sum_{j=0}^{n+1} \left\{ \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right\} [(\ )^j A, (\ )^{n+1-j} B] = \sum_{j=0}^{n+1} \left(\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) [\ ,\ ] = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} [\ ,\ ]$ QED

$\frac{n!}{j!(n-j+1)!} (j + n - j + 1) = \binom{n+1}{j}$

$\Rightarrow \boxed{[g_{\lambda}(H), g_{\mu}(H)] \subset g_{\lambda+\mu}(H)}$

Lemma: Je-li H_0 regulární pak $\mathfrak{g}_0(H_0)$ je nilpotentní.

Dk: $H_1 \in \mathfrak{g}_0(H_0)$ $\quad H(z) = zH_1 + (1-z)H_0 \subset \mathfrak{g}_0(H_0)$, protože $[\mathfrak{g}_0(H),\mathfrak{g}_\lambda(H)] \subset \mathfrak{g}_\lambda(H)$

platí $ad_{H(z)}\, \mathfrak{g}_\lambda(H_0) \subset \mathfrak{g}_\lambda(H_0)$, dosadím $z=0 \Rightarrow ad_{H(0)}\big|_{\mathfrak{g}_\lambda(H_0)}$ je invertibilní transf. pro $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ totéž ze spojitosti pro dostatečně malé $z \Rightarrow \mathfrak{g}_0(H(z)) \cap \mathfrak{g}_\lambda = 0$ pro $\lambda \neq 0$,

což společně s $ad_{H(z)}\mathfrak{g}_\lambda(H_0) \subset \mathfrak{g}_\lambda(H_0)$ implikuje $\mathfrak{g}_0(H(z)) \subset \mathfrak{g}_0(H_0)$. Díky regularitě H_0 je ale $\dim \mathfrak{g}_0(H_0)$ minimální

$\Rightarrow \dim \mathfrak{g}_0(H(z)) = \dim \mathfrak{g}_0(H_0) \Rightarrow \mathfrak{g}_0(H(z)) = \mathfrak{g}_0(H_0)$ pro malé z

$\Rightarrow ad^k_{H(z)} Y = (ad_{zH_1+(1-z)H_0})^k \underset{\in \mathfrak{g}_0(H_0)}{Y} = 0$ pro $\forall z: |z| < \varepsilon$, ale $(ad_{zH_1+(1-z)H_0})^k$ je polynom

v z nulový pro $\forall z: |z|<\varepsilon \Rightarrow$ nulový $\forall z \in \mathbb{C}$, i $z=1 \Rightarrow (ad_{H_1})^k\big|_{\mathfrak{g}_0(H_0)} = 0$

$\Rightarrow \forall H_1 \in \mathfrak{g}_0(H_0)$ jsou ad-nilpotentní na $\mathfrak{g}_0(H_0) \Rightarrow$ dle Engelovy věty $\mathfrak{g}_0(H_0)$ je nilpotentní

$\mathfrak{g}_0(H_0) \subset \mathfrak{g}_0(H_1)$, $\forall H_1 \in \mathfrak{g}_0(H_0)$ QED

$\mathfrak{g}_0$ nilpotentní $\Rightarrow ad_{\mathfrak{g}_0}\big|_{\mathfrak{g}}$ je nilpotentní (homomorfní obraz nilpot. alg.) algebra operátorů $\Rightarrow$ podle Engelovy věty existuje báze podprostorů $\mathfrak{g}_\lambda(H_0)$:

$$\forall H \in \mathfrak{g}_0(H)\quad ad_{H_0} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & 0 & & \\ & \lambda_1(H) \ddots & 0 & \\ & & \lambda_1(H) & \\ & & & \lambda_2(H) \ddots \\ & & & \lambda_2(H) \\ \mathfrak{g}_0 & & & \end{pmatrix}$$

$\lambda_j : \mathfrak{g}_0(H) \to \mathbb{C}$ evidentně $\lambda_j \in \mathfrak{g}_0(H)^*$

kořeny

Lemma: $H \in \mathfrak{g} \Rightarrow K(X,H) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_\lambda(H), \lambda \neq 0$ $\quad$ Dk: $ad_X : \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{\alpha+\lambda} \Rightarrow ad_X\, ad_H : \mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_{\alpha+\lambda}$
$\Rightarrow K(X,H) = Tr\, ad_X\, ad_H = 0$

Lemma: $\mathfrak{g}$ poloprostá. Jestliže pro $H \in \mathfrak{g}_0$ platí, že $\lambda_i(H) = 0$ pro všechny kořeny λ_i pak $H=0$.
V důsledku λ_i generují jako lineární obal celé $\mathfrak{g}_0^*$.

Dk: $\lambda_i(H) = 0 \Rightarrow ad_H$ je horní trojúhelníková matice s nulovou diagonálou
$\Rightarrow K(H,H') = Tr\, ad_H\, ad_{H'} = 0$, $\forall H' \in \mathfrak{g}_0$, podle předchozího lemmatu $K(X,H)=0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_\lambda(H), \lambda\neq 0$
$\Rightarrow K(H,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \Rightarrow$ dle nedegenerovanosti K je $H=0$.

$\Rightarrow$ normalizátor $\mathfrak{g}_0$ je $\mathfrak{g}_0$ $\left(\forall X \in \mathfrak{g} \quad X = \sum_\lambda X_\lambda, X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda, \quad [H, X] = \sum \lambda(H) X_\lambda + \dots, \forall H \neq 0, \exists \lambda_i : \lambda_i(H) \neq 0 \right.$
$\left. \Rightarrow X_\lambda = 0 \quad \forall \lambda \neq 0 \Rightarrow X = X_0 \in \mathfrak{g}_0 \right)$ QED

$\Rightarrow \mathfrak{g}_0$ je Cartanova podalgebra

Pro poloprosté algebry existuje i jiná, ekvivalentní definice Cartanovy podalgebry

Def: Cartanova podalgebra poloprosté algebry $\mathfrak{g}$ je její maximální abelovská podalgebra taková, že ad_H je poloprostý pro všechna $H \in \mathfrak{g}_0$

Dokážeme, že $\mathfrak{g}_0(H_0)$ je Cartanova podalgebra i podle této definice

1) abel. $K([H_1,H_2],H) = 0 \quad \forall H_1,H_2,H \in \mathfrak{g}_0(H_0)$ z (∇), $[(\nabla),(\nabla)] = (\nabla_0)$, dle lemmatu $K([H_1,H_2],X) = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$
$\Rightarrow [H_1,H_2] = 0$ (K nedegenerovaná), maximální protože je rovna svému normalizátoru

2) $ad_H = S + N$ rozklad na poloprostou a nilp. část $\quad S$ poloprostý, tj. diagonální
$X \in \mathfrak{g}_\lambda(H_0)$, $Y \in \mathfrak{g}_\mu(H_0) \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(H_0) \Rightarrow S[X,Y] = (\lambda(H) + \mu(H))[X,Y] = [SX,Y] + [X,SY]$

$\forall$ derivace jsou vnitřní $\Rightarrow \exists W: S = ad_W$, $\exists p: S = p(ad_H) \Rightarrow ad_W = p(ad_H)$

$H_1 \in g_0 \Rightarrow ad_{[W,H_1]} = [S, ad_{H_1}] = [p(ad_H), ad_{H_1}] = 0$ $\quad (\Leftarrow [H, H_1] = 0$ tj. $[ad_H, ad_{H_1}] = 0)$

$\wedge$ g poloprostá $\Rightarrow \xi(g) = 0 \Rightarrow [W, H_1] = 0 \quad \forall H_1 \in g_0 \Rightarrow W \in g_0$ z maximálnosti

$\Rightarrow ad_{H-W} = N$ nilpotentní $\Rightarrow \sigma(ad_{H-W}) = \{0\} \Rightarrow \lambda_i(H-W) = 0 \quad \forall i \Rightarrow$ dle Lemmatu $H - W = 0$

$\Rightarrow N = 0$, $ad_H = S$ je poloprostá $\qquad$ QED

Ozn. Δ množinu nenulových kořenů g_0, $\forall \alpha \in \Delta \quad g_\alpha = \{X \mid ad_H X = \alpha(H) X\}$ <u>kořenové podprostory</u>

$$g = g_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} g_\alpha \qquad [g_\alpha, g_\beta] \subset g_{\alpha+\beta}$$

$\Rightarrow X_\alpha \in g_\alpha \quad ad_{X_\alpha}: g_\beta \to g_{\beta+\alpha} \to g_{\beta+2\alpha} \to g_{\beta+3\alpha} \to \dots$ až $\beta + n\alpha \notin \Delta \Rightarrow ad_{X_\alpha}$ je <u>nilpotentní $\forall \alpha \in \Delta$</u>

Lemma: $g_\alpha \perp g_\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha + \beta \neq 0$ $\quad$ Dk: $(\alpha(H) + \beta(H)) K(X_\alpha, X_\beta) = K([H, X_\alpha], X_\beta) + K(X_\alpha, [H, X_\beta]) = 0$

Lemma: $K|_{g_0}$ je nedegenerovaná, $\forall \alpha \in \Delta$. $\exists_1 H_\alpha \in g_0 : \alpha(H) = K(H, H_\alpha)$

Dk: $K(H, X_\alpha) = 0 \quad \forall H \in g_0, \forall \alpha \in \Delta \Rightarrow$ pokud $H \neq 0$ pak $\exists \tilde{H} \in g_0 : K(H, \tilde{H}) \neq 0$, tj. $K|_{g_0}$ je nedegenerovaná $\Rightarrow H \to K(\cdot, H)$ je izomorfismus g_0 a $g_0^* \Rightarrow \exists_1 H_\alpha$

Lemma: $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$. $X \in g_\alpha, Y \in g_{-\alpha} \Rightarrow [X, Y] = K(X, Y) H_\alpha$

Dk: sporem $-\alpha \notin \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \neq 0 \quad \forall \beta \in \Delta \Rightarrow g_\alpha \perp g \Rightarrow$ dle nedegen. $g_\alpha = 0$ spor

$X \in g_\alpha, Y \in g_{-\alpha} \Rightarrow [X, Y] \in g_0$, $K([X, Y], H) = -K(Y, [X, H]) = \alpha(H) K(X, Y) = K(X, Y) K(H, H_\alpha)$

$\Rightarrow K([X, Y] - K(X, Y) H_\alpha, H) = 0 \quad \forall H \in g_0$, $K|_{g_0}$ nedegen. $\Rightarrow [X, Y] = K(X, Y) H_\alpha$

Lemma: $\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$ $\quad$ Dk: $g_{-\alpha} \perp g_\beta \quad \forall \beta \in (\Delta \cup \{0\}) \setminus \{\alpha\}$, $g_{-\alpha} \not\perp g$ (nedegen.) $\Rightarrow \exists X_{-\alpha} \in g_{-\alpha}, X_\alpha \in g_\alpha$
$K(X_{-\alpha}, X_\alpha) = 1 \Rightarrow [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$

uvažujme $g_{\beta\alpha} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g_{\beta + j\alpha} \Rightarrow ad_{X_\alpha}, ad_{X_{-\alpha}}, ad_{H_\alpha}$ ponechávají $g_{\beta\alpha}$

invariantní $\; Tr|_{g_{\beta\alpha}} ad_{H_\alpha} = Tr|_{g_{\beta\alpha}} ([ad_{X_\alpha}, ad_{X_{-\alpha}}]) = 0 \wedge Tr\, ad_{H_\alpha} = \sum_j (\beta + j\alpha)(H_\alpha) \dim g_{\beta + j\alpha}$

$\Rightarrow \beta(H_\alpha) \dim g_{\beta\alpha} + \alpha(H_\alpha) \sum_j j \dim g_{\beta + j\alpha} = 0$. Pokud $\alpha(H_\alpha) = 0 \Rightarrow \forall \beta \in \Delta : \beta(H_\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ dle lemmatu $H_\alpha = 0 \Rightarrow$ spor s $\alpha(H) = K(H, H_\alpha) \; \forall H \in g_0 \Rightarrow$ musí být $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ QED

Def: $T_\alpha = \dfrac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha$, $\alpha \in \Delta$ $\qquad (\Rightarrow \alpha(T_\alpha) = 2)$

$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)}$$

Vybereme $X_\alpha, X_{-\alpha}$: $\; K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \dfrac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} \Rightarrow \underbrace{[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha, \; [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2 X_{\pm\alpha}}_{\text{pro pevné } \alpha \text{ komutační relace } sl(2, \mathbb{R})}$

