

Příklad 2.1: Ukažte, že pro Blochův vektor \vec{R} platí $|\vec{R}|^2 < 1$.

V důkazu použijeme vztahy (2.23) na straně 39 a vlastnosti statistického operátoru, zejména $Tr \hat{\rho} = 1$.

$$|R|^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = (2Re[\rho_{12}])^2 + (2Im[\rho_{12}])^2 + (\rho_{22} - \rho_{11})^2 =$$

$$4 \underbrace{((Re[\rho_{12}])^2 + (Im[\rho_{12}])^2)}_{|\rho_{12}|^2} + \rho_{22}^2 - 2\rho_{22}\rho_{11} + \rho_{11}^2 = 4|\rho_{12}|^2 + \underbrace{(\rho_{11} + \rho_{22})^2}_1 - 4\rho_{22}\rho_{11} =$$

$$1 - 4(\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2)$$

Matice $\hat{\rho}$ popisující libovolný stav dvouhladinového systému je pozitivně semidefinitní \Rightarrow
 $(\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2) \geq 0$
 Odkud dostáváme:

$$|R|^2 = 1 - 4 \underbrace{(\rho_{22}\rho_{11} - |\rho_{12}|^2)}_{\geq 0} \Rightarrow |R|^2 \leq 1$$

Rovnost nastává v případě čistého stavu.