Reern prce : Betheho ansatz a Yang-Baxterovy rovnice

Libor nobl

3. prosince 1997

1 vod

V pedloen reern prci se budu zabvat metodou een lohy nalzt vlastn vektory (i pro nekonenrozmrn prostory vlastn funkce) a vlastn sla pro ppady uritch specilnch opertor, takzvanm Betheho ansatzem. Nejprve strun nastnm pvodn lohu, k jejmu een vznikla, a pedvedu, jak ji lze touto metodou vyeit. Pak uki, jak tuto lohu lze peformulovat v souasnm jazyce kvantov mechaniky. Nakonec se budu zabvat jednm z pklad, ve kterch vede Betheho ansatz na zjednoduen dan lohy, a samotn loha na prvn pohled nem s pvodnm Betheho problmem nic spolenho. Tmto pkladem bude problm vce stic na pmce (i krunici) se vzjemnm psobenm danm δ-funkc. Souasn uki, jak se pi een tto lohy dolo k rovnicm, kter jsou nyn nazvny Yang-Baxterovy a kter jsou od t doby peliv zkoumny matematiky i fyziky.

2 Pvodn Betheho loha a jej een

V roce 1931 byla publikovna prce [1]. V tomto lnku se H. Bethe zabval kvantov mechanickou lohou nalzt vlastn sla a vlastn vektory matice, kter odpovdala opertoru energie (tj. hamiltoninu) linernho etzku n atomovch jader. Pvodnm podntem tto prce byla snaha vysvtlit feromagnetismus ltek. Ovem jejm nejvtm pnosem se postupn ukzaly bt nikoliv jej vsledky, nbr metoda pouit pi een lohy, tzv. Betheho ansatz. Tuto metodu nyn uki.

Bethem een loha byla zadna takto :

> Je dn linern etzek n stic se spinem. Pedpokldm, e spin r z nich ukazuje nahoru, spin zbylch ukazuje dol. stice oindexuji podle polohy v etzku sly 1,...,n. Definuji sla $m_1, m_2, \dots, m_r$ jako indexy stic se spinem nahoru tak, e $m_i < m_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, r-1\}$. Tmto je jednoznan uren stav etzku. Odpovdajc vlnovou funkci oznam $\psi(m_1, m_2, \dots, m_r)$. Obecnou vlnovou funkci etzku pak vyjdm jako
>
> $$\Phi = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_r} a(m_1, m_2, \dots, m_r)\psi(m_1, m_2, \dots, m_r),$$
>
> kde se st pes vechny mon r-tice $m_1, m_2, \dots, m_r \in \{1, \dots, n\}$ takov, e $m_i < m_{i+1}, \forall i \in \{1, \dots, r-1\}$. V tto bzi prostoru stav je dna "matice energie vzjemnho psoben" W, tj. hamiltonin, takto :
>
> Na diagonle jsou elementy tvaru
>
> $$W_{m_1, m_2, \dots, m_r; m_1, m_2, \dots, m_r} = E_0 - n'J,$$

kde E_0,J jsou dan konstanty a n' je poet pr sousedcch stic se stejn orientovanmi spiny. Nediagonln elementy jsou ureny takto:

$$W_{m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_r;m_1,\ldots,m_i+1,\cdots,m_r} = -J, i \in \{1,\ldots,r\}, m_{i+1} \neq m_i + 1,$$

v ostatnch ppadech jsou rovny nule.

Nyn hledm vlastn sla e tto matice a pslun vlastn vektory

$$\psi = \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_r} a(m_1,m_2,\ldots,m_r)\psi(m_1,m_2,\ldots,m_r),$$

Tuto lohu mohu pevst na lohu najt koeficienty $a(m_1,m_2,\ldots,m_r)$ splujc rovnici

$$\begin{aligned} 2\varepsilon a(m_1,m_2,\ldots,m_r) & + \\ \sum_{m'_1,m'_2,\ldots,m'_r} [a(m'_1,m'_2,\ldots,m'_r) - a(m_1,m_2,\ldots,m_r)] & = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $2\varepsilon J = e - E_0 + nJ$, e je hledan vlastn slo a st se pes vechny $m'_1, m'_2, \ldots, m'_r$, kter lze zskat zmnou dvou sousednch stic s navzjem opanmi spiny, a souasn splujc periodickou podmnku

$$a(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_r) = a(m_1,\ldots,m_r,m_i+n), \forall i \in \{1,\ldots,r\}. \tag{2}$$

een provedu nejprve pro r = 1. V tomto ppad rovnice (1) pechzej na tvar

$$2\varepsilon a(i) + a(i+1) + a(i-1) - 2a(i) = 0, \forall i \in \{1,\ldots,n-1\}. \tag{3}$$

Tento systm rovnic je systmem linernch diferennch rovnic, kter je mon eit substituc $a(i) = r^i$:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon r^i + r^{i-1} + r^{i+1} - 2r^i &= 0 \\ r^2 + 2(\varepsilon - 1)r + 1 &= 0 \\ r = (1-\varepsilon) \pm \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 1} \end{aligned}$$

Dle mus bt splnna podmnka (2). Je vidt, e vzhledem k tvaru een posta splnit $a(1+n) = a(1)$. Z tto podmnky mohu rovnou vylouit monost $\varepsilon < 0$, respektive $\varepsilon \geq 2$ (jinak $|r| \neq 1$, a tedy dan rovnost neplat ani pro moduly koeficient $a(i)$). V ppad $\varepsilon \in \langle 0, 2)$ je modul r (a tedy $a(i)$) roven 1, pro jeho fzi plat $cos\phi = 1 - \varepsilon$. Protoe z podmnky (2) plyne $n\phi = 2\pi l, l \in \mathcal{Z}$, mus ε splovat rovnici

$$\varepsilon = 1 - \cos\frac{2\pi l}{n}, l \in \{0,\ldots,n-1\}.$$

Pak lze vyjdit $r = e^{i\frac{2\pi l}{n}}$. Pro obecn tvar een (3) pak plat

$$a(j) = C_1[(1-\varepsilon) + \sqrt{(\varepsilon-1)^2-1}]^j + C_2[(1-\varepsilon) - \sqrt{(\varepsilon-1)^2-1}]^j, \text{ tj.}$$

$$a(j) = C_1 e^{i\frac{2\pi l}{n}j} + C_2 e^{-i\frac{2\pi l}{n}j} = C_1 e^{i\frac{2\pi l}{n}j} + C_2 e^{i\frac{2\pi(n-l)}{n}j}.$$

Protoe chci najt bzi danho prostoru tvoenou vlastnmi vektory matice W a odpovdajc vlastn sla, mohu vsledek zapsat v kompaktnm tvaru

$$\phi_l = \sum_{j=1}^{n} e^{i\frac{2\pi l}{n}j}\psi_j,\ \varepsilon_l = 1 - cos\frac{2\pi l}{n}, \tag{4}$$

kde ψ_j je vlnov funkce odpovdajc stavu s j-tm spinem ukazujcm nahoru, ostatn ukazuj dol.