(víme, že $\exists X_\alpha, X_{-\alpha} : K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$)

Lemma: $\{T, X_+, X_-\}$ splňující $sl(2,\mathbb{R})$ komutační relace, působící ireducibilně na V $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}_0 : V = \mathrm{span}\{v_0, \dots, v_r\}$
kde $T v_j = (r - 2j) v_j$, $X_- v_j = v_{j+1}$. $\qquad$ komplexní vekt. prostor konečné dimenze

Dk: $\dim V < +\infty \Rightarrow \exists \lambda, v : Tv = \lambda v$, $T X_\pm v = (\lambda \pm 2) X_\pm v$. $\dim V < +\infty \Rightarrow \exists v_0 : T v_0 = \lambda_0 v_0$, $X_+ v_0 = 0$. Def. $v_j = (X_-)^j v_0$
$\Rightarrow T v_j = (\lambda_0 - 2j) v_j$, $\exists r : v_r \neq 0$, $X_- v_r = 0$. $X_+ v_j = X_+ X_- v_{j-1} = X_-(X_+ v_{j-1}) + (\lambda_0 - 2j + 2) v_{j-1} = \dots = j(\lambda_0 - j + 1) v_{j-1}$ (indukcí)
$j = r + 1 \Rightarrow v_{r+1} = 0 \Rightarrow X_+ v_{r+1} = 0 \wedge = (r+1)(\lambda_0 - r) v_r \Rightarrow \lambda_0 = r \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathrm{span}\{v_0, \dots, v_r\}$ je invariantní, dále ireducibilní
$\Rightarrow \mathrm{span}\{\dots\} = V$ QED

př. 0

Lemma: 1) $\forall \alpha, \beta \in \Delta$ $\{\beta + n\alpha\}$ je nepřerušená posloupnost kořenů $p \leq n \leq q_\alpha$, $p \leq 0 \leq q_\alpha$

$a_{\beta\alpha} = -(p+q_\alpha)$, neexistují žádné jiné kořeny tvaru $\beta + p\alpha$

2) $\alpha \in \Delta \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\beta \in \Delta$, $\beta \in \operatorname{span}\{\alpha\} \Rightarrow \beta = \pm\alpha$

3) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ $\quad \alpha \neq -\beta$ $\quad (\alpha \notin \Delta_{\cup\{0\}} \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha \equiv 0)$

4) $\alpha, \beta \in \Delta$, $\epsilon = \operatorname{sgn} a_{\beta\alpha} \Rightarrow \beta - \epsilon\alpha, \beta - 2\epsilon\alpha, \dots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$

Dk: 1) $\mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \bigoplus_n \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha}$ invariantní vůči akci $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$

$\mathfrak{g}_{\beta\alpha} \supseteq \operatorname{span}\{(\operatorname{ad}_{X_\alpha})^j X_\beta, (\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}})^k X_\beta\} = V$ $\quad (\operatorname{ad}_{T_\alpha}) X_\beta = \beta(T_\alpha) X_\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ vlastní čísla $\operatorname{ad}_{T_\alpha}$ na V jsou $\beta(T_\alpha) + n\alpha(T_\alpha) = a_{\beta\alpha} + 2n$, $p \leq n \leq q_\alpha$, $p \leq 0, q_\alpha \geq 0$

evidentně V je irrep $\Rightarrow$ podle předchozího lemmatu $a_{\beta\alpha} + 2p = -r$, $a_{\beta\alpha} + 2q_\alpha = r$ pro nějaké $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(viz Dk předchozího lemmatu) $\Rightarrow a_{\beta\alpha} = -(p + q_\alpha)$ $\quad a_{\beta\alpha}$ nazýváme <u>Cartanova (celá) čísla</u>

pokud $\exists\, m \notin \{p, \dots, q_\alpha\}$ $\beta + m\alpha \in \Delta \Rightarrow$ nové $(p', q'_\alpha) \neq (p, q_\alpha) \Rightarrow$ dle 2) níže $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$

tj. musí být $\{p, \dots, q_\alpha\} \cap \{p', \dots, q'_\alpha\} = \emptyset \Rightarrow q' < p$ nebo $p' > q_\alpha \Rightarrow a_{\beta\alpha} = -(p+q_\alpha) = -(p'+q'_\alpha)$ nelze $\Rightarrow$

takové p, q_α neexistují $\Rightarrow \beta + m\alpha \notin \Delta$

2) $S_\alpha = \operatorname{span}\{X_{-\alpha}\} + \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{n\alpha}$ $\quad S_\alpha$ je invariantní vzhledem k $\operatorname{ad}_{X_{\pm\alpha}}$, $\operatorname{ad}_{T_\alpha}$

$\operatorname{Tr}|_{S_\alpha} \operatorname{ad}_{T_\alpha} = \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_{[X_\alpha, X_{-\alpha}]} = \operatorname{Tr}[\operatorname{ad}, \operatorname{ad}] = 0$

$= \underbrace{-\alpha(T_\alpha)}_{-2} + \sum_{n \geq 1} n \underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{2} \dim \mathfrak{g}_{n\alpha} \Rightarrow 1 = \sum_{n \geq 1} n \dim \mathfrak{g}_{n\alpha} \Rightarrow$ $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{n\alpha} = 0$, $\forall n > 1, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ obrácením postupu $\alpha/n \notin \Delta$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

$\beta = c\alpha$, $c \in \mathbb{C} \Rightarrow \beta(T_\alpha) = a_{\beta\alpha} = c\alpha(T_\alpha) = 2c \in \mathbb{Z}$ $\quad (a_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$ viz 1)), BÚNO $c > 0$ (jinak $\alpha \to -\alpha$)

$\Rightarrow$ dle výše $c = \frac{r}{2}$, $2 \nmid r$, $r \in \mathbb{N}$, ale pak $(\frac{r}{2} - j)\alpha \in \Delta$ pro $j = 0, 1, \dots, \frac{r-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \Delta$, ale to je vyloučeno výše

$X \in \mathfrak{g}_{\frac{r}{2}\alpha} \Rightarrow \operatorname{ad}_{X_{-\alpha}} X_{\frac{r}{2}\alpha} \neq 0$ a tedy máme až na normalizaci $X_{(\frac{r}{2}-1)\alpha}$, dále indukcí

(neboť $\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}} X_{\frac{r}{2}\alpha}$) $\Rightarrow \operatorname{ad}_{X_{-\alpha}}(\operatorname{ad}_{X_\alpha} X_{\frac{r}{2}\alpha}) = -\operatorname{ad}_{T_\alpha} X_{\frac{r}{2}\alpha}$

$= -r X_{\frac{r}{2}\alpha} \Rightarrow \operatorname{ad}_{X_\alpha} X_{\frac{r}{2}\alpha} \neq 0$, $\operatorname{ad}_{X_{-\alpha}} (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^2 X_{\frac{r}{2}\alpha} =$

$= -2(r+1) \operatorname{ad}_{X_\alpha} X_{\frac{r}{2}\alpha} \Rightarrow (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^2 X_{\frac{r}{2}\alpha} \Rightarrow (\operatorname{ad}_{X_\alpha})^k X_{\frac{r}{2}\alpha} \neq 0, \forall k \geq 0$

$\Rightarrow$ spor s konečnou dimenzí $\mathfrak{g}$)

$\forall \alpha \in \Delta$:

3) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \Rightarrow$ irrep $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$ na $\bigoplus_{n=p}^{q_\alpha} \underbrace{\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}}_{\text{1-dim pro } \beta \neq -\alpha}$

$\operatorname{ad}_{X_\alpha} X_\beta = 0 \Leftrightarrow q_\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta + \alpha \notin \Delta$

4) stačí ukázat $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$

$p \leq 0 \leq q_\alpha \Rightarrow p \leq p + q_\alpha \leq q_\alpha \Rightarrow \beta + (p+q_\alpha)\alpha$
$= \beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$

$\Rightarrow$ dokázali jsme následující větu

Věta (Weylova–Chevalley normální forma):

Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá algebra a $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra. Pak $\mathfrak{g}$ je direktním součtem (vektorových prostorů) $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů takových, že

(i) $[H, E_\alpha] = \alpha(H) E_\alpha$ $\quad H \in \mathfrak{g}_0$, $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$

(ii) $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0$

(iii) $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$ $\quad (\alpha + \beta \notin \Delta \Rightarrow N_{\alpha\beta} = 0)$

Pozn: Při vhodném výběru báze $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $N_{(-\alpha)(-\beta)} = -N_{\alpha\beta} = \pm(-p+1)$, $p \leq 0$ nejmenší celé číslo: $\beta + p\alpha \in \Delta$

Kořenové diagramy

$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\text{-span}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, $\mathfrak{h}^\# \mathbb{R}\text{-span}\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, $\langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha, H_\beta) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H_\alpha)\tilde\alpha(H_\beta)$ (Dk rozepsáním přes stopu v W-ch bázi)

$\langle\,,\rangle$ je pozitivní definitní skal. součin na $\mathfrak{h}^\#$ $\Leftarrow$ $\langle\alpha,\alpha\rangle$: $\langle\alpha,\alpha\rangle = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \frac{1}{4}(a_{\tilde\alpha\alpha})^2 \langle\alpha,\alpha\rangle^2$

$= \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \frac{1}{4}(a_{\tilde\alpha\alpha})^2 \langle\alpha,\alpha\rangle^2 \Rightarrow \langle\alpha,\alpha\rangle = \frac{4}{\sum_{\tilde\alpha\in\Delta}(a_{\tilde\alpha\alpha})^2} \geq 0$

$a_{\beta\alpha} = \frac{2\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \langle\beta,\alpha\rangle = \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle\,,\rangle \; \mathfrak{h}^\# \times \mathfrak{h}^\# \to \mathbb{R} \Rightarrow$ je sk. součin

definujeme zrcadlení S_α: $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$

dle lemmatu $\lambda\in\Delta \Rightarrow S_\alpha(\lambda) = \lambda - a_{\lambda\alpha}\alpha \in \Delta \Rightarrow \Sigma$ je invariantní vůči S_α

Def: <u>Kořenový diagram</u> .. Δ jako vektory v $\mathfrak{h}^\#$

Definujeme rozdělení kořenů na kladné a záporné: vezmeme $H_0 \in \mathfrak{h}$ pevné, takové že $\alpha(H_0) \neq 0 \;\forall\alpha\in\Delta$

$\Delta^+ = \{\alpha\in\Delta \mid \alpha(H_0) > 0\}$ $\quad\Delta^- = \{\alpha\in\Delta \mid \alpha(H_0) < 0\}$

prosté kořeny $\Delta^P = \{\alpha\in\Delta^+ \mid \nexists\, \beta,\gamma\in\Delta^+ : \alpha = \beta+\gamma\}$

Lemma: Δ^P tvoří bázi $\mathfrak{h}^\#$. $\alpha,\beta\in\Delta^P$, $\alpha\neq\beta \Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$. Prvky Δ^+ jsou lineárními kombinacemi prvků z Δ^P s kladnými celočíselnými koeficienty.

Dk: pp. $\langle\alpha,\beta\rangle > 0 \Rightarrow \alpha-\beta, \beta-\alpha$ jsou kořeny (viz předch. lemma)
jeden z nich, BÚNO $\alpha-\beta$ je kladný $\Rightarrow \alpha = \beta + (\alpha-\beta) \notin \Delta^P$

$\Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$. Dále $\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^P \Rightarrow \exists\,\alpha_1,\alpha_2\in\Delta^+ : \alpha = \alpha_1+\alpha_2$
$\alpha(H_0) = \underbrace{\alpha_1(H_0)}_{>0} + \underbrace{\alpha_2(H_0)}_{>0} \Rightarrow \alpha_{1,2}(H_0) < \alpha(H_0)$, opakujeme na α_1, α_2
$\Rightarrow$ po konečně mnoha krocích máme
$\alpha = \sum_j \alpha_j$, $\alpha_j \in\Delta^+$ a nejdou rozložit $\Rightarrow \in\Delta^P$
evid. kladné celé koef.

