Příklad 2.11: Proveďte odvození výrazu (2.105).

Výchozí vztahy ze skript (2.78) a (2.79):

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{P}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\Big)^2 + \omega_{21}^2\Big]\overrightarrow{P} = -2\omega_{21}\frac{|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E}N \tag{2}$$

dále předpokládejme rovinnou vlnu, která je v rezonanci a platí $\omega = \omega_{21}$ a zároveň $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$ a $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}$.
Odvození provedeme úpravami rovnice (2)

$$\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2^2} + \omega^2\Big]\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t} = -2\omega\frac{|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}N$$

$$\Big[\Big(\frac{\partial\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}}{\partial t}\Big)^2 + 2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}}{T_2} + \frac{\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}}{T_2^2} + \omega^2\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}\Big] = -2\omega\frac{|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}N$$

$$\Big[(i\omega)^2\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t} + 2i\omega\frac{\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}}{T_2} + \frac{\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}}{T_2^2} + \omega^2\overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}\Big] = -2\omega\frac{|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}N \Big/ \frac{T_2}{e^{i\omega t}}$$

$$\Big[-\omega^2\overrightarrow{P_0}T_2 + 2i\omega\overrightarrow{P_0} + \frac{\overrightarrow{P_0}}{T_2} + \omega^2\overrightarrow{P_0}T_2\Big] = -2\omega\frac{T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E_0}N$$

$$(2i\omega + \frac{1}{T_2})\overrightarrow{P_0} = -2\omega\frac{T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}\overrightarrow{E_0}N$$

$$\overrightarrow{P_0} = -\frac{2\omega T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar(2i\omega + \frac{1}{T_2})}\overrightarrow{E_0}N$$

Což je hledaný vztah (2.105).

Příklad 2.12: Odvoďte výraz (2.110).

Vyjdeme ze vztahu (2.80) a předpokladů, že rozdíl populace enegetických hladin N není funkcí času a $\omega \gg \frac{1}{T_2}$. Opět platí $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}(\overrightarrow{E^*} = \overrightarrow{E_0}e^{-i\omega t})$ a $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_0}e^{i\omega t}$.

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\Big)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\Big[\overrightarrow{E}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\Big)\overrightarrow{P^*} + \overrightarrow{E^*}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\Big)\overrightarrow{P}\Big]$$

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega}\Big[\overrightarrow{E}\Big(-i\omega + \frac{1}{T_2}\Big)\overrightarrow{P^*} + \overrightarrow{E^*}\Big(i\omega + \frac{1}{T_2}\Big)\overrightarrow{P}\Big]$$

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega}\Big[\overrightarrow{E}(-i\omega)\Big(\frac{2\omega T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar(2i\omega)}\overrightarrow{E^*}N\Big) + \overrightarrow{E^*}(i\omega)\Big(-\frac{2\omega T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar(2i\omega)}\overrightarrow{E}N\Big)\Big]$$

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega}\Big[-2|\overrightarrow{E}|^2\frac{\omega T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar}N\Big]$$

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = -|\overrightarrow{E}|^2 \frac{T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}{\hbar^2} N$$

Intenzitu optického záření můžeme napsat jako $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c|\overrightarrow{E}|^2$ a zavedeme-li saturační intenzitu vytahem

$$I_s = \frac{c}{2}\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{T_1 T_2|\overrightarrow{d_{21}}|^2}$$

Dosazením posledních dvou vztahů do odvozeného výrazu a jeho úpravou dostáváme

$$(N - N_0) = -\frac{2I}{\varepsilon_0 c}\frac{\varepsilon_0 c}{2I_s} N$$

$$N + N\frac{I}{I_s} = N_0$$

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$