Dalm krokem je een ppadu $r = 2$. V tomto ppad rovnice (1) pechzej na tvar

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon-2)a(i,j) + a(i,j+1) + a(i+1,j) + a(i,j-1) + a(i-1,j) &= 0 \quad (5)\\ \forall i,j \in \{1,\dots,n-1\}, i < j-1 &\\ 2(\varepsilon-1)a(i,i+1) + a(i,i+2) + a(i-1,i+1) &= 0 \quad (6)\\ \forall i \in \{1,\dots,n-1\} & \end{aligned}$$

K een tchto rovnic zvolm ansatz :

$$a(j,k) = C_1 e^{i(f1j+f2k)} + C_2 e^{i(f1k+f2j)}, \tag{7}$$

kde C_1, C_2, f_1, f_2 jsou zatm neuren konstanty. Z potku pedpokldm, e f_1, f_2 jsou reln sla. Dosadm (7) do (5) a dostvm podmnku pro ε

$$\varepsilon = 2 - \cos f_1 - \cos f_2 \tag{8}$$

pro libovolnou volbu konstant C_1, C_2, f_1, f_2. Zbv zajistit splnn (6) a (2). Abych splnil (6), formln definuji $a(j,j)$ splujc

$$a(j+1,j+1) + a(j,j) - 2a(j,j+1) = 0. \tag{9}$$

Pitenm (9) k (6) dostvm rovnici tvaru (5), kter je ji splnna. Nyn ale musm splnit (9). Dosazenm (7) do (9) dostvm po prav podmnku pro pomr C_1/C_2 :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin\frac{f1-f2}{2} + i(\cos\frac{f1+f2}{2} - \cos\frac{f1-f2}{2})}{\sin\frac{f1-f2}{2} - i(\cos\frac{f1+f2}{2} - \cos\frac{f1-f2}{2})}.$$

Z vrazu na prav stran je vidt, e pro $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ je $|C_1/C_2| = 1$ a tedy lze volit substituci $C_1/C_2 = e^{i\phi}$, kde $\phi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Protoe nsoben vektoru nenulovou konstantou je z hlediska hledn linern nezvislch vlastnch vektor operace nezajmav, lze pst

$$a(j,k) = e^{i(f1j+f2k+\phi/2)} + e^{i(f1k+f2j-\phi/2)}. \quad (10)$$

Souasn lze pepsat vztah pro C_1, C_2 na vztah pro ϕ

$$2\cot\frac{\phi}{2} = \cot\frac{f_1}{2} - \cot\frac{f_2}{2} \vee f_1 = \phi = 0 \neq f_2 \vee f_2 = \phi = 0 \neq f_1 \quad (11)$$

Dle musm splnit podmnku (2), tj.

$$e^{i(f1k+f2j+f2n+\phi/2)} + e^{i(f1j+f2k+f1n-\phi/2)} = e^{i(f1j+f2k+\phi/2)} + e^{i(f1k+f2j-\phi/2)}.$$

Tato podmnka m bt splnna pro $\forall j,k \in \{1,\ldots,n\}, j < k$. Proto mus platit :

$$e^{i(f2n+\phi)} = 1,\ e^{i(f1n-\phi)} = 1.$$

Aby to bylo splnno, mus bt

$$nf_2 + \phi = 2\pi\lambda_2,\ nf_1 - \phi = 2\pi\lambda_1,\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathcal{Z}.$$

Z dvodu periodinosti vraz v (7) se sta omezit na $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0,\ldots,n-1\}$ a vztahy pepsat do tvaru

$$f_1 = \frac{2\pi\lambda_1 + \phi}{n},\ f_2 = \frac{2\pi\lambda_2 - \phi}{n}. \quad (12)$$

Souet $f_1 + f_2$ dle budu znait k. Tmto jsou splnny vechny podmnky kladen na een (5),(6),(2) a souasn je nalezen tvar vech een, kter lze (za omezen na $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$) najt ve tvaru (7).

Nyn se budu zabvat otzkou, kolik een je mon pomoc ansatzu (7) skuten najt. Tchto een je tolik, kolik je mono volit λ_1, λ_2 takovch, e dostanu navzjem rzn een. Je vidt, e ppady $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$ a $\lambda_2 = \alpha, \lambda_1 = \beta$ dvaj stejn vlastn vektor (po vynsoben konstantou) a tedy posta se zabvat pouze ppady $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Pro $\lambda_1 < \lambda_2$ lze ukzat existenci ϕ een (11) pi zadanch λ_1, λ_2 a definici f_1, f_2 dle (12). Pro $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ to plyne z toho, e prav strana (11) je omezen spojit funkce, dky $\lambda_1 < \lambda_2$ pro $\phi \in \langle -\pi, \pi\rangle$ kladn. Lev strana pro $\phi \in (0, \pi\rangle$ probh jako spojit funkce vechna kladn sla a tedy mus existovat alespo jeden prsek graf lev a prav strany jako funkce ϕ, tj. een (11). Pro $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ je existence een evidentn, posta zvolit $\phi = 0$ a tm bude splnno $f_1 = \phi = 0 \wedge f_2 = \frac{2\pi\lambda_2}{n} \neq 0$. Pro $\lambda_1 = \lambda_2$ obdobn tvrzen obecn neplat. Dle je nutn si povimnout, e pro $\lambda_1 + 1 = \lambda_2$ dostvm po dosazen nezajmav triviln een $\phi = \pi$ tj. $a(i,j) = 0$. Z (12) a omezen na $\phi \in (-\pi, \pi\rangle$ plyne, e ostatn een jsou navzjem rzn, celkem tedy mm zajitno $\binom{n-1}{2}$ een zskanch pomoc danho ansatzu (7).