Δ^P jsou LN $\quad \sum_{\alpha_i\in\Delta^P} x_i\alpha_i = 0 \Rightarrow \sum_j (-n_j)\alpha_j + \sum_i p_i\alpha_i = 0$ (rozdělení na kladné a záp. koef.), $n_j, p_i \geq 0$

$\Rightarrow \alpha = \sum_j n_j\alpha_j = \sum_i p_i\alpha_i$, $\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle \leq 0$ ($\Leftarrow \alpha_j$ a α_i jsou různé)

$\Rightarrow \langle\alpha,\alpha\rangle = \sum_{j,i} n_j p_i \langle\alpha_j,\alpha_i\rangle \leq 0$, $\langle\,,\rangle$ poz. def. $\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \boxed{0 = \alpha(H_0) = \sum p_i \underbrace{\alpha_i(H_0)}_{>0} = \sum n_j \underbrace{\alpha_j(H_0)}_{>0}} \Rightarrow p_i = n_j = 0 \Rightarrow \Delta^P$ LN

QED

Def: <u>Cartanova matice</u> $\quad a_{ij} = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$ $\quad \alpha_{i,j}\in\Delta^P$ matice nekladných čísel (pro $i\neq j$), na diagonále 2

$\underbrace{a_{ij}a_{ji}}_{\in\mathbb{Z}} = 4\cos^2(\theta)$, θ úhel mezi α_i, α_j (Dk elementární geometrie)
$\Rightarrow \cos^2(\theta) = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, z LN Δ^P plyne $\cos^2(\theta) \neq 1$

Def: <u>Dynkinův diagram</u> poloprosté Lieovy algebry

$\alpha_i\in\Delta^P \Rightarrow$ vrchol v diagramu, dvojice vrcholů $\alpha_i\alpha_j$ je spojena $a_{ij}a_{ji}$ hranami, pokud je více hran, nakreslíme na ně šipku ve směru delšího kořene

(11. přednáška)

Pozn: $\alpha_i \neq \alpha_j \Rightarrow a_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \leq 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\sqrt{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\sqrt{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}} \leq 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi$

pokud $\theta \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_{ij} a_{ji} = \{1,2,3\} \Rightarrow$ při vhodném seřazení $a_{ij} = 1$, $a_{ji} \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = a_{ji} / a_{ij} \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow$ pro $\theta \neq \frac{2}{3}\pi$ je α_j delší kořen než α_i

$\theta = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \|\alpha_j\| / \|\alpha_i\| = \sqrt{2}$ $\quad \theta = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \|\alpha_j\| / \|\alpha_i\| = \sqrt{3}$

Věta: Pokud $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$, pak

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0 \quad K(X, Y) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2$$

Tj. souvislé komponenty Dynkinových diagramů odpovídají prostým algebrám.

Dk: stačí si uvědomit, že $\alpha + \beta \notin \Delta$, $\forall \alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$ (jinak $\alpha + \beta \in \Delta_1$ nebo Δ_2 BÚNO $\in \Delta_1 \Rightarrow 0 = \langle \alpha + \beta, \beta \rangle = \|\beta\|^2$ spor)

$\Rightarrow [E_\alpha, E_\beta] = 0$, $K(H_\alpha, H_\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = 0$, tj. $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{span}\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1} \oplus \mathrm{span}\{H_\beta\}_{\beta \in \Delta_1}$

$\Rightarrow \mathfrak{g}_1 = \mathrm{span}\{H_\alpha, E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta_1}$, $\mathfrak{g}_2 = \mathrm{span}\{H_\beta, E_\beta\}_{\beta \in \Delta_2}$

$K(X, Y) = 0$ výpočtem v bázi $\mathfrak{g}$, v níž je zřejmý rozklad na $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ QED

Pozn: $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta^p$, $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \leq \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle$. Pak počet hran spojujících α_i a α_j

je $\#\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_j + k\alpha_i \in \Delta\} - 1$.

Dk: počet hran je $l = \frac{4|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|^2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \in \{1,2,3\}$, $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \leq \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \Rightarrow$ rozklad $a_{ij} a_{ji}$ musí být

$2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1$, $\quad 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -l \Rightarrow \alpha_j - \alpha_i, \ldots, \alpha_j - 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}\alpha_i = \alpha_j + l\alpha_i$ jsou všechny kořeny tvaru $\alpha_j + k\alpha_i \Longrightarrow$

tj. $\boxed{\{\# k \in \mathbb{Z} : \alpha_j + k\alpha_i \in \Delta\} = l + 1}$. Pokud $l = 0 \Rightarrow \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_j + k\alpha_i \notin \Delta \ \forall k \neq 0$ QED

Znormalizujeme $e_i = \frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$, $n_{ij} = \{\#$ hran spojujících α_i a $\alpha_j\} \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{n_{ij}}$

$x = \sum_j x_j e_j \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = \sum_j x_j^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_j x_j^2 - \sum_{i<j} x_i x_j \sqrt{n_{ij}} > 0$

($\langle , \rangle$ je poz. def.)

Lemma: Dynkinovy diagramy nemají uzavřené smyčky. V každém vrcholu se potkávají nejvýše tři hrany. Nahradíme-li libovolnou dvojici vrcholů spojených jednou hranou jediným vrcholem získáme opět přípustný diagram.

Dk: $\frac{\Delta^p}{\|\cdot\|} \supset \{e_1, \ldots, e_k\}$ minimální smyčka (tj. bez podsmyček) $\Rightarrow x = e_1 + \ldots + e_k$, def. $e_{k+1} = e_1$:

$\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, e_j \rangle + 2\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, e_{j+1} \rangle \leq k + 2(-\frac{1}{2})k = 0$, $\quad x \neq 0$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Delta^p$, tj. LN)

$\Rightarrow$ nelze $\Rightarrow \boxed{\text{smyčky neex.}}$

$e \in \frac{\Delta^p}{\|\cdot\|}$, $M = \{e_j\} : \langle e_j, e \rangle \neq 0$, $e_j \neq e$ $\overset{\Delta^p/\|\cdot\|}{\Longrightarrow}$ $\forall e_j, e_k \in M : \langle e_j, e_k \rangle = 0$ (jinak smyčka), $v = e - \sum_{j : e_j \in M} \langle e, e_j \rangle e_j \neq 0$

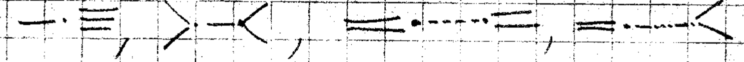
$\Rightarrow \langle v, e_j \rangle = 0$, $\quad 1 = \|e\|^2 = \|v\|^2 + \sum_j |\langle e, e_j \rangle|^2 \Rightarrow \sum_j |\langle e, e_j \rangle|^2 < 1$

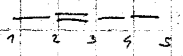
n_j počet hran spojujících e, e_j; $= n_j/4$ $\quad \Rightarrow \boxed{\sum n_j < 3}$

e_1 a e_2 spojené jednou hranou $\Rightarrow \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 p_1 - x_2 p_2 + P[x_3, x_4, \ldots] > 0 \ \forall x_1, x_2 \ldots$ (pro $x \neq 0$)

(lineární, též polynomy v $x_3, \ldots$)

dosadíme $x_1 = x_2 = \xi \Rightarrow \langle x, x \rangle = \xi^2 - \xi(p_1 + p_2) + P[\ldots]$ je též poz. def. a odpovídá diagramu se spojeným vrcholem QED

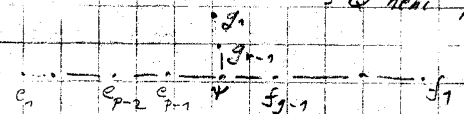
Pozn: tím jsou vyloučeny diagramy obsahující 

Lemma: Poddiagram  je nemožný.

Dk: $Q(x)=\sum_{j=1}^{5} x_j^2 - (x_1x_2+\sqrt{2}x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5)$ má extrém v bodě určeném rovnicemi

$\alpha x_1 = x_2,\ \alpha x_2 = x_1+\sqrt{2}x_3,\ \alpha x_3 = \sqrt{2}x_2 + x_4,\ 2x_4 = x_3+x_5,\ \alpha x_5 = x_4 \Rightarrow x=\alpha(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3, 2, 1) \Rightarrow \langle x,x\rangle = 0$

$\Rightarrow Q$ není poz. def. $\Rightarrow$ diagram nelze QED

Lemma: Uvažujme diagram tvaru 

Pak: (1) definujeme-li $x=\sum_{j=1}^{p-1} j e_j$ $\quad y=\sum_{j=1}^{q-1} j f_j$ $\quad z=\sum_{j=1}^{r-1} j g_j$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle=\langle x,z\rangle=\langle y,z\rangle=0,\ \langle x,x\rangle=\frac{p(p-1)}{2},\ \langle y,y\rangle=\frac{q(q-1)}{2}\quad \langle z,z\rangle=\frac{r(r-1)}{2}$

Dk přímým výpočtem, součet geom řady

(2) $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ úhly mezi x,y,z a ψ $\Rightarrow \cos^2\vartheta_1+\cos^2\vartheta_2+\cos^2\vartheta_3<1$

Dk: $\|\psi\|^2 > \frac{|\langle x,\psi\rangle|^2}{\|x\|^2}+\frac{|\langle y,\psi\rangle|^2}{\|y\|^2}+\frac{|\langle z,\psi\rangle|^2}{\|z\|^2}$ $\quad(\psi, x,y,z$ LN, x,y,z OG$) \Rightarrow 1>\sum_{j=1}^{3}\cos^2\vartheta_j$

(3) $\frac{|\langle x,\psi\rangle|^2}{\|x\|^2\cdot\|\psi\|^2} = \frac{\overbrace{\|e_{p-1}\|^2}^{=1}}{\|x\|^2}\cdot\underbrace{\frac{|\langle e_{p-1},\psi\rangle|^2}{\|e_{p-1}\|^2\|\psi\|^2}}_{=\frac{1}{4} \text{ z Dynk. diagramu}}(p-1)^2 = \frac{(p-1)^2}{2p(p-1)} = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}<1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{q}>1}$

(4) Seřadíme-li $p\geq q\geq r>1$ (jinak není štěpení) $\Rightarrow r=2$ díky a jediná řešení jsou $D_{p+2}=(p,2,2)$, $E_6=(3,3,2)$, $E_7=(4,3,2)$, $E_8=(5,3,2)$.

Pozn: Uvědomte si, že kořenové vektory pozitivních kořenů společně s $\mathfrak{g}_0$ tvoří řešitelnou podalgebru $\mathfrak{g}$.

Věta: Klasifikace komplexních prostých Lieových algeber.

Komplexní prosté Lieovy algebry jsou až na izomorfii určeny následujícími Dynkinovy diagramy:

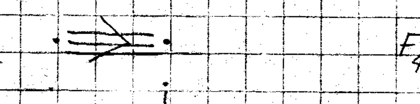
Rank = dim $\mathfrak{g}_0$

klasické:

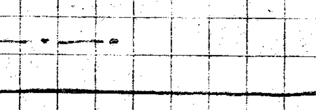
A_l  $l\geq 1$ $\quad sl(l,\mathbb{C})$

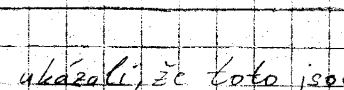
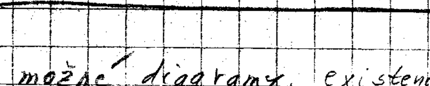
B_l  $l\geq 2$ $\quad so(2l+1,\mathbb{C})$

C_l  $l\geq 3$ $\quad sp(2l,\mathbb{C})$

D_l  $l\geq 4$ $\quad so(2l,\mathbb{C})$

výjimečné:

G_2  F_4  E_6 

E_7  E_8 

Dk: výše jsme ukázali, že toto jsou všechny možné diagramy, existence příslušných algeber byla dokázána jejich zkonstruováním, jednoznačnost viz Weyl-Chevalley normální forma.

Ireducibilní konečněrozměrné reprezentace prostých Lieových algeber (12 přednáška)

Def: Váha reprezentace ϱ algebry $g_0 \equiv h$ .. $\varrho \in h^{\#}$: $\exists v \in V, v \neq 0$, $Hv = \lambda(H)v$, $\forall H \in h \equiv g_0$
(na vektorovém prostoru V)

Váhový podprostor $V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \lambda(H)v,\ \forall H \in h\}$ (Pozn: $\varrho = ad \Rightarrow$ váhy = kořeny)

Váha je **dominantní** $\iff \lambda(T_\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta^+$

Pozn: Mřížka $\mathcal{J} = \{\lambda \in h^{\#} \mid \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Delta\}$ je mřížková podgrupa $h^{\#}$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{J}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{J}$

Báze $\mathcal{J}$ (λ_i) $\lambda_i(T_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$, $\forall \alpha_j \in \Delta^P \Rightarrow \forall \lambda \in \mathcal{J}\ \exists m_1, \dots, m_\ell : \lambda = \sum m_i \lambda_i$

Věta: Buď ϱ reprezentace pologprosté algebry g. Pak její váhy leží v $\mathcal{J}$, $V = \sum_{\lambda \oplus} V_\lambda$.
Množina vah je invariantní vzhledem k Weylově grupě $\mathcal{W}$ (generované $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha, \alpha \in \Delta$)
Je-li λ váha, $\epsilon = sgn\, \lambda(T_\alpha)$ pak $\lambda, \lambda - \epsilon\alpha, \dots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$ jsou váhy ($\forall \alpha \in \Delta$). Konečně
$m_\lambda \equiv \dim V_\lambda = \dim V_{S\lambda} \quad \forall S \in \mathcal{W}$.

Dk: $\forall \alpha \in \Delta$ $A_1 = span\{T_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}\} \subset g \Rightarrow \varrho$ je repr. $A_1 \Rightarrow V = \sum_{k \in \sigma(\varrho(T_\alpha))}^{\oplus} Ker(\varrho(T_\alpha) - kI)$ viz Lemma na konci 9. přednášky + úplná redducibilita
$\{\varrho(T_\alpha)\}$ komutují $\Rightarrow$ spol. vlastní podprostory $\{\varrho(H) \mid H \in h\}$, $\sigma(\varrho(T_\alpha)) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ váhy leží v $\mathcal{J}$
$v_\lambda \in V \setminus \{0\}$ $Hv_\lambda = \lambda(H)v_\lambda \Rightarrow [H, E_\alpha]v_\lambda = \alpha(H)E_\alpha v_\lambda$ implikuje $E_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$, $(E_\alpha)^n V_\lambda \in V_{\lambda+n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$
kde $(E_\alpha)^{-n} = (E_{-\alpha})^n$
z reprezentace $A_1 = sl(2)$ (9. přednáška) plyne $(E_{-\alpha})^n v_\lambda \neq 0$ pro $n = \lambda(T_\alpha) \Rightarrow \lambda, \lambda - \alpha, \dots, \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$ váhy
$\Rightarrow m_\lambda = \dim V_\lambda \leq \dim V_{S_\alpha(\lambda)} = m_{S_\alpha(\lambda)}$ protože $\dim V_\lambda = \dim (E_{-\alpha})^n V_\lambda$, $(E_{-\alpha})^n V_\lambda \subset V_{S_\alpha(\lambda)}$
obráceným postupem ukážeme $m_{S_\alpha(\lambda)} \leq m_\lambda \Rightarrow m_{S_\alpha(\lambda)} = m_\lambda$, $\forall \alpha \in \Delta \Rightarrow m_{S\lambda} = m_\lambda$ $S \in \mathcal{W}$ QED

Def: Váha λ repr. ϱ je nejvyšší $\iff$ $\lambda + \alpha$ není vahou repr. ϱ $\forall \alpha \in \Delta^+$

V každé reprezentaci existuje nejvyšší váha (k dané váze přidáváme kořeny, až získáme nejvyšší)

Def: $R_\lambda = span\{\varrho(X)\varrho(Y)\dots)v \mid X, Y, \dots \in g\}$ v váhový vektor nejvyšší váhy λ.

Lemma: R_λ je invariantní podprostor ϱ, $\dim V_\lambda|_{\varrho(R_\lambda)} = 1$ (nejvyšší váha je prostá), R_λ je ireducibilní

Dk: invariance R_λ zřejmá, v dalším $E_\alpha \equiv \varrho(E_\alpha)$
Předpokládejme $\underbrace{\sum E_\alpha E_\beta \dots}_{\text{nějaká kombinace LN prvků}} v \in V_\lambda$. Díky $HE_\alpha = E_\alpha(H + \alpha(H))$ $H(E_\alpha E_\beta \dots) = E_\alpha E_\beta \dots (H + (\alpha + \beta + \dots)(H))$
$\alpha + \beta + \dots = 0$ aby $\sum H(E_\alpha E_\beta \dots v) = \lambda(H) \sum E_\alpha E_\beta \dots v$ $\Rightarrow$ některé $\alpha, \dots \in \Delta^+$, některé $\in \Delta^-$
(pro každý člen v Σ)
($\Rightarrow$ prokomutujeme kořeny z Δ^+ na konec $\Rightarrow$ anihilují v, a zbudou jen komutátory kladných a záp. kořenů, tj. koř. vektory z H, ty na v působí jako násobení $\lambda(H)$. Po odstranění všech $\alpha \in \Delta^+$ nemůže zbýt žádný $\beta \in \Delta^-$
(jinak spor s $\dots$) $\Rightarrow \sum E_\alpha E_\beta \dots v = konst \cdot v \Rightarrow \dim V_\lambda|_{\varrho(R_\lambda)} = 1$
(vede počet faktorů $E_\alpha \dots E_\omega$ je nižší než původně $\Rightarrow$ induktivně opakujeme)
R_λ je ireducibilní neboť ϱ působí na R_λ tranzitivně - viz definice R_λ

QED

(je vidět například z úplné reducibility reprezentací pologprostých algeber)

Věta: Ireducibilní reprezentace ϱ poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je jednoznačně určena svou nejvyšší vahou λ a je izomorfní R_λ.

Dk: ϱ, ϱ' irrepy $\mathfrak{g}$ se stejnou nejv. vahou λ — w, w' přísl. váhové vektory λ, R, R' přísl. R_λ

$R \subset \varrho$, $R' \subset \varrho'$, irrepy $\Rightarrow R = \varrho$, $R = \varrho'$

$\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \Delta^P$, $E_j \equiv E_{\alpha_j}$ $\Rightarrow$ $E_{\pm 1}, \dots, E_{\pm \ell}$ generují $\mathfrak{g}$ svými komutátory

$[E_\alpha, E_{-\beta}] = 0$ $\forall \alpha \neq \beta \in \Delta^P$ ($\alpha - \beta$ není kořen) $\Rightarrow [E_i, E_{-j}] = \delta_{ij} T_i$. Definujme formálně

$$V^\lambda = \mathrm{span}\{ (E_{-i_1} E_{-i_2} \dots E_{-i_N}) V_0 \mid 1 \leq i_k \leq \ell, \forall k \in \{1, \dots, N\}, N \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

def. $\tilde\varrho(T_i) V_0 = \lambda(T_i) V_0$, $\tilde\varrho(E_i) V_0 = 0$, $\tilde\varrho(E_{-k}) V^\lambda = E_{-k} \cdot V^\lambda$, dále indukcí dle N

$$\tilde\varrho(E_k)(E_{-i} E_{-j} \dots) V_0 = \Big(\tilde\varrho(E_{-i}) \tilde\varrho(E_k) + \tilde\varrho(\underbrace{[E_k, E_{-i}]}_{\delta_{ki} T_k})\Big)(E_{-j} \dots) V = E_{-i}(\tilde\varrho(E_k) E_{-j} \dots) V_0 + r(T_i)\, \delta_{ki} (E_{-j} \dots) V_0$$

kde $r = \lambda - \alpha_j - \dots$

$\Rightarrow \tilde\varrho$ nekonečněrozměrná reprezentace $\mathfrak{g}$ (reprezentace neboť $E_{\pm i}$ generují $\mathfrak{g}$ a platí $[\tilde\varrho(E_k), \tilde\varrho(E_{-i})] = \tilde\varrho([E_k, E_{-i}])$ atd.)

def. $\pi : V^\lambda \to R$ jako lineární zobrazení def. akcí na bázi $\pi(V_0) = w$, $\pi((E_{-i} E_{-j} \dots) V_0) = \varrho(E_{-i}) \varrho(E_{-j}) \dots w$

$\Rightarrow$ $\pi(\tilde\varrho(E_{-i}) w) = \varrho(E_{-i}) \pi(w)$, $\forall w \in V_\lambda$, podobně jako výše pro $\pi(\tilde\varrho(E_i) w) = \varrho(E_i)\, \pi(w)$ indukcí

$\Rightarrow$ $\pi(\tilde\varrho(X) w) = \varrho(X)\, \pi(w)$ $\forall w \in V^\lambda$, $X \in \mathfrak{g}$ $\Rightarrow \ker \pi$ je inv. podprostor V^λ vzhledem k $\tilde\varrho$

a π je evidentně surjektivní. Podobně najdeme $\pi' : V^\lambda \to R'$ $\Rightarrow$ $\pi'(\ker \pi)$ je invariantní podprostor R' vzhledem k ϱ', ϱ' je irrep $\Rightarrow \pi'(\ker \pi) = 0$ v R'. Ale $V_0 \notin \ker \pi$, π zachovává váhy (z konstrukce)

$\Rightarrow \forall v \in \ker \pi$ mají menší váhu než λ a w' má váhu λ $\Rightarrow$ $w' \notin \pi'(\ker \pi)$ $\Rightarrow$ $\pi'(\ker \pi) = 0$

$\Rightarrow$ $\ker \pi \subset \ker \pi'$ a naopak $\Rightarrow \ker \pi = \ker \pi'$ $\Rightarrow$ lze zkonstruovat $\varphi : R \to R'$, $\varphi(w) = w'$,

$\varphi(\varrho(E_{-i}) w) = \varrho'(E_{-i}) \varphi(w)$ neboť je-li $w = \varrho(\Sigma E_{-i_1} E_{-j_1} \dots) w = \varrho(\Sigma E_{-i_2} E_{-j_2} \dots) w$, tj. $w = \pi(W_1) = \pi(W_2)$

$\Rightarrow$ $W_1 - W_2 \in \ker \pi = \ker \pi'$ $\Rightarrow$ $\pi'(W_1) = \pi'(W_2) = w'$, tj. φ je korektně definované,

podobně jako pro platí $\varphi \circ \varrho(X) = \varrho'(X) \circ \varphi$ $\Rightarrow \varphi$ "komutuje" s akcí grupy v přísl. reprezentaci

φ je prosté neboť $\varphi(w) = 0$, $W \in \pi^{(-1)}(w)$ $\Rightarrow$ $\pi'(W) = \varphi(w) = 0$, $\pi(W) = w$, $\ker \pi = \ker \pi'$ $\Rightarrow w = 0$

φ je surjektivní (konstrukcí $\varphi' : R' \to R$) $\Rightarrow$ φ izomorfismus

QED

Def: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} = \Delta^P$, $T_j \equiv T_{\alpha_j}$, $j \leq \ell$. Prvky duální báze (λ_i) mřížky J, tj. $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$ se nazývají *fundamentální váhy*, jim odpovídající ireducibilní reprezentace *fundamentální rep.*

Pozn: $\lambda_i = \sum_j M_{ij} \alpha_j$, kde $M = (a_{ij})^{-1} = (\alpha_i(T_j))^{-1}$ ($\Rightarrow \sum_k M_{ik} \alpha_k(T_j) = \delta_{ij}$)

Pozn: definujeme Cartanovu matici transponovaně vzhledem k některé literatuře

Věta: Ke každé množině nezáporných čísel $m_1, \dots, m_\ell$, $\ell = \mathrm{rank}\, \mathfrak{g}$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté algebry $\mathfrak{g}$, určená svou nejvyšší vahou $\lambda = \sum_{k=1}^{\ell} m_k \lambda_k$, kde λ_k jsou fundamentální váhy algebry $\mathfrak{g}$. (Bez důkazu)

1. cvičení + 2. cvičení

Maticové grupy a algebry

$$\boxed{Sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \ (\mathbb{C}^{n,n}) \mid \det A = 1\}}$$ $\dim = n^2 - 1$ speciální lineární grupa

$f(A) = \det A - 1 \Rightarrow Sl(n) = f^{(-1)}(0)$, f hladké ok, aby $Sl(n)$ byla varietou (podvarietou $Gl(n)$), musí mít $f_*|_{Sl(n)}$ konstantní hodnost

$$f_*|_A \underset{T_A Sl}{B} = \lim_{t \to 0} \frac{\det(A+tB) - \det A}{t} = \operatorname{tr} A^{-1}B \Leftarrow \det(A+tB) = \overset{1}{\det A} \det(1 + tA^{-1}B) = 1 + t \operatorname{tr} A^{-1}B + O(t^2)$$

dosadíme konkrétně $A = B \Rightarrow \operatorname{rank} f_*|_{Sl} = 1 \Rightarrow Sl(n)$ je podvarieta, hladkost $\cdot, ( )^{-1}$ zdědila $\Rightarrow$ Lieova grupa

$sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) \cong T_e Sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ $\quad X \in T_e Sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) \Leftrightarrow \exists \varphi\ \mathbb{R} \to Sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$

$$\varphi(0) = e, \quad \dot\varphi(0) = X \qquad \varphi(t) = e + t \cdot \dot\varphi(0) + O(t^2)$$

$$1 \overset{!}{=} \det \varphi(t) = \det(e + t\dot\varphi(0) + O(t^2)) = 1 + t \operatorname{tr} \dot\varphi(0) + O(t^2)$$

$\Rightarrow \operatorname{tr} \dot\varphi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{sl(n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} (\mathbb{C}^{n,n}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}}$$

$$\boxed{O(p,q) = \{A \in \mathbb{R}^{p+q,p+q} \mid A^T J A = J\}, \text{ kde } J = \operatorname{diag}(\overbrace{1,\dots,1}^{p}, \overbrace{-1,\dots,-1}^{q})}$$ ortogonální grupa

Použijeme větu: $F: M^n \to V^r$ hladké **zobrazení**, $q \in V^r$ takové, že $F^{(-1)}(q) \subset M^n$ je neprázdná. Pokud $\operatorname{rank} F_*|_p = r$, $\forall p \in F^{(-1)}(q)$, pak $F^{(-1)}(q)$ je $(n-r)$ **rozměrná podvarieta** M^n.