Abych nael dalch $n-1$ een (5), (6), (2), pozmnm poadavky na f_1, f_2. Nyn pedpokldm, e $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$. Omezm se na komplexn sdruen f_1, f_2, tj.

$$f_1 = u + iv, \ f_2 = u - iv, \ u \in \mathcal{R}, \ v \in \mathcal{R}^+ \tag{13}$$

Odtud dostvm po prav vztah pro $\cot f_1/2$ (a analogicky i pro $\cot f_2/2$):

$$\cot \frac{f_1}{2} = \frac{\sin u - i \sinh v}{\cosh v - \cos u}. \tag{14}$$

Je vidt, e nyn tak $\phi \in \mathcal{C}$. Oznam $\phi = \psi + i\chi, \ \psi, \chi \in \mathcal{R}$. Ze vztah (12), kter mus platit i v tomto ppad, dostvm po porovnn relnch a ryze imaginrnch sloek

$$n(f_1 - f_2) = 2inv = 2\pi(\lambda_1 - \lambda_2) + 2\phi, \ \psi = \pi(\lambda_2 - \lambda_1), \ \chi = nv \tag{15}$$

Pokud pedpokldm, e v m hodnotu znateln rznou od nuly a e n je dostaten velk (co je ve fyziklnch aplikacch splnno), mus bt χ znan velk.
To umouje provst odhady $e^{-\chi} = 0, \sinh \chi = \cosh \chi = e^{\chi}/2$ a tedy dostvm

$$\cot \phi/2 = -i(1 + 2e^{-\chi + i\psi})$$

. V tomto piblen z (11) plyne

$$\sinh v = \cosh v - \cos u, \text{tj. } e^{-v} = \cos u, \tag{16}$$

$$\varepsilon = \sin^2 u = 1/2(1 - \cos 2u) \tag{17}$$

Aby existovalo hledan v, mus bt $\cos u \geq 0$, a tedy pro u dostvm poadavek $u \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ a ze vztahu $k = 2u + 2n\pi, n \in \mathcal{Z}$ (ponkud je pozmnna definice k, vsledky se vak dky periodicit nezmn) plyne:

$$u = \begin{cases} \frac{k}{2}, k \in \langle 0, \pi \rangle \\ \frac{k}{2} - \pi, k \in (\pi, 2\pi) \end{cases},$$

v je mon dopotat ze vztahu $e^{-v} = \cos u$. Tmto jsem ovem zskal pouze prvn odhad. Dle je mon potat zpesnn $v = v_0 + \Delta$, kde v_0 oznam zskan prvn odhad v. Lze ukzat, e bu tmto postupem dostanu konvergentn posloupnost odhad, nebo naleznu dal, dve neuvaovan, een pro $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$. Dle lze ukzat, e vlastn slo ε je men pro pr komplexn sdruench f_1, f_2 pi danm $k = f_1 + f_2$, ne pro libovoln reln pr f_1, f_2 pi tomt k.

Ve uveden postup je dle mon zobecnit pro $r > 2$. V tomto ppad dostvm z rovnice (1) nsledujc typy rovnic:

Jestlie nejsou v r-tici $(m_1, \ldots, m_r)$ dn sousedc indexy, zskvm

$$2\varepsilon a(m_1, \ldots, m_r) + \sum_{i=1}^{r} [a(m_1, \ldots, m_i + 1, \ldots, m_r) + \tag{18}$$

$$a(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_r) - 2a(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_r)] = 0$$

Jestlie $m_{k+1} = m_k + 1$, ostatn nesoused:

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon a(m_1,\ldots,m_r) + \sum_{i=1, i\neq k, i\neq k+1}^{r} [a(m_1,\ldots,m_i+1,\ldots,m_r) + \\
a(m_1,\ldots,m_i-1,\ldots,m_r) - 2a(m_1,\ldots,m_i,\ldots,m_r)] + \\
a(m_1,\ldots,m_k-1,m_k+1,\ldots,m_r) + a(m_1,\ldots,m_k,m_k+2,\ldots,m_r) - \\
2a(m_1,\ldots,m_k,m_k+1,\ldots,m_r) = 0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Podobn rovnice lze odvodit pro dal ppady vce sousedcch index. Nyn zobecnm ansatz (7) na nsledujc tvar:

$$a(m_1,\ldots,m_r) = \sum_{P\in S_r} \exp\{i[\sum_{k=1}^{r} f_{P(k)} m_k + 1/2 \sum_{k<l} \phi_{P(k),P(l)}]\} \qquad (20)$$

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{r} (1 - \cos f_k) \qquad (21)$$

Tmto ansatzem jsou opt splnny vechny rovnice tvaru (18) identicky. Zbyl rovnice opt pevedu vhodnou definic $a(m_1,\ldots,m_k,m_k,\ldots,m_r)$, $\forall m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots < m_r$, splujc

$$
\begin{aligned}
a(m_1,\ldots,m_k,m_k,\ldots,m_r) + a(m_1,\ldots,m_k+1,m_k+1,\ldots,m_r) - \\
2a(m_1,\ldots,m_k,m_k+1,\ldots,m_r) = 0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

na formln tvar rovnic (18). Zbv splnit (22). Toho lze doshnout vhodnou volbou fz $\phi_{k,l}$:

$$2\cot\frac{\phi_{k,l}}{2} = \cot\frac{f_k}{2} - \cot\frac{f_l}{2},\ -\pi \leq \phi_{k,l} \leq \pi \qquad (23)$$

Dle m bt splnna podmnka periodicity (2). Rozepsnm tto podmnky pi ansatzu (20) a vyuitm $\phi_{k,l} = -\phi_{l,k}$ lze podobn jako pro $r = 2$ dospt k podmnce na f_i, $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$:

$$nf_i = 2\pi\lambda_i + \sum_{k=1}^{r} \phi_{i,k},\ \lambda_i \in \mathcal{Z} \qquad (24)$$

Dle se lze opt omezit na $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathcal{R}$ a ukzat analogicky jako pro $r = 2$, e dostaneme pouze $\binom{n-r+1}{r}$ een. Dal een budu opt hledat s komplexnmi parametry $f_1, f_2, \ldots, f_r$.

Nech $f_k = u_k + iv_k, u_k, v_k \in \mathcal{R}$. Z (24) plyne, e pak alespo jeden $\phi_{k,l}$ m imaginrn st du n. To umouje provst prvn piblen

$$2\cot\phi_{k,l} = \cot f_k/2 - \cot f_l/2 = -2i \qquad (25)$$

Oproti ppadu r=2 nyn pedpokldm een f_k v ponkud obecnj podob, oznaovan jako vlnov komplex s m vlnami

$$\cot f_\kappa/2 = a - i\kappa,\ \kappa = -(m-1), -(m-3), \ldots, m-1 \tag{26}$$

Dle je mon ze vztahu $\cot(u+iv) = \frac{\sin u - i \sinh v}{\cosh v - \cos u}$ najt

$$\frac{\sin u_\kappa}{\cosh v_\kappa - \cos u_\kappa} = a \tag{27}$$

$$\frac{\sinh v_\kappa}{\cosh v_\kappa - \cos u_\kappa} = \kappa \tag{28}$$

a u_κ, v_κ nalzt:

$$u_\kappa = \arctan \frac{2a}{a^2+\kappa^2-1}, v_\kappa = \arg\tanh \frac{2\kappa}{a^2+\kappa^2+1} \tag{29}$$

Opt zavedu oznaen $k = \sum_\kappa f_\kappa = \sum_\kappa u_\kappa$ Pak je mon vyjdit po prav $a = m \cot k/2$ a najt vlastn slo pslun danmu vlnovmu komplexu

$$\varepsilon_m = 1/m(1 - \cos k) \tag{30}$$

Lze ukzat, e pro pevn dan k je toto vlastn slo nejmen pro vlnov komplex o r vlnch a e pro vechny vlnov komplexy je pslun vlastn hodnota men ne pro ppad $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{R}$. Dle je mon provst vahy analogick ppadu $r = 2$ ohledn dalho piblen a celkovho potu nalezench een. Po proveden tchto vah lze dospt k zvru, e tmto postupem lze nalzt vechna (ve smyslu linern nezvisl) een.