Pozn: $\operatorname{rank} F_* = r \Rightarrow$ lze vybrat r souřadnic y^j na M (lokálně) tak, že $\frac{\partial(F^1 \dots F^r)}{\partial(y^1 \dots y^r)} \neq 0$
$\Rightarrow$ podle věty o implicitní funkci na okolí lze $F^{(-1)}(q)$ popsat jako $y^j = f^j(x^k)$, kde x^k jsou zbývající souřadnice, tj. $(y^1, \dots y^r, x^1, \dots, x^{n-r})$ jsou lokální souřadnice na M
$\Rightarrow x^1, \dots, x^{n-r}$ jsou souřadnice na $F^{(-1)}(q)$

$F(A) = A^T J A - J$, $\quad F(A)^T = F(A) \Rightarrow F: Gl(n) \to V =$ sym. matice z $Gl(n)$, $\dim V = \frac{n(n+1)}{2}$, $\boxed{n = p+q}$

$$F_*: \quad F_*|_A \underset{\mathbb{R}^n}{(B)} = \lim_{t \to 0} \frac{(A+tB)^T J (A+tB) - A^T J A}{t} = \underbrace{B^T J A}_{X} + \underbrace{A^T J B}_{(B^T J A)^T = X^T} = X + X^T$$

protože $\forall X \in \mathbb{R}^{n,n}$ rovnice $X = B^T J A$ má právě jedno řešení $B = (X A^{-1} J)^T$ $(A \in O_{p,q} \Rightarrow \exists A^{-1})$
existuje $\forall Y \in V, \forall A \in O(p,q)$ B takové, že $F_*|_A (B) = Y$

$\Rightarrow F_*$ je surjektivní $\Rightarrow$ má $\operatorname{rank} = \dim V = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow SO(p,q)$ je Lieova grupa dimenze $\frac{n(n-1)}{2}$

$$\boxed{SO(p,q) = O(p,q) \cap Sl(p+q, \mathbb{R})}$$ speciální ortogonální grupa

jestliže $q = 0$ $\quad SO(p,0) = SO(p,\mathbb{R}),\ O(p,0) = O(p,\mathbb{R})$

obdobně se definuje $SO(p,\mathbb{C}),\ O(p,\mathbb{C})$ $\quad (SO(p,q,\mathbb{C}) \cong SO(p+q,\mathbb{C})$, tj. $SO(p,q,\mathbb{C})$, $O(p,q,\mathbb{C})$ nezavádíme $)$ Proč?

$$\boxed{so(p,q) = o(p,q) = \{X \in \mathbb{R}^{n,n} \mid F_*|_{\mathbb{I}}(X) = 0, \text{ tj. } JX + X^T J = 0\}}$$

obdobně zavádíme $\boxed{Sp(2n, \mathbb{R}/\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{R}/\mathbb{C}^{n,n} \mid A^T J A = J\} \quad \text{kde } J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}}$

$\boxed{sp(2n) = \{ \quad \mid X^T J + J X = 0\}}$. symplektická grupa $\quad dim = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$

$U(n) = \{ U \in \mathbb{C}^{n,n} \mid U^+ U = \mathbb{I}\}$ grupa unitárních matic

je reálnou L grupou dimenze $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$

ale ne komplexní Lieovou grupou, $U^{-1} = U^+$ není holomorfní

$SU(n) = U(n) \cap Sl(n, \mathbb{C})$ grupa speciálních unitárních matic $\quad dim = n^2 - 1$

$u(n) = \{ X \in \mathbb{C}^{n,n} \mid X + X^+ = 0\}$ $\qquad su(n) = \{ X \in \mathbb{C}^{n,n} \mid X + X^+ = 0, \ tr X = 0\}$

dále příklady $(\nabla 1)$, $(^1\nabla_1)$

Souvislost

Př: $U(n)$ je souvislá

Dk: $T^n = \{ A = diag(e^{i\theta_1}, \ , e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \subset\subset U(n)$

je abelovská podgrupa diagonálních matic v $U(n)$ - tzv. maximální torus

(maximální torus je obecně maximální abel. podgrupa současně diagonalizovatelných matic $\Rightarrow$ lze ho psát jako $g T^n g^{-1}$, tj. je konjugovaný T^n)

T^n je topologický torus $= S^1 \times \ \times S^1$ (n-krát) $\Rightarrow$ souvislý

a současně $\forall g \in U(n) \ \exists h \in U(n) : h g h^+ \in T^n$ (Dk: indukcí, vl. čísla g: $|\lambda| = 1$ a využitím $g: V \to V \subset\subset \mathbb{C}^n \Rightarrow g: V^\perp \to V^\perp$)

$\Rightarrow g = h^+ diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) h \ \rightarrow g(t) = h^+ diag(e^{it\theta_1}, \ , e^{it\theta_n}) h$

je křivka spojující e a g $\Rightarrow$ $U(n)$ souvislá

Př: $SO(n)$ je souvislá, $O(n)$ má dvě komponenty - $SO(n)$ a $diag(-1, 1, \dots, 1) \cdot SO(n)$

Dk: 1) $SO(2n)$ $\qquad T^n = \left\{ \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix}}_{R_2(\theta_1)} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{matrix}}_{R_2(\theta_2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \right\}$

víme, že $A \in SO(n)$ má vlastní čísla $|\lambda|^2 = 1$ $\left(\Leftarrow Sx = \lambda x \text{ (nad } \mathbb{C}), x \neq 0, \ x^+ S^+ S x = \begin{cases} x^+ x \\ \lambda\bar{\lambda} \, x^+ x \end{cases} \right)$

S reálná $\Rightarrow$ jestliže $Im \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda, \bar{\lambda}$ sdružená vlastní čísla, se stejnými násobnostmi

S je diagonalizovatelná $\Rightarrow det S = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ vč. násobností $\qquad \left(Sx = \lambda x \Rightarrow S\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}, \text{ protože } S \in \mathbb{R}^{n,n} \right)$

$\lambda\bar{\lambda} > 0 \Rightarrow$ sudý počet $\lambda = 1 \Rightarrow$ přísl. počet $R_2(0)$ bloků, sudý počet $\lambda = -1 \Rightarrow R_2(\pi)$ bloky

na zbytek (OG doplněk (nad $\mathbb{C}$)) zúžíme S $\quad \left(\begin{matrix} SV = V \Rightarrow V = S^+SV \subset S^+V \Rightarrow SV \subset V \subset S^+V, \exists S^{-1} \Rightarrow \underline{SV = V} = S^+V \\ \Rightarrow (SV^\perp, V) = (V^\perp, S^+V) = (V^\perp, V) = 0 \Rightarrow SV^\perp = V^\perp \end{matrix} \right)$

$\Rightarrow \tilde{S}$ mající jen komplexní vlastní čísla na $\mathbb{R}^{2k}$

$f: \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (\tilde{S}x, x)$ nabývá minimum na jednotkové sféře v $x_0 \Rightarrow x_0, \tilde{S}x_0$ je dvourozměrný podprostor (vlastní čísla komplexní), $\forall y$ tečné vektory k jedn. sféře v x_0 platí $0 = \dot{f}(x_0 + ty)|_{t=0} = (\tilde{S}x_0, y) + (\tilde{S}y, x_0)$

$= (y, (\tilde{S}^T + \tilde{S}) x_0) = (y, (\tilde{S}^{-1} + \tilde{S}) x_0) \Rightarrow (\tilde{S}^{-1} + \tilde{S}) x_0 \in span\{x_0\} \Rightarrow \tilde{S}^2 x_0 \in span\{x_0, \tilde{S}x_0\}$

$\Rightarrow \{x_0, \tilde{S}x_0\}$ tvoří invariantní podprostor, na něm ve vhodné bázi máme $R_2(\theta)$, dále indukcí

$SO(2n+1)$ - navíc jedno $\lambda = 1 \Rightarrow$ dodatečná 1 na konci $\begin{pmatrix} R_2(\theta_1) & \\ & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ máme maximální torus, dále jako pro $U(n)$

Poznámky – na cvičení nebo ke zkoušce

Nechť $\boxed{\phi: G \to \tilde{G} \qquad \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \qquad \phi(e) = \tilde{e}}$

Pak $\phi \circ L_g(a) = \phi(ga) = \phi(g)\phi(a) = L_{\phi(g)} \circ \phi\,(a)$

$\phi \circ R_g = R_{\phi(g)} \circ \phi \quad \Longrightarrow$

na 2.-3. cvičení $\boxed{\phi_* \circ L_{g*} \quad L_{\phi(g)*} \circ \phi_*, \quad \phi^* \circ L^*_{\phi(g)} = L^*_g \circ \phi^*}$, to samé pro R_g

$X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow X|_{gh} = L_{g*} X|_h \quad \forall g, h \in G$

$\phi_* X \in \mathfrak{X}(\phi(G))$, $\overset{?}{\ } L_{\tilde{g}*}(\phi_* X)|_{\tilde{h}} = (\phi_* X)|_{\tilde{g}\tilde{h}} \quad \forall \tilde{g}, \tilde{h} \in \phi(G)$

$\tilde{g} = \phi(g),\ \tilde{h} = \phi(h) \Rightarrow L_{\tilde{g}*}(\phi_* X|_{\tilde{h}}) = L_{\phi(g)*}(\phi_* X|_{\phi(h)}) = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*(X|_h)$

$= \phi_* \circ L_{g*} X|_h = \phi_*(X|_{gh}) = (\phi_* X)|_{\phi(gh)} = (\phi_* X)|_{\tilde{g}\tilde{h}}$

tj $L_{\tilde{g}*}(\phi_* X)|_{\tilde{h}} = (\phi_* X)|_{\tilde{g}\tilde{h}} \Rightarrow \boxed{\phi_* X \in \tilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(G)}}$

na 2.-3. cvičení

Lemma: $\phi(e^{tX}) = e^{t\phi_* X}$

Dk: obě strany rovnice jsou díky $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ 1-parametrické podgrupy
$\Rightarrow$ postačí ukázat, že tečné vektory v $\tilde{e}$ jsou stejné

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(e^{tX}) = \phi_* \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} = (\phi_* X)|_{\tilde{e}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\phi_* X}$$

Pak již díky "grupovosti" platí

$$\frac{d}{dt}\phi(e^{tX}) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \phi(e^{(t+s)X}) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \phi(e^{tX})\phi(e^{sX}) = L_{\phi(e^{tX})*}(\phi_* X)|_e$$

$$= (\phi_* X)|_{\phi(e^{tX})} \ \wedge\ \frac{d}{dt} e^{t\phi_* X} = \phi_* X|_{e^{t\phi_* X}}$$

$\Rightarrow$ obě strany Lemmatu řešení téže ODE se stejnou poč. podmínkou $\phi(e^{tX})|_{t=0} = \tilde{e} = e^{t\phi_* X}$

na 3.–4. cvičení:

Lemma: $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*([X, Y])$

Dk: $f \in C^\infty(\tilde{G})$ $\quad (\phi_* Y) f|_{\phi(g)} = Y(f \circ \phi)|_g = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\phi(g e^{tY})) =$

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\phi(g)\phi(e^{tY})) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ R_{\phi(e^{tY})})|_{\phi(g)}$

$\Rightarrow$

$$[\phi_* X, \phi_* Y] f|_{\phi(p)} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big[f(\phi(p)\phi(e^{sX})\phi(e^{tY})) - f(\phi(p)\phi(e^{tY})\phi(e^{sX}))\Big]$$

$$= \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\Big|_{s,t=0} \Big[f(\phi(p\, e^{sX} e^{tY})) - f(\phi(p\, e^{tY} e^{sX}))\Big] = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\Big|_{s,t=0} \Big[\tilde{f}(p e^{sX} e^{tY}) - \tilde{f}(p e^{tY} e^{sX})\Big]$$

def $\tilde{f} = f \circ \phi$

$$= [X, Y]\tilde{f}|_p = [X, Y](f \circ \phi)|_p = (\phi_*[X, Y]) f|_{\phi(p)} \Rightarrow [\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*[X, Y]$$

Pozn: Je-li $\mathfrak{g}$ prostá komplexní Lieova algebra, ω nedegenerovaná invariantní symetrická bilineární forma. Pak libovolná invariantní symetrická bilineární forma je jejím násobkem.

Dk: Pozn: $\mathfrak{g}$ je prostá $\Leftrightarrow$ ad je ireducibilní reprezentace (neboť $I \subset \mathfrak{g}$ je ideál $\Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{g}: ad_X I \subset I$

ω nedegenerovaná $\Rightarrow$ izomorfismus $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^* \ni \varphi = \omega(X_\varphi, \cdot)$ $X_\varphi \in \mathfrak{g}$

$\omega'(X,\cdot) \in \mathfrak{g}^* \Rightarrow \exists A: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ lineární $\omega'(X,\cdot) = \omega(AX,\cdot)$

ω symetrická $\Rightarrow$ $\omega(AY,X) = \omega'(Y,X) = \omega(AX,Y) = \omega(Y,AX)$

ω' invariantní $\Rightarrow$ $0 = \omega'([X,Y],Z) + \omega'(Y,[X,Z]) = \omega(A[X,Y],Z) + \omega(AY,[X,Z])$

$\underset{\omega\ inv.}{=} \omega(A[X,Y],Z) - \omega([X,AY],Z) \Rightarrow$ vzhledem k nedeg. ω

$A[X,Y] = [X,AY] \Rightarrow A \circ ad_X = ad_X \circ A \quad \forall X \in \mathfrak{g}$

ad je ireducibilní $\Rightarrow$ dle Schurova lemmatu $A = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow \omega'(X,\cdot) = \lambda\omega(X,\cdot)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$
$\Rightarrow \omega' = \lambda\omega$

QED

Př: $(S)O(m+1)\,/\,(S)O(m)$ (nad $\mathbb{R}$)

$O \in O(m+1)$: $O = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix}$ $d \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$O^T O = \mathbb{1} \Leftrightarrow$ $c = -\frac{A^T b}{\varepsilon\sqrt{1-b^T b}}$, $d = \varepsilon\sqrt{1-b^T b}$, $A^T\left(\mathbb{1} + \frac{b \cdot b^T}{1-b^T b}\right)A = \mathbb{1}$

$O(m) \subset\subset O(m+1)$: $H \in O(m) \Leftrightarrow H = \begin{pmatrix} \tilde H & \vec 0 \\ \vec 0^T & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde H^T \tilde H = \mathbb{1}$

$\Rightarrow O \cdot O(m) = \left\{ \begin{pmatrix} A\tilde H & b \\ -\frac{b^T A \tilde H}{\varepsilon\sqrt{1-b^T b}} & \varepsilon\sqrt{1-b^T b} \end{pmatrix} \middle| \tilde H^T \tilde H = \mathbb{1} \right\}$

Chceme zavést kanonického reprezentanta cosetu $O \cdot O(m)$, tj. $\tilde O = \begin{pmatrix} \tilde A & \tilde b \\ -\frac{\tilde b^T \tilde A}{\varepsilon\sqrt{1-\tilde b^T \tilde b}} & \sqrt{1-\tilde b^T \tilde b} \end{pmatrix}$ splňující ještě dodatečné podmínky (které ho v rámci $O \cdot O(m)$ jednoznačně určí)

Je zřejmé, že libov. $\tilde A$: $\tilde A^T\left(\mathbb{1} + \frac{bb^T}{1-b^T b}\right)\tilde A = \mathbb{1}$ je tvaru $A \cdot \tilde H$ kde $\tilde H^T \tilde H = \mathbb{1}$

Vybereme $\tilde A = \tilde A^T = \alpha\mathbb{1} + \beta bb^T$, výpočtem určíme α, β (vybrali jsme jedno z možných ± 1)

$\tilde A = \mathbb{1} - \frac{1+\sqrt{1-b^T b}}{b^T b} bb^T$ $\left(\Rightarrow \tilde A^T\left(\mathbb{1} + \frac{bb^T}{1-b^T b}\right)\tilde A = \mathbb{1}\right) \Rightarrow$

$O \cdot O(m) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \frac{1+\sqrt{1-b^T b}}{b^T b} bb^T & b \\ \dots & \varepsilon\sqrt{1-b^T b} \end{pmatrix} \cdot O(m)$. b, ε je invariantní při $R_{O(m)} \Rightarrow$

vektor $\vec x = (\vec b, \varepsilon\sqrt{1-b^T b}) \in S^{m+1}$ neboť $\vec x^T \vec x = 1$ vzájemně jednoznačně určuje coset $O \cdot O(m)$

$\Rightarrow$ $\boxed{O(m+1)\,/\,O(m) = S^{m+1}}$

5. cvičení

Lieovy algebry do dimenze 3

1. $\dim g = 1$ $\quad [X,Y] = -[Y,X] \Rightarrow$ $\boxed{a_1 = \mathrm{span}\{e_1\} \quad [e_1, e_1] = 0}$ abelovská

$\dim g = 1$ (a) $\dim [g,g] = 0$ $\quad a_1 \oplus a_1 = 2a_1$

(b) $\dim [g,g] = 1$ $\quad g = \mathrm{span}\{e_1 e_2\}$, $[e_1 e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$

pp. $\alpha \neq 0$ (jinak záměnou), $\tilde{e}_1 = e_1 + \frac{\beta}{\alpha} e_2$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\alpha} e_2 \Rightarrow$

$\boxed{af(1) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\} \quad [e_1 e_2] = e_1}$ řešitelná

$\dim [g,g] = 2$ nelze ($[g,g] = \mathrm{span}\{[e_1, e_2]\}$ z antisymetrie)

3. $\dim g = 3$ (a) $\dim [g,g] = 0$ $\quad 3a_1$

(b) $\dim [g,g] = 1$

(i) $[g,g] \subset \xi(g) \Rightarrow e_1 \in [g,g] \subset \xi$ tj $[e_1, X] = 0$

$\Rightarrow \exists e_2, e_3 \in g$, $[e_2 e_3] = e_1 \wedge e_1, e_2, e_3$ LN

nilpotentní $\boxed{h(1) = \mathrm{span}\{e_1 e_2 e_3\} \quad [e_2 e_3] = e_1 \quad [e_1 e_2] = 0 = [e_1 e_3]}$

(ii) $[g,g] \not\subset \xi(g) \Rightarrow e_1 \in [g,g]$, $\exists e_2 : [e_1 e_2] = e_1$, protože

$[g,g] = \mathrm{span}\{e_1\}$; je $\mathrm{span}\{e_1 e_2\}$ ideál, $e_3 : g = \mathrm{span}\{e_1 e_2 \tilde{e}_3\}$

$\Rightarrow [e_1 \tilde{e}_3] = \alpha e_1 \quad [e_2 \tilde{e}_3] = \beta e_1 \Rightarrow e_3 = \tilde{e}_3 + \beta e_1 - \alpha e_2$, $[e_1, e_3] = [e_2 e_3] = 0$

$\Rightarrow af(1) \oplus a_1$

(c) $\dim [g,g] = 2$

(i) $[g,g] = 2a_1$ $\quad [g,g] = \mathrm{span}\{e_1 e_2\}$ $\quad [e_1 e_2] = 0$

$$\begin{matrix} [e_1, e_3] \\ [e_2, e_3] \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{matrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

je povolená transformace $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \to GAG^{-1} = \tilde{A}$

z lineární algebry všechny možné neekvivalentní tvary matic 2×2 známy. Dále povoleno matici přeškálovat číslem ($e_3 \to \tilde{e}_3 = \gamma e_3$)

$\to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leq 1$, pokud $|\lambda| = 1$ $\arg \lambda \leq \pi$ nad $\mathbb{C}$
(pro různá λ neizomorfní) $\quad \lambda = \pm 1$ nad $\mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A \doteq \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{pmatrix}$ $\quad p \geq 0$ nad $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{C}$ izomorfní $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = \ldots i \ldots$)

zbývající tvary matic dávají $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=1$

$\Rightarrow$ algebry řešitelné

$$\boxed{\begin{array}{lll} [e_1 e_2]=0 & [e_1 e_3]=e_1 & [e_2 e_3]=\lambda e_2 \quad 0<|\lambda|\le 1 \\ & & |\lambda|=1 \Rightarrow \arg\lambda\le\pi \\ \hline [e_1 \dots]=0 & [e_1 e_3]=e_1 & [e_2 e_3]=e_1+e_2 \\ \hline [e_1 e_2]=0 & [e_1 e_3]=pe_1-e_2 & [e_2 e_3]=e_1+pe_2 \quad p\ge 0 \text{ nad } \mathbb{R} \end{array}}$$

(ii) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=af(1)$ $\quad [e_1 e_2]=e_1$, $\left[\begin{smallmatrix}e_1\\e_2\end{smallmatrix}, e_3\right]=\begin{smallmatrix}\alpha e_1+\beta e_2\\ \gamma e_1+\delta e_2\end{smallmatrix}$, $0=[e_1[e_2e_3]]+[e_2[e_3e_1]]+[e_3[e_1e_2]]$ $\underbrace{}_{\delta e_1}\ \underbrace{}_{\alpha e_1}\ \underbrace{}_{-\alpha e_1-\beta e_2}$

$\Rightarrow \beta=\delta=0 \Rightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=$ spor $\Rightarrow$ spor

(d) $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=3 \Rightarrow$

Lemma: $\exists\ e_1,e_2,e_3\in\mathfrak{g}$: $[e_1,e_2]=e_3$, e_1,e_2,e_3 LN

Dk: pp. $[e_1 e_2]=ae_1+be_2$ $\quad [e_2e_3]=ce_2+de_3$ $\quad [e_3e_1]=fe_1+ge_3$

$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g} \Rightarrow 0\ne\left|\begin{pmatrix}a&b&0\\0&c&d\\f&0&g\end{pmatrix}\right|=acg+bdf$

$[e_1\underbrace{[e_2e_3]}_{ce_2+de_3}]+[e_2\underbrace{[e_3e_1]}_{fe_1+ge_3}]+[e_3\underbrace{[e_1e_2]}_{ae_1+be_2}]=ace_1+\cancel{bce_2}-dfe_2-\cancel{dge_3}$

$+gce_2+\cancel{gde_3}-\cancel{afe_1}-bfe_2+afe_1+age_3-bce_2-bde_3=$

$=(ac-df)e_1+(gc-bf)e_2+(ag-bd)e_3$

$\Rightarrow ac=df,\quad cg=bf,\quad ag=bd \quad\Rightarrow 0\ne \underbrace{df(g+b)}_{acg+bdf} \Rightarrow d\ne0, f\ne0, g\ne-b$

$\Rightarrow a\ne0, c\ne0, g\ne0, b\ne0 \quad (\dots g=0\Rightarrow b=0\Rightarrow g=\dots$

$\Rightarrow cgd=bdf=agf \quad cd=af \Rightarrow afdg=cd^2g= \dots bcd \Rightarrow fg=bc$

$ab=dg \Rightarrow adg=a^2b = d^2b \Big\} \Rightarrow d=\pm a \Rightarrow b=\pm g$

$b=+g \Rightarrow d=+a,\ f=c$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{pmatrix} \Rightarrow [e_1+\omega e_2, e_3]=-ce_1-be_3+\omega ce_2+\omega ae_3$

$=c(-e_1+\omega e_2)+(\omega a-b)e_3$

pp. $\omega\ne0 \Rightarrow \tilde e_1=e_1+\omega e_2$, $\tilde e_2=e_3$, $\tilde e_3=c(-e_1+\omega e_2)+(\omega a-b)e_3$ jsou hledané LN e_1,e_2,e_3