3 Souvislost Betheho lohy a spinovho hamiltoninu

V tto kapitole chci ukzat souvislost mezi lohou eenou Bethem a modernjm pohledem (pouitm napklad v [2]) vyuvajcm takzvan spinov hamiltonin cyklickho etzku n stic, co je opertor na prostoru $C^2 \otimes C^2 \otimes \cdots \otimes C^2$ tvaru

$$H = -1/2 J \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta \sigma_z^j \sigma_z^{j+1} \tag{31}$$

kde $\sigma_i^j = I \otimes I \otimes \cdots \otimes \sigma_i \otimes \cdots \otimes I$, I je identick opertor, σ_i je Pauliho matice, v definici vystupujc na j-tm mst, Δ a J dan konstanty. Pitom pedpokldm cyklinost etzku, tj. opertor σ_i^{n+1} definuji roven σ_i^1.

Nyn em lohu nalzt vlastn sla a vlastn vektory tohoto hamiltoninu. Uki, e tuto lohu je mon pro uritou speciln hodnotu parametru Δ pevst na lohu eenou v [1]. Vyjdu z toho, e opertor celkov hodnoty z-tov komponenty spinu

$$S_z = \hbar/2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \tag{32}$$

komutuje s hamiltoninem (31).

Dkaz:

$$[S_z, H] = [\hbar/2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j, -1/2J \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \Delta \sigma_z^j \sigma_z^{j+1}] =$$

$$-1/4J\hbar(\sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^{j+1} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^j \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} \sigma_z^{j+1} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} -$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} \sigma_z^j - \sum_{j=1}^{n} \sigma_x^j \sigma_x^{j+1} \sigma_z^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} \sigma_z^j - \sum_{j=1}^{n} \sigma_y^j \sigma_y^{j+1} \sigma_z^{j+1}) =$$

$$1/4\hbar J\{\sum_{j=1}^{n} i\sigma_y^j \sigma_x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n} i\sigma_x^j \sigma_y^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} i\sigma_x^j \sigma_y^{j+1} - \sum_{j=1}^{n} i\sigma_y^j \sigma_x^{j+1}\} = 0$$

kde jsem vyuil komutanch vlastnost σ-matic ($[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ a vlastnosti tensorovho souinu $\forall A, B \in \mathcal{L}(C^2) : [A \otimes I, I \otimes B] = 0$.

Z tto komutativity plyne, e lze it opertor H na vlastn podprostory opertoru S_z. (Nebo, jestlie V_λ je vlastn podprostor odpovdajc vlastnmu slu λ opertoru S_z, pak $(S_z H)V_\lambda = (HS_z)V_\lambda = \lambda H V_\lambda \Longrightarrow (S_z - \lambda I)HV_\lambda = 0 \Longrightarrow HV_\lambda \subset V_\lambda$ a tedy lze zit, opertory H a S_z maj spolen vlastn vektory).

Nyn urm vlastn sla a vlastn vektory opertoru S_z. To lze nejlpe udlat, zapi-li opertor S_z v bzi prostoru dimenze 2^n definovan takto:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\eta_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\eta_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\cdots \\
\eta_{2^N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

tj. η_j m $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ na pozicch, na nich je v binrnm zpisu sla j-1 slice 1 , na mstech odpovdajcch 0 v binrnm zpisu je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dle postupuji indukc podle hodnoty parametru n (tj. potu stic). Pro $n = 1$ plat $S_z = \hbar/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tato matice m vlastn sla $\pm\hbar/2$ a p-slun vlastn vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pro indukn krok n-1 $\longrightarrow$ n plat z definice opertoru S_z a tensorovho souinu $S_z = \hbar/2\sigma_z \otimes I^{(n-1)} + I \otimes S_z^{(n-1)}$, kde $S_z^{n-1} = \hbar/2\sum_{j=1}^{n-1}\sigma_z^{(j)(n-1)}$, opertory s hornm indexem (n-1) zna opertory na prostoru dimenze 2^{n-1}, tj. odpovdajc $n-1$ sticm. Pedpokldm, e matice opertoru $S_z^{(n-1)}$ je diagonln, $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \hbar$ a λ_k, kde $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, je vlastn slo $S_z^{(n-1)}$ s nsobnost $\binom{n-1}{k}$ (tyto pedpoklady jsou opodstatnny tm, e pro n=1 jsou splnny, dle je zahrnuji do induknho pedpokladu). Matici opertoru S_z uvauji rozdlenou na 4 tvercov bloky. Z induknho pedpokladu vidm, e pouze diagonln bloky jsou nenulov. V hornm bloku m opertor S_z tvar $S_z^{(n-1)} + \hbar/2I$ a tedy $\lambda_k + \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k}$ nsobnm vlastnm slem v tomto bloku. V dolnm bloku m opertor S_z tvar $S_z^{(n-1)} - \hbar/2I$ a tedy $\lambda_k - \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k}$ nsobnm vlastnm slem v dolnm bloku. Celkem slo $\lambda_k + \hbar/2$ je $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ nsobnm vlastnm slem opertoru S_z, $\lambda_{n-1} - \hbar/2$ je jednonsobnm vlastnm slem S_z. Souasn je vidt, e rozdl po sob jdoucch vlastnch sel opertoru S_z je opt $\hbar$. Tmto je indukn krok proveden.

Jednotliv vlastn podprostory opertoru S_z oznam V_k (tj. V_k odpovd vlastnmu slu $\lambda_k = \hbar/2(n-2k)$).

Nyn provedu zen opertoru H na jednotliv vlastn podprostory opertoru S_z. Pitom vyuvm platnosti nsledujcho vztahu (lze jej ovit pmm dosazenm) :

$$\sigma_x^k\sigma_x^{k+1} + \sigma_y^k\sigma_y^{k+1} = 2(\sigma_+^k\sigma_-^{k+1} + \sigma_-^k\sigma_+^{k+1}),$$

kde $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

σ_+^k, σ_-^k jsou opt definovny pomoc tensorovho souinu (stejn jako σ_x^k atd.). Hamiltonin H tedy mohu pepsat :

$$H = -J/2\sum_{j=1}^{n} 2(\sigma_+^k\sigma_-^{k+1} + \sigma_-^k\sigma_+^{k+1}) + \sigma_z^k\sigma_z^{k+1}. \tag{33}$$

Je vidt, e pro $k = 0$ je dim $V_0 = 1$, a tedy po zen pmo dostvm vlastn vektor opertoru H

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Podobn vsledek lze zskat pro $k = n$.