QED

zbývá určit $\begin{matrix}[e_1,e_3]\\ [e_2,e_3]\end{matrix}=A\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}+\begin{matrix}\gamma e_3\\ \delta e_3\end{matrix}$, $\det A\ne0$ (jinak $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\ne\mathfrak{g}$)

$\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\tilde e_1\\ \tilde e_2\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$, $\det G=1$ $\quad [g_{11}e_1+g_{12}e_2, g_{21}e_1+g_{22}e_2]=\underbrace{\det G}_{1}\cdot[e_1e_2]=e_3$

$\Rightarrow A\to\tilde A=GAG^{-1}$

$[e_1[e_2e_3]]+[e_2[e_3e_1]]+[e_3\overbrace{[e_1e_2]}^{e_3}]=0=a_{11}e_3+\delta(a_{11}e_1+a_{12}e_2+\cancel{\gamma e_3})+a_{22}e_3-\gamma(a_{21}e_1+a_{22}e_2+\cancel{\delta e_3})$

$\Rightarrow \delta a_{11}=\gamma a_{21},\quad \delta a_{12}=\gamma a_{22},\quad a_{11}+a_{22}=0 \Rightarrow \operatorname{tr}A=0$

$\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}-\lambda&0\\0&+\lambda\end{pmatrix}$, škálováním $e_3\to\frac{2}{\lambda}e_3$, $e_1\to\frac{\sqrt2}{\sqrt\lambda}e_1$, $e_2\to\frac{\sqrt2}{\sqrt\lambda}e_2$ $\quad A\sim\begin{pmatrix}-2&0\\0&+2\end{pmatrix}$, $\delta=\gamma=0$

$\operatorname{Re}\lambda\ge0,\ \lambda\ne0$

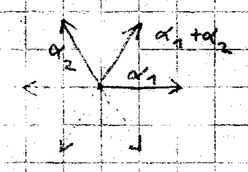
nad $\mathbb{R}$ 2. možnost $A\sim\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ (opět už vybrán vhodný násobek jako výše), $\delta=\gamma=0$

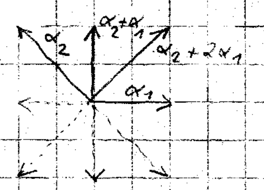
$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{poloprosté} \Rightarrow & sl(2) & [e_1,e_2]=e_3 \quad [e_3e_1]=2e_1 \quad [e_3e_2]=-2e_2 \\ \text{nad } \mathbb{R}: & so(3) & [e_1,e_2]=e_3 \quad [e_1e_3]=-e_2 \quad [e_2e_3]=e_1 \end{array}}$$

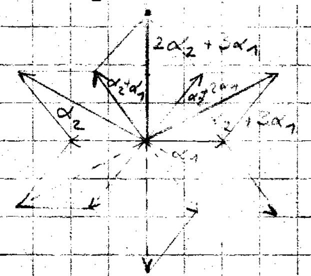
(8 – 10. cvičení) Cartanova klasifikace, kořeny, Dynkinovy diagramy

Př: kořenové diagramy algeber jednoduchých (přerušované Δ^-)

$sl(3,\mathbb{C})$ $so(5,\mathbb{C})$ G_2







Př: $sl(l+1,\mathbb{C})$ $n=l+1$

$\mathfrak{h}=\{diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \mid \sum_k \lambda_k=0\}$ def. $\varphi_i:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$ $\varphi_i(diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=\lambda_i$

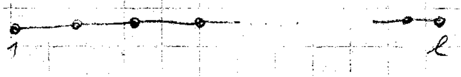
$E_{ij}= i\to\begin{pmatrix} & \overset{j}{1} & \end{pmatrix}$ $[H,E_{ij}]=(\varphi_i-\varphi_j)(H)E_{ij}$ $\Rightarrow$

$\Delta=\{\varphi_i-\varphi_j\}_{i,j=1}^{n}$ $H_0=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\lambda_1>\dots>\lambda_n$ $\Rightarrow \Delta^+=\{\alpha\in\Delta \mid \alpha(H_0)>0\}$

$\Delta^+=\{\varphi_i-\varphi_j\}_{i<j}$ $\Delta^P=\{\alpha_j=\varphi_j-\varphi_{j+1}\}_{j=1}^{l}$ $\alpha_i+k\alpha_j\in\Delta^+ \Leftrightarrow j=i\pm1 \Rightarrow$

$a_{ij}=-1$ $i=j\pm1$ $a_{ii}=2$ $\Rightarrow$
$\phantom{a_{ij}=}0$ jinak

Pozn: $K(\cdot)=2(l+1)\,tr(\cdot)$
$\overset{\shortparallel}{2n}$



Př: $sp(2l,\mathbb{C})$

$sp(2l,\mathbb{C})=\{X\in\mathbb{C}^{2l,2l} \mid X^TJ+JX=0\}$ $J=\begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ -\mathbb{1} & 0\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in sp(2l,\mathbb{C}) \Leftrightarrow C=C^T,\ B=B^T,\ D=-A^T$

$\mathfrak{h}=\left\{\left(\begin{array}{c|c}\Lambda & 0\\ \hline 0 & -\Lambda\end{array}\right) \,\middle|\, \Lambda=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\right\}$, $\varphi_k:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}:\ \varphi_k(X)=\lambda_k$

$F_{ij}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & E_{ij}+E_{ji}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $G_{ij}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ E_{ij}+E_{ji} & 0\end{pmatrix}$, $I_{ij}=\begin{pmatrix}E_{ij} & 0\\ 0 & -E_{ji}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow [H,F_{ij}]=(\varphi_i+\varphi_j)(H)F_{ij}$ $[H,G_{ij}]=-(\varphi_i+\varphi_j)(H)G_{ij}$ $[H,I_{ij}]=(\varphi_i-\varphi_j)(H)I_{ij}$

$\Rightarrow \Delta=\{\varphi_i+\varphi_j\}_{i<j}\cup\{2\varphi_i\}_{i=1}^{l}\ \{\varphi_i-\varphi_k\}_{i,k=1}^{l}\cup\{-(\varphi_i+\varphi_j)\}_{i<j}\cup\{-2\varphi_i\}_{i=1}^{l}$

$H_0=\begin{pmatrix}\Lambda & \\ & -\Lambda\end{pmatrix}$ $\lambda_1>\lambda_2>\dots>\lambda_l$ $\Rightarrow$ $\Delta^+=\{\varphi_i+\varphi_k\}_{i<k}\cup\{2\alpha_i\}_i\cup\{\varphi_i-\varphi_k\}_{i<k}$

$\Delta^P=\{\alpha_i=\varphi_i-\varphi_{i+1}\}_{i=1}^{l-1}\cup\{\alpha_l=2\varphi_l\}$

$\Delta^+\subset span\,\Delta^P$ neboť $\varphi_i-\varphi_k=\sum_{j=i}^{k-1}\alpha_j=(\varphi_i-\varphi_{i+1})+(\varphi_{i+1}-\dots-\varphi_k)$

$2\varphi_i=2\sum_{j=i}^{l-1}\alpha_j+\alpha_l=2(\varphi_i-\varphi_{i+1}+\varphi_{i+1}-\dots-2\varphi_l+2\varphi_l)$

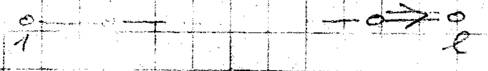
$\varphi_i+\varphi_k=\sum_{j=i}^{l-1}\alpha_j+\sum_{j=k}^{l-1}\alpha_j+\alpha_l\ (=\varphi_i-\varphi_k+2\varphi_k)$

délky hran

$\alpha_j + k\alpha_i \in \Delta,\ l > j > i \iff j = i+1,\ k = 0,1$ $a_{i\,i+1} = -1$ $i < l-1$

$\alpha_l + k\alpha_i \in \Delta \iff i = l-1,\ k = 0,1,2$ $a_{l\,l-1} = -2$ $a_{l-1\,l} = -1$

$(2\varphi_l,\ \varphi_{l-1}+\varphi_l,\ 2\varphi_{l-1})$

$\Rightarrow$ 

Př $so(2l,\mathbb{C})$ $\dim so(2l,\mathbb{C}) = \frac{2l}{2}(2l-1) = l(2l-1)$

$\mathfrak{h} = \{ \underbrace{\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & -i\lambda_1\\ +i\lambda_1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\lambda_2\\ +i\lambda_2 & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & -i\lambda_l\\ +i\lambda_l & 0\end{pmatrix}\right)}_{H} \}$ $\varphi_i(H) = \lambda_i$

ozn: $\tilde F = \begin{pmatrix}1 & +i\\ +i & -1\end{pmatrix} = \sigma_3 + i\sigma_1 \Rightarrow \lambda_i\sigma_2 \tilde F - \lambda_j \tilde F \sigma_2 = (\lambda_i + \lambda_j)\tilde F$

$i<j$ $F_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \to \\ j \to \end{array}\begin{pmatrix} & \overset{j}{\downarrow} \\ & \tilde F \\ -\tilde F^T & \end{pmatrix} \Rightarrow [H, F_{ij}] = (\lambda_i + \lambda_j) F_{ij}$

F_{ij}^+ $[H, F_{ij}^+] = -(\lambda_i + \lambda_j) F_{ij}^+$

$\tilde G = \begin{pmatrix}1 & -i\\ +i & 1\end{pmatrix} = \mathbb{1} + \sigma_2$ $\lambda_i\sigma_2 \tilde G - \lambda_j \tilde G \sigma_2 = (\lambda_i - \lambda_j)(\mathbb{1} + \sigma_2) = (\lambda_i - \lambda_j)\tilde G$

$i<j$ $G_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \to \\ j \to \end{array}\begin{pmatrix} \overset{i}{\downarrow} & \overset{j}{\downarrow} \\ & \tilde G \\ -\tilde G^T & \end{pmatrix} \Rightarrow [H, G_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) G_{ij}$

G_{ij}^+ $[H, G_{ij}^+] = (\lambda_j - \lambda_i) G_{ij}^+$

$\Rightarrow \Delta = \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i,j=1}^{l} \cup \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j} \cup \{-\varphi_i - \varphi_j\}_{i<j}$

$\dim \mathfrak{g}$ $l + l(l-1) + l(l-1)/2 \cdot 2 = l + 2l(l-1) = l(2l-1)$ OK máme všechny kořeny

H_0: $\varphi_i(H) = \lambda_i$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$

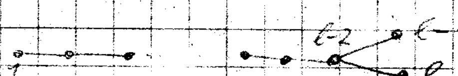
$\Rightarrow \Delta^+ = \{\varphi_i - \varphi_j\}_{i<j} \cup \{\varphi_i + \varphi_j\}_{i<j}$ $\Delta^P = \{\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}\}_{i=1}^{l-1} \cup \{\varphi_{l-1} + \varphi_l = \alpha_l\}$

$a_{i+1\,i} = a_{i\,i+1} = -1$ $i < l-1$ $a_{l-1\,l} = 0$ $(\varphi_{l-1} - \varphi_l + \varphi_{l-1} + \varphi_l = 2\varphi_{l-1} \notin \Delta)$

$a_{l-2\,l} = -1$ $\varphi_{l-2} - \varphi_{l-1} + k(\varphi_{l-1} + \varphi_l) \in \Delta$ pro $k = 0,1$

ostatní $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$

$\Rightarrow$ Dynkinův diagram



11. cvičení

Ireducibilní reprezentace konstruované pomocí tenzorových součinů

Základ: Je-li ϱ V reprezentace algebry $\mathfrak{g}$ s vahami λ_i $V = \operatorname{span}\{v_{\lambda_i}\}$,

ϱ' reprezentace $\mathfrak{g}$ s vahami μ_j, $W = \operatorname{span}\{w_{\mu_j}\}$, pak

na $V \otimes W$ máme reprezentaci $\varrho \otimes \varrho'$: $(\varrho \otimes \varrho')(X)(v \otimes w) = \varrho(X) v \otimes w + v \otimes \varrho'(X) w$

s vahami $\lambda_i + \mu_j$ a váhovými vektory $v_{\lambda_i} \otimes w_{\mu_j}$.

Tuto reprezentaci pak rozložíme na irrepy a získáme reprezentace

s jinými vahami než původní (jistě je obsažena irrep s nejv. vahou rovnou součtu původních).

Často vybíráme $V = W$. Pak irrepy jsou obsaženy v $V \otimes_S V$, $V \wedge V$

neboť permutace $\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$ komutuje s reprezentací $\varrho \otimes \varrho$.

(Zobecněním $V \otimes V \otimes V \ldots \otimes V$ rozkládáme na "irrepy S_n" symetrické grupy)

Př: Clebsch-Gordonův rozklad (skládání momentů) $D^j \otimes D^k = D^{j+k} + D^{j+k-1} + \ldots + D^{|j-k|}$

kde D^j je $(2j+1)$-rozměrná irrep $su(2)$

Př: $D^{1/2} = \operatorname{span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ $D^{1/2} \otimes_S D^{1/2} = D^1 = \operatorname{span}\{|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\}$

$D^{1/2} \wedge D^{1/2} = D^0 = \operatorname{span}\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)\}$

Spočítejte akce $L_3 = L_3^{(1)} + L_3^{(2)}$, L_+, L_- na $D^{1/2} \otimes_S D^{1/2}$, $D^{1/2} \wedge D^{1/2}$

Př: $A_\ell = sl(\ell+1, \mathbb{C})$

$T_1 = \operatorname{diag}(1, -1, 0, \ldots, 0)$ $T_2 = \operatorname{diag}(0, 1, -1, \ldots, 0)$

$T_\ell = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 1, -1)$

$H = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{\ell+1})$, $\sum a_i = 0$

fundamentální váhy $\lambda_i(T_j) = \delta_{ij}$, ozn. $\varphi_i(H) = a_i$ (φ_i nejsou LN $\varphi_{\ell+1} = -\sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i \Leftarrow \operatorname{tr} H = 0$)

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = \varphi_1$ $\lambda_2 = \varphi_1 + \varphi_2$, $\ldots$ $\lambda_j = \sum_{i=1}^{j} \varphi_i$

definující reprezentace $sl(\ell+1, \mathbb{C})$ $V = \mathbb{C}^{\ell+1}$ váhové vektory $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ odpovídající váhy jsou φ_i

v naší volbě uspořádání kořenů (poz, neg.) φ_1 je mezi těmito vahami nejvyšší

máme reprezentaci s nejvyšší vahou λ_1, ostatní váhy $\varphi_i = \underset{\lambda_1}{\varphi_1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$, $\alpha_j = \varphi_j - \varphi_{j+1} \in \Delta^P$

tuto reprezentaci označme ϱ a konstruujme $\varrho_2 = \varrho \wedge \varrho$

$V \wedge V = \{e_i \wedge e_j, 1 \leq i < j \leq \ell+1\}$, $e_i \wedge e_j$ je váhový vektor přísl. $\varphi_i + \varphi_j \in \mathfrak{I}$

maximální váha repr. $\varrho \wedge \varrho$ $\varphi_1 + \varphi_2 = \lambda_2$, atd. $\varrho_k = \overset{k}{\varrho \wedge \varrho \wedge \ldots \wedge \varrho}$ má nejv. váha $\lambda_k = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i$

$\Rightarrow$ všechny fundam. reprezentace

Př: $C_\ell = sp(2\ell, \mathbb{C})$ prosté kořeny $\{\alpha_i = \varphi_i - \varphi_{i+1}\}_{i=1}^{\ell-1} \cup \{\alpha_\ell = 2\varphi_\ell\}$

$$T_i = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(0,\dots,\overset{i}{1},-1,\dots,0) & 0 \\ 0 & -\mathrm{diag}(0,\dots,1,-1,\dots,0) \end{pmatrix}. \quad i \le \ell-1$$

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(0,\dots,0,1) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(0,\dots,0,1) \end{pmatrix}$$

fundamentální váhy $\lambda_j = \sum_{i=1}^{j} \varphi_i$

definující reprezentace $V = \mathbb{C}^{2\ell}$ ... nejv. váha φ_1, $V \wedge V = \mathbb{C}^{\ell(2\ell+1)}$ $\varphi_1+\varphi_2$, ...

ostatní fundamentální reprezentace opět tenzorovými součiny

Př: $B_\ell = so(2\ell+1, \mathbb{C})$ $\lambda_1 = \varphi_1$, $\lambda_2 = \varphi_1+\varphi_2$, ..., $\lambda_{\ell-1} = \varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_{\ell-1}$ O.K.,

$\lambda_\ell = \frac{1}{2}(\varphi_1+\dots+\varphi_\ell)$ přísl. reprezentace se nedá vytvořit tenzorovými součiny

tzv. spinorová reprezentace

podobně $D_\ell = so(2\ell, \mathbb{C})$ $\lambda_1 = \varphi_1$ $\lambda_2 = \varphi_1+\varphi_2$ $\lambda_{\ell-2} = \varphi_1 + \dots + \varphi_{\ell-2}$ OK

$\lambda_{\ell-1} = \frac{1}{2}(\varphi_1+\dots+\varphi_{\ell-1}-\varphi_\ell)$ $\lambda_\ell = \frac{1}{2}(\varphi_1+\dots+\varphi_\ell)$

$\Rightarrow$ dvě spinorové reprezentace odpovídající nejvyšším vahám $\lambda_{\ell-1}, \lambda_\ell$

12 cvičení

Použití reprezentací algebry $SU(3)$ k popisu částic

Pozn: isotopický spin (isospin) W. Heisenberg 1932

z hlediska silných interakcí se proton a neutron chovají (prakticky) stejně => předpoklad symetrie transformující protony na neutrony a naopak

tzv. dublet $|p\rangle, |n\rangle$ vzhledem k akci $U \in SU(2)$. Ozn. $|p\rangle = \binom{1}{0}, |n\rangle = \binom{0}{1}$

$|p\rangle \to \overbrace{U\binom{1}{0}}^{|\tilde{p}\rangle}, |n\rangle \to \overbrace{U\binom{0}{1}}^{|\tilde{n}\rangle}$. Hamiltonián (či Lagrangián) silných interakcí by měl být $SU(2)$ invariantní.

Protože jde o fundamentální reprezentaci $SU(2)$, tj. o dvojznačnou (spinorovou) reprezentaci $SO(3)$, užívá se pro ni název isospin.

$I_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$, $I^2 \begin{matrix}|p\rangle \\ |n\rangle\end{matrix} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \begin{matrix}|p\rangle \\ |n\rangle\end{matrix}$, $I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$ $I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$

Pak elektrický náboj protonu (neutronu) je určen přísl. vl. číslem $I_3 + \frac{1}{2}\mathbb{1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

další částice na které působí silné interakce - piony a další mezony (kaony atd.)

=> $Q = I_3 + \frac{1}{2}B$ kde B je baryonové číslo (± 1 pro (anti) nukleony, 0 pro mezony)

Celkový náboj, isospin a baryonové číslo se zachovávají, ale experimentálně se ukázalo, že se zachovává i něco dalšího => postulát o zachování podivnosti S

Gell-Mann-Nishijima vzorec:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \quad \text{kde hypernáboj} \quad Y = S + B$$

=> potřeba zvětšit uvažovanou grupu $SU(2)$ => teorie $SU(3)$ s tripletem $|p\rangle, |n\rangle, |\Lambda\rangle$

nefungovalo => předpoklad nepozorovatelných částic, tzv. kvarků $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$

($SU(3)$ vůní, v současnosti známe 6 druhů kvarků)

Vhodná báze $su(3)$ (ve fyzikálním značení, po komplexifikaci - viz $\tilde{L}_\pm = \tilde{L}_1 \pm i\tilde{L}_2$)

$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$ $Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$ tj. prvky Cartanovy podalgebry => komutující pozorovatelné, jejich vl. čísla => hodnoty nábojů

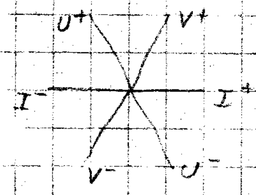
$I_+ = E_{12} = E_\alpha$, $I_- = (I_+)^\dagger$, $U_+ = E_{23} = E_\beta$, $U_- = (U_+)^\dagger$, $V_+ = E_{13} = E_\gamma$, $V_- = (V_+)^\dagger$

=> $[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm$ $[I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm$ $[I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$ $[Y, I_3] = 0$

$[Y, I_\pm] = 0$ $[Y, U_\pm] = \pm U_\pm$ $[Y, V_\pm] = \pm V_\pm$

Pozn. Y neodpovídá žádnému prostému kořenu jako I_3, ale zato $K(I_3, Y) = 0$ => odpov. $\varphi_{\vec{h}}^\pm$ jsou OG kořenový diagram

$\{U^+, V^+, I^+\} = \Delta^+$

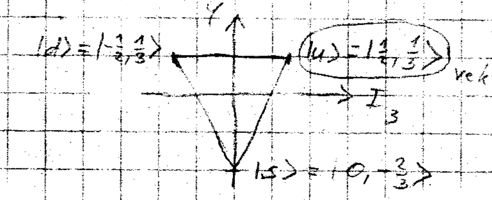


ozn. stejně kořen a kořenový vektor)

Váhové vektory budeme značit $|\lambda, \mu\rangle$
kde $\varrho(I_3)|\lambda,\mu\rangle = \lambda|\lambda,\mu\rangle$, $\varrho(Y)|\lambda,\mu\rangle = \mu|\lambda,\mu\rangle$

váhový diagram fundamentální reprezentace 3

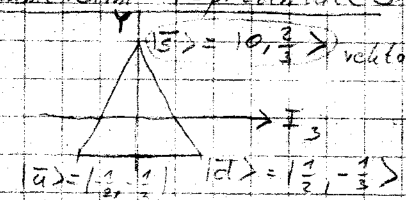
$|u\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $|d\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $|s\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



$\Rightarrow I_3|u\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle$, $Y|u\rangle = \frac{1}{3}|u\rangle$ atd.

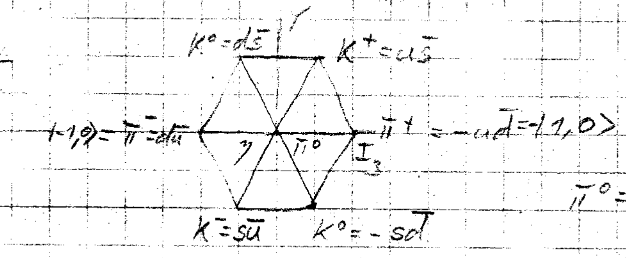
Pozn: $V^+|s\rangle = k\cdot|u\rangle$, $I^-|u\rangle = k'\cdot|d\rangle$ atd.

antifundamentální reprezentace $\bar{3}$ určená $-A^T$ kde $A \in SU(3)$



$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ mesony

adjungovaná repr. oktet



$\pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$

$\eta = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}}{\sqrt{6}}$

fyzikálně jsou částice identifikovány podle hodnot Y, I_3 odvozených z experimentů

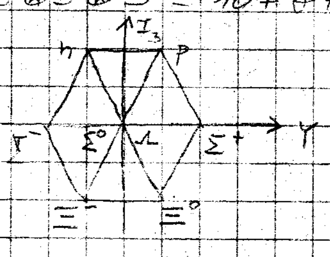
zatímco $\eta' = \frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}}$ je invariantní vůči $SU(3)$ ... 1 singlet

- např. piony mají nulové Y a I_3 je určeno jejich nábojem, kaony mají nenulové hodnoty podivnosti (⇐ některé jinak přípustné procesy, jako $K^- + p \to K^- + p + K^0$, $K^- + p \to p + \pi^-$ nebyly pozorovány)

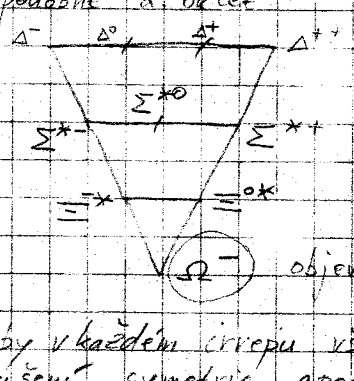
- znaménka (jako $-s\bar{d}$) jsou fyzikálně motivovanou konvencí - interpretace členů v Lagrangiánu / Hamiltoniánu

Pozn: konstrukce diagramu ... vzít např. 3, do každého jeho vrcholu umístit počátek $\bar{3}$ a polohy jeho vrcholů určují vrcholy diagramu $3 \otimes \bar{3}$ včetně počtu váhových vektorů

$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 + 8 + 8 + 1$ baryony ... 2 oktety, 1 dekuplet



podobně 2. oktet



objevena až po předpovědi z kvarkového modelu (1964)

ALE: tato symetrie je narušená, jinak by v každém civrepu všechny částice měly stejnou hmotnost
⇒ spontánní narušení symetrie apod.