Nyn zm H na podprostor V_1 odpovdajc vlastnmu slu opertoru S_z $\lambda_1 = \hbar/2(n-2)$. Z ve odvozench vlastnost vlastnch sel vm, e dim $V_1 = n$ a volm bzi :

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\cdots \\
\psi_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Snadno lze ovit, e $\psi_j \in V_1$, ψ_j tvo linern nezvisl systm o n vektorech, tedy tvo bzi prostoru V_1. Nyn najdu $H\psi_k$. Pomoc vztah

$$\sigma_+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma_-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma_-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

dostvm vztah

$$H\psi_k = -1/2J(\Delta(n-4)\psi_k + 2\psi_{k+1} + 2\psi_{k-1}). \tag{36}$$

Vlastn vektory hamiltoninu H hledm ve tvaru linern kombinace bazickch vektor

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a(k)\psi_k.$$

Takto vyjden vektor dosadm do rovnice pro vlastn vektory $E\phi = H\phi$, kde E je hledan vlastn slo, a pomoc (36) zskvm vztahy pro koeficienty a(i):

$$(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(j) = 2a(j+1) + 2a(j-1), \tag{37}$$

kde $a(0) := a(n), a(n+1) := a(1)$. Tyto vztahy je mon substituc pi $\Delta = 1$ $4\varepsilon = \frac{2E}{J} + n$ pevst na rovnice een Bethem pro r=1. Je vhodn si povimnout, e podobn vsledek dostaneme i pi zen na podprostor V_{n-1}, odpovdajc vlastnmu slu $\lambda_{n-1} = \hbar/2(2-n)$.

Analogicky lze postupovat i v ppad dalch podprostor V_k. Uki to na ppad $k = 2$, pro $k > 2$ je postup obdobn. V tomto ppad je pirozen volit bzi V_2 v nsledujc podob, indexovan dvma indexy (analogicky pro $k = 3$ 3 indexy atd.) $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i < j$:

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi_{1,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

$$\psi_{2,3} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

$$\psi_{n-1,n} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdots \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Opt, jako pro $k = 1$ lze ovit, e jsem definoval bzi. Vyjdm, jak psob hamiltonin H na bazick vektory. S pouitm definice (33) a vztah (35) dostvm vyjden:

$$(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-8))\psi_{i,j} = 2(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}), \quad \text{pro } i < j-1, |j-i| < n-1 \tag{38}$$

$$(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-4))\psi_{i,i+1} = 2\psi_{i-1,i+1} + 2\psi_{i,j+2}, \quad \text{pro } i \in \{1, \cdots, n-1\} \tag{39}$$

$$(-\frac{2H}{J} - \Delta(n-4))\psi_{1,n} = 2\psi_{2,n} + 2\psi_{n-1,n}, \tag{40}$$

kde definuji $\psi_{i,n+1} = \psi_{1,i}, \psi_{0,i} = \psi_{i,n}$.

Vlastn vektory hledm ve tvaru

$$\phi = \sum_{i<j} a(i,j)\psi_{i,j} \tag{41}$$

Dosazenm (41) do (33) , pouitm (38), (39), (40) a linern nezvislosti bazickch vektor dostvm vztahy pro koeficienty a(i,j):

$$(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-8))a(i,j) = \tag{42}$$

$$= 2(a(i,j+1) + a(i,j-1) + a(i+1,j) + a(i-1,j)), \quad \text{pro } i < j-1, |j-i| < n-1$$

$$(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(i,i+1) = 2a(i-1,i+1) + 2a(i,j+2) \quad , \quad \text{pro } i \in \{1, \cdots, n-1\} \tag{43}$$

$$(-\frac{2E}{J} - \Delta(n-4))a(1,n) = 2a(2,n) + 2a(n-1,n) \quad , \tag{44}$$

kde definuji $a(i, n+1) = a(1,i), a(0,i) = a(i,n)$. Pouitm tchto definic lze souasn rovnici (44) zahrnout do rovnic (43) jako rovnici pro $i = n$. Opt pi $\Delta = 1$ dostvm po substituci $4\varepsilon = \frac{2E}{J} + n$ rovnice een Bethem a mohu pout jeho zpsob jejich een. Stejn ansatz pro koeficienty a(i,j) lze pout i pro $\Delta \neq 1$. Potom dostvm pozmnn vztahy pro E (i ε) a i ponkud jin podmnky na $f_1, f_2, \cdots$, ovem opt jsem schopen najt nkter vlastn vektory. Pro $k > 2$ lze postupovat obdobn, pouze zskvm vce (po ve uvedenm pepisu pro $i = n$ atd. celkem k) typ rovnic, kter jsou analogick rovnicm Betheho (tj. po substituci za ε pro $\Delta = 1$ dostvm pesn rovnice Betheho).

4 Systm vce stic s interakc danou δ-funkc

V tto kapitole chci ukzat pouit Betheho metody na jin loze, ne byla pvodn, a naznait souvislost Betheho ansatzu a Yang-Baxterovch rovnic. Jedn se o kvantov mechanickou lohu nalzt vlastn funkce a vlastn sla (tj. mon hodnoty energie) hamiltoninu (45), kterou vyeil poprv C. N. Yang a strun shrnut svho postupu publikoval v [3].

Budu se zabvat jednorozmrnm systmem N stic na pmce s hamiltoninem

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2 + 2c \sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j} \delta(x_i - x_j), c \in \mathcal{R}^+ \tag{45}$$

Hledm vlastn funkce ψ (a vlastn sla E) tohoto hamiltoninu (tj. splujc $E\psi = H\psi$), piem poaduji, aby tyto funkce ψ byly spojit. lohu je mon vyeit nejdve na jednotlivch oblastech

$$G_Q = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{R}^N | x_{Q(1)} < x_{Q(2)} < \ldots < x_{Q(N)}\}, Q \in S_N$$

(S_N zna permutan grupu N prvk). Na tchto oblastech hamiltonin (45) pechz v hamiltonin N volnch stic. Pokud zvolm libovolnou n-tici sel $k_1, \ldots, k_N$, lze dosazenm snadno ovit, e na G_Q funkce $e^{i(k_{P(1)}x_{Q(1)} + \ldots + k_{P(N)}x_{Q(N)})}$ je vlastn funkc (45) pro libovolnou volbu $P \in S_N$ a pslun vlastn slo je $E = \sum_{i=1}^{N} k_i^2$. Protoe E nezvis na P, je libovoln linern kombinace

$$\sum_{P \in S_N} a(P) e^{i(k_{P(1)}x_{Q(1)} + \ldots + k_{P(N)}x_{Q(N)})}$$

opt vlastn funkc opertoru (45) na G_Q se stejnou hodnotou vlastnho sla E. Nyn provedu na zklad tchto poznatk ansatz podobn Betheho ansatzu : definuji funkci ψ pomoc definice zen ψ na jednotliv oblasti G_Q

$$\psi|_{G_Q}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{P \in S_N} [Q^{-1}, P^{-1}] e^{i(p_{P(1)}x_{Q(1)} + \ldots + p_{P(N)}x_{Q(N)})}, \tag{46}$$

kde $[Q, P]$ jsou zatm neuren komplexn konstanty, o slech $k_1, \ldots, k_N$ pedpokldm, e jsou navzjem rzn (vznam tohoto poadavku se uke pozdji, pi odvozen (47) a (48)). Tyto $[Q, P]$ je mon uspodat do matice $N! \times N!$ indexovan pomoc $Q, P \in S_N$.

Nyn urm podmnky, za kterch m takto definovan funkce na hranicch oblast limity z jedn i druh strany shodn, tj. za kterch lze spojit dodefinovat na cel prostor $\mathcal{R}^N$. Mm-li oblasti G_Q a $G_{Q'}$, kter soused, mus existovat $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ takov, e $Q' = Q * (j, j+1)$, kde $(j, j+1) \in S_N$ zna transpozici j-tho a j+1-nho prvku, $*$ zna skldn permutac (pozdji budu znak $*$ vynechvat, nebude-li hrozit chybn interpretace) definovan :

$$P, Q \in S_N, P = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ P(1) & \ldots & P(N) \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ Q(1) & \ldots & Q(N) \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow P * Q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & N \\ P(Q(1)) & \ldots & P(Q(N)) \end{pmatrix},$$

nebo za sousedc povauji takov oblasti, e existuje st nadroviny v $\mathcal{R}^N$ uren rovnic $x_j = x_{j+1}$ takov, e je soust hranice obou oblast. Aby funkce ψ bylo mon spojit dodefinovat, musm pi dosazen libovolnho vektoru $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{R}^N, x_{Q(1)} < \ldots < x_{Q(j)} = x_{Q(j+1)} < \ldots < x_{Q(N)}$ do pedpisu pro $\psi|_Q$ a $\psi|_{Q'}$ dostat stejn slo. Dky tomu, e $k_1, \ldots, k_N$ jsou navzjem rzn, je tato podmnka ekvivalentn

$$[Q, P] + [Q, P(j, j+1)] = [Q(j, j+1), P] + [Q(j, j+1), P(j, j+1)], \forall P \in S_N \quad (47)$$

Dle poaduji, aby normlov sloka derivace funkce ψ mla v bodech na hranici skok velikosti $2c\psi(x_1, \ldots, x_N)$. Tato podmnka zajiuje splnn rovnice s δ-funkc $E\psi = H\psi, E = \sum_{i=1}^{N} k_i^2$ na $\mathcal{R}^N$. Po dosazen (46) do tto podmnky dostvm

$$\begin{aligned} i(k_{P(j+1)} - k_{P(j)})([Q, P] - [Q, P(j, j+1)] + [Q(j, j+1), P] \\ -[Q(j, j+1), P(j, j+1)]) = 2c([Q, P] + [Q, P(j, j+1)]) \end{aligned} \quad (48)$$

Jestlie zavedu $x_{j,l} = \frac{ic}{k_j - k_l}$, lze podmnky (47) a (48) ekvivalentn zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} [Q(j, j+1), P] = x_{P(j),P(j+1)}[Q, P] + (1 + x_{P(j),P(j+1)})[Q, P(i, i+1)], \\ \forall Q, P \in S_N, i \in \{1, \ldots, N-1\} \end{aligned} \quad (49)$$

Tyto podmnky tvo $(N-1)(N!)^2$ rovnic pro $(N!)^2$ neznmch. Jedn se tedy o peuren systm rovnic. Otzkou je, zda m een a na kolika volnch parametrech toto een zvis (tj. kolik existuje linern nezvislch een).

Tento problm nyn pevedu na lohu ukzat o uritch opertorech, e tvo representaci permutan grupy. Chpu-li $|P^{-1}\rangle = \sum_{Q \in S_N} [Q, P] Q^{-1}$ (vhodnost definice pomoc Q^{-1} vyplyne pozdji) jako prvek grupovho okruhu, tj. vektorovho prostoru dimenze $N!$ tvoenho linernmi kombinacemi prvk S_N s distributivn operac nsoben vektor definovanou na bazickch vektorech jako v S_N, lze rovnici (49) pepsat pomoc matic $T_{j,j+1}$ ve tvaru

$$[Q(j, j+1), P] = \sum_{P' \in S_N} [Q, P'] \langle P' | T_{j,j+1} | P \rangle, \quad (50)$$

kde $T_{j,j+1}$ je definovna :

$$\langle P'|T_{j,j+1}|P\rangle = \begin{cases} x_{P(j),P(j+1)}, \ P' = P \\ 1 + x_{P(j),P(j+1)}, \ P' = P(j, j+1) \\ 0, \ P' \neq P \& P' \neq P(j, j+1) \end{cases} \tag{51}$$

Protoe $(j, j+1) * |P^{-1}\rangle = \sum_{Q\in S_N} [Q, P](j, j+1) * Q^{-1} = \sum_{Q\in S_N} [Q, P](Q * (j, j+1))^{-1} = \sum_{Q\in S_N} [Q(j, j+1), P]Q^{-1}$, lze (50) pepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} (j, j+1) * |P^{-1}\rangle = \sum_{Q\in S_N} [Q(j, j+1), P]Q^{-1} = \\ \sum_{Q\in S_N} \{x_{P(j),P(j+1)}[Q, P] + (1 + x_{P(j),P(j+1)})[Q, P(j, j+1)]\}Q^{-1} = \\ x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + (1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1))^{-1}\rangle = \\ \sum_{P'\in S_N} \langle P'|T_{j,j+1}|P\rangle|P^{-1}\rangle = \\ T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle. \end{aligned} \tag{52}$$

Uki, e $T_{j,j+1}$ tvo representaci permutan grupy. K tomu posta ukzat, e jsou splnny relace

$$T_{j,j+1}T_{j,j+1} = I, \tag{53}$$

kde I je identick opertor, a

$$T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1} = T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}. \tag{54}$$

Nejprve ovm podmnku (53)

$$\begin{aligned} T_{j,j+1}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = T_{j,j+1}(x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + \\ (1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1))^{-1}\rangle) = x^2_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + \\ x_{P(j),P(j+1)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1))^{-1}\rangle + \\ x_{P(j+1),P(j)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1))^{-1}\rangle + \\ (1 + x_{P(j+1),P(j)})(1 + x_{P(j),P(j+1)})|P^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle, \end{aligned}$$

dky $x_{P(j+1),P(j)} = -x_{P(j),P(j+1)}$.

Relaci (54) lze dokzat vyjdenm

$$\begin{aligned} T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle \quad = \\ T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}(x_{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle + (1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1))^{-1}\rangle) = \\ \ldots = x_{P(j),P(j+2)}(1 + x_{P(j+1),P(j+2)}x_{P(j),P(j+1)})|P^{-1}\rangle + \\ x_{P(j),P(j+2)}x_{P(j+1),P(j+2)}(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(j, j+1)^{-1}\rangle + \\ x_{P(j),P(j+1)}x_{P(j),P(j+2)}(1 + x_{P(j+1),P(j+2)})|(P(j+1, j+2))^{-1}\rangle + \\ (1 + x_{P(j),P(j+1)})(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j+1),P(j+2)})|(P(j, j+2))^{-1}\rangle + \\ x_{P(j),P(j+1)}(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j+1),P(j)})|(P(123))^{-1}\rangle + \\ x_{P(j+1),P(j+2)}(1 + x_{P(j),P(j+2)})(1 + x_{P(j),P(j+1)})|(P(132))^{-1}\rangle, \end{aligned}$$

Jestlie provedu tyt pravy pro $T_{j,j+1}T_{j+1,j+2}T_{j,j+1}|P^{-1}\rangle$, dostanu stejn v-sledek. Tm je dokzna relace (54) a tedy opertory $T_{j,j+1}$ tvo representaci permutan grupy. Z toho plyne, e pokud zvolm $[I,P], \forall P \in S_N$, mohu definovat $[Q,P]$ tm, e permutaci Q rozlom na souin transpozic a opakovan pouiji (50) jako definice pro uren $[Q'(j,j+1),P]$ z $[Q',P]$. Protoe $T_{j,j+1}$ tvo representaci permutan grupy, nebude tato definice $[Q,P]$ zvisl na volb rozkladu Q na transpozice, kter nen uren jednoznan. Souasn je vidt, e tmto jsou splnny rovnice (50), protoe pi volb rozkladu $Q(j,j+1)$ je mon rozloit Q a pak vynsobenm (j,j+1) zskat rozklad $Q(j,j+1)$ a tedy vzhledem k definici $[Q,P]$ je (50) splnna. Dle vidm, e een (49) zvis na N! volnch parametrech.

Pro dal vpoty se ukazuje jako praktitj msto opertor $T_{j,j+1}$ pouvat opertory $Y_{j,j+1}$ definovan takto

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = \frac{(j,j+1) - x_{P(j),P(j+1)}I}{1 + x_{P(j),P(j+1)}} * |P^{-1}\rangle, \tag{55}$$

co lze dky splnn (52) pst tak ve tvaru

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = |(P(j,j+1))^{-1}\rangle. \tag{56}$$

Dle je mon zavst oznaen pro speciln prvky grupovho okruhu

$$Y_{j,j+1}^{i,k} = \frac{(j,j+1) - x_{i,k}I}{1 + x_{i,k}} \tag{57}$$

a psoben opertor $Y_{j,j+1}$ zapsat pomoc $Y_{j,j+1}^{i,k}$

$$Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y_{j,j+1}^{P(j),P(j+1)}|P^{-1}\rangle \tag{58}$$

Souasn je vidt, e opertory $Y_{j,j+1}$ opt tvo representaci permutan grupy, nebo

$$Y_{j,j+1}Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y_{j,j+1}|(P(j,j+1))^{-1}\rangle = |(P(j,j+1)(j,j+1))^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle$$
$$\Rightarrow Y_{j,j+1}Y_{j,j+1} = I$$

$$Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}|P^{-1}\rangle = Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}|(P(j,j+1))^{-1}\rangle =$$
$$Y_{j,j+1}|(P(j,j+1)(j+1,j+2))^{-1}\rangle = |(P(j,j+1)(j+1,j+2)(j,j+1))^{-1}\rangle =$$
$$|(P(j+1,j+1)(j,j+1)(j+1,j+2))^{-1}\rangle = Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}|P^{-1}\rangle$$
$$\Rightarrow Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1} = Y_{j+1,j+2}Y_{j,j+1}Y_{j+1,j+2}$$

Dle lze tyto vztahy pepsat pro vektory (prvky grupovho okruhu) $Y_{j,j+1}^{i,k}$. Uvdomm-li si toti, jak opertory $Y_{j,j+1}$ psob, a pepi to pomoc $Y_{j,j+1}^{i,k}$, dostvm vztahy

$$Y_{j,j+1}^{i,k}Y_{j,j+1}^{k,i} = I \tag{59}$$

$$Y^{l,k}_{j,j+1}Y^{i,k}_{j+1,j+2}Y^{i,l}_{j,j+1} = Y^{i,l}_{j+1,j}Y^{i,k}_{j,j+1}Y^{l,k}_{j+1,j+2}, \tag{60}$$

pro libovoln $j \in \{1, \ldots, N-2\}$ a $i, k, l \in \{1, \ldots, N\}$. Rovnice (60) vyjaduje dosti obecn tvar Yang-Baxterovy rovnice. Souasn nm tento zpsob jejho odvozen poskytuje nkter jej een zvisl na parametrech $k_1, \ldots, k_N$.

V pedchozm odstavci jsem ukzal, jak lze pomoc Betheho ansatzu najt nkter een parciln diferenciln rovnice $E\psi = H\psi$, ovem zatm jsem nebral v vahu okrajov podmnky. Nyn budu uvaovat tut lohu, ovem s okrajovou podmnkou danou poadavkem periodicity een s periodou L. Mm-li G_Q oblast pslunou permutaci Q a C permutaci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & N-1 & N \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & N & 1 \end{pmatrix}$, pak poaduji

$$\begin{gathered} \psi|_Q(x_{Q(1)}, \ldots, x_{Q(N)}) = \psi|_{QC}(x_{Q(2)}, \ldots, x_{Q(N)}, x_{Q(1)+L}), \\ \forall(x_{Q(1)}, \ldots, x_{Q(N)}),\ x_{Q(1)} < \ldots < x_{Q(N)},\ x_{Q(N)} - x_{Q(1)} < L \end{gathered} \tag{61}$$

Tuto podmnku lze dosadit do (46) a odvodit dal vztahy, kter maj $[Q, P]$ splovat:

$$[Q, P] = [QC, PC]e^{ik_{P}(1)L} \tag{62}$$

Po pepsn pomoc vektor $|P^{-1}\rangle$ dostvm podmnk$\Gamma\sqcap \Leftarrow\not\propto\Rightarrow \sqsubseteq\rceil \sqcup\sqsubseteq\dashv\nabla\sqcap$

$$C|(PC)^{-1}\rangle = |P^{-1}\rangle e^{ik_{P}(1)L} \tag{63}$$

Dle vyjdm pomoc $C = (1, N)(1, N-1) \ldots (1, 3)(1, 2)$ a vztahu (56)

$$|(PC)^{-1}\rangle = Y_{N1,N} \ldots Y_{2,3}Y_{1,2}|P^{-1}\rangle,$$

pepi pomoc rovnost

$$(m, n)Y^{l,k}_{j,j+1} = Y^{l,k}_{j,j+1}(m, n), \forall n, m < j,$$

$$(j-1, j)Y^{l,k}_{j,j+1} = Y^{l,k}_{1,j+1}(j-1, j)$$

plynoucch z definice $Y^{l,k}_{j,j+1}$ a dostvm :

$$\begin{aligned} C|(PC)^{-1}\rangle &= CY^{P(1),P(5)}_{N-1,N} \ldots Y^{P(1),P(3)}_{2,3}Y^{P(1),P_2}_{1,2}|P^{-1}\rangle = \\ &= (1, N)Y^{P(1),P(5)}_{1,N} \ldots (1, 3)Y^{P(1),P(3)}_{1,3}(1, 2)Y^{P(1),P(2)}_{1,2}|P^{-1}\rangle \end{aligned} \tag{64}$$

Dosadm do (63) a vynsobm zleva P:

$$\begin{aligned} P|P^{-1}\rangle e^{-ik_{P}(1)L} &= P(1, N)Y^{P(1),P(5)}_{1,N} \ldots (1, 3)Y^{P(1),P(3)}_{1,3}(1, 2)Y^{P(1),P(2)}_{1,2}|P^{-1}\rangle \\ &= (P(1), P(N))Y^{P(1),P(N)}_{P(1),P(N)} \ldots (P(1), P(2))Y^{P(1),P(2)}_{P(1),P(2)}P|P^{-1}\rangle, \end{aligned} \tag{65}$$

kde jsem vyuil rovnost $(P(j), P(j+1))P = P(j, j+1)$. Nyn mohu definovat vektory $X_{j,l}$ z grupovho okruhu permutan grupy S_N

$$X_{j,l} = (j, l) * Y^{j,l}_{j,l} = \frac{1 - (j, l)x_{j,l}}{1 + x_{j,l}} \tag{66}$$

a (65) pepsat do tvaru

$$P|P^{-1}\rangle e^{-ik_{P}(1)L} = X_{P(1),P(N)}\dots X_{P(1),P(3)}X_{P(1),P(2)}P|P^{-1}\rangle. \tag{67}$$

O vektorech $X_{j,l}$ je mon ukzat, e spluj obdobn vztahy jako $Y^{i,k}_{j,j+1}$:

$$X_{j,l}X_{l,j} = I, \tag{68}$$

$$X_{j,k}X_{i,k}X_{i,j} = X_{i,j}X_{i,k}X_{j,k} \tag{69}$$

$$X_{i,j}X_{k,l} = X_{k,l}X_{i,j}, \forall i,j,k,l \text{ navzjem rzn} \tag{70}$$

Rovnice (69) je opt je jednm z monch tvar Yang-Baxterovy rovnice. Dle lze definovat Z_P

$$Z_P = X_{P(2),P(1)}X_{P(3),P(1)}\dots X_{P(N),P(1)} \tag{71}$$

a pepsat (67) ve tvaru

$$Z_P P|P^{-1}\rangle = e^{ik_P(1)L}P|P^{-1}\rangle \tag{72}$$

Pomoc (69),(70) lze ukzat rovnost

$$Z_{P(i,i+1)} = X_{P(i),P(i+1)}Z_P X^{-1}_{P(i),P(i+1)}, \ \forall i > 1 \tag{73}$$

Odsud plyne: Jestlie $|P^{-1}\rangle$ vyhovuje rovnici (72), pak

$$\begin{aligned} &Z_{P(i,i+1)}P(i,i+1)|(P(i,i+1))^{-1}\rangle = \\ &X_{P(i),P(i+1)}Z_P X^{-1}_{P(i)P(i+1)}P(i,i+1)|(P(i,i+1))^{-1}\rangle \\ &= X_{P(i),P(i+1)}Z_P P|P^{-1}\rangle = e^{ik_P(1)L}X_{P(i),P(i+1)}P|P^{-1}\rangle \\ &= e^{ik_P(1)L}|(P(i,i+1))^{-1}\rangle. \end{aligned} \tag{74}$$

Co znamen, e je-li (72) splnna pro $|P^{-1}\rangle$, pak je splnna i pro $|(P(j,j+1))^{-1}\rangle$, kde $j > 1$. Rovnice (72) je tedy vlastn systmem N (nikoliv tedy $N!$) rovnic. een tchto rovnic, kter je mimo tma tto prce, lze najt napklad v [3].

5 Zvr

Nakonec bych rd strun shrnul vhody, kter Betheho ansatz poskytuje. V ppad pvodn lohy umouje zapsat obecn tvar hledanch vlastnch vektor jako funkci potu stic n, i kdy ne vdy je mon provst vpoet koeficient tchto vektor a do konce (viz napklad hledn een ϕ rovnice (11) pro dan λ_1, λ_2). Ovem pi klasickm pstupu z linern algebry by se podobn zpis explicitn zvisejc na n zskval jen obtn, pokud by se to vbec podailo. Zvltn vznam m tento zpis pro zkoumn energetickch hladin danho systmu, tj. monch vlastnch sel, speciln zkladn energetick hladiny (nejmenho vlastnho sla), nebo umouje provst fyzikln dleitou limitu pro $n \to \infty$. Tuto limitu provedli C.N. Yang a C.P. Yang v letech 1966-1967 a postup a vsledky publikovali postupn v nkolika lncich, napklad v [2].

V jinch lohch umonil Betheho ansatz vrazn zjednoduen hledn jejich een. V nkterch ppadech byl dle zobecnn (napklad exponenciln funkci soutu vce promnnch v jeho definici lze nahradit souinem zpotku neurench funkc jednotlivch promnnch), a dnes se lze setkat s Betheho ansatzem ve formulacch jen velmi vzdlen pipomnajcch pvodn tvar (7).

Odkazy

[1] H. Bethe: Zur Theorie der Metalle, Zeitschrift fr Physik 71,205 (1931)

[2] C.N. Yang, C.P. Yang: One-Dimensional Chain of Anisotropic Spin-Spin Interactions, Physical Review 150,321 (1966)

[3] C.N. Yang: Some Exact Results for Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction, Physical Review Letters 19,No.23,1312 (1967)

[4] M. Gaudin: La fonction d'onde de Bethe, Masson,Paris,1983 (rusk peklad, Mir, Moskva 1987)

Obsah