Fyzika laserů – cvičení

Převod řídící rovnice z interakční do Schrödingerovy reprezentace

J. Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické

27. února 2008

Řídící rovnice ve interakční reprezentaci

$$\frac{\Delta \hat{\varrho}_S^I}{\Delta t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\} \tag{1}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Vyjdeme z transormačního vztahu:

$$\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\,\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Vyjdeme z transormačního vztahu:

$$\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Provedeme derivací podle času – derivace součinu. První člen:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}{\partial t}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Vyjdeme z transormačního vztahu:

$$\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\,\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Provedeme derivací podle času – derivace součinu. První člen:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}{\partial t}\,\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

- Derivace exponenciely $+\ \mathrm{i}$ do jmenovatele:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_S\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\,\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Vyjdeme z transormačního vztahu:

$$\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Provedeme derivací podle času – derivace součinu. První člen:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}{\partial t}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

- Derivace exponenciely $+$ i do jmenovatele:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_S\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

- Stejně ostatní členy $+$ využijeme vztah pro $\hat{\varrho}_S^S(t)$

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_S\hat{\varrho}_S^S(t) + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\frac{\partial\hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{\varrho}_S^S(t)\hat{H}_S$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Vyjdeme z transormačního vztahu:

$$\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Provedeme derivací podle času – derivace součinu. První člen:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}{\partial t}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

- Derivace exponenciely $+$ i do jmenovatele:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_S\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} + \dots$$

- Stejně ostatní členy $+$ využijeme vztah pro $\hat{\varrho}_S^S(t)$

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_S\hat{\varrho}_S^S(t) + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\frac{\partial\hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{\varrho}_S^S(t)\hat{H}_S$$

- První a poslední člen tvoří komutátor. Tedy:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\frac{\partial\hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t} \, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Za $\partial \hat{\varrho}_S^I(t)/\partial t$ dosadíme z řídící rovnice v interakční reprezentaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} &= -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \Big\{ \Big(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \Big) w_{ij}^+ - \\ &\quad - \Big(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \Big) w_{ji}^- \Big\} \end{aligned}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] + \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Za $\partial\hat{\varrho}_S^I(t)/\partial t$ dosadíme z řídící rovnice v interakční reprezentaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = & -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right. \\ & \left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\} \end{aligned}$$

- Dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = & \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \\ & - \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \left[\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\} \right] \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - $$
$$-\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^S\right)w_{ij}^+ - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\left(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \\ -\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\Big[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\Big\{\Big(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^S\Big)w_{ij}^+ - \\ -\Big(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\Big)w_{ji}^-\Big\}\Big]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Vzhledem k $\delta(\omega_i+\omega_j)$ bude $\omega_i+\omega_j=0$, tedy $\exp[\mathrm{i}(\omega_i+\omega_j)(t-t_0)]=1$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \\ -\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\Big[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\Big\{\Big(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^S\Big)w_{ij}^+ - \\ -\Big(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\Big)w_{ji}^-\Big\}\Big]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Vzhledem k $\delta(\omega_i+\omega_j)$ bude $\omega_i+\omega_j=0$, tedy $\exp\left[\mathrm{i}(\omega_i+\omega_j)(t-t_0)\right]=1$
- Každý $\hat{Q}_i^S$, $\hat{Q}_j^S$ tak můžeme násobit $\exp\left[\mathrm{i}\omega_{i,j}(t-t_0)\right]$ a přejít k $\hat{Q}_i^I$, $\hat{Q}_j^I$

$$\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_i+\omega_j)(t-t_0)}\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i(t-t_0)}\hat{Q}_i^S\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j(t-t_0)}\hat{Q}_j^S = \hat{Q}_i^I(t-t_0)\hat{Q}_j^I(t-t_0)$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - $$
$$-\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^S\right)w_{ij}^+ - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Vzhledem k $\delta(\omega_i+\omega_j)$ bude $\omega_i+\omega_j=0$, tedy $\exp\left[\mathrm{i}(\omega_i+\omega_j)(t-t_0)\right]=1$
- Každý $\hat{Q}_i^S$, $\hat{Q}_j^S$ tak můžeme násobit $\exp\left[\mathrm{i}\omega_{i,j}(t-t_0)\right]$ a přejít k $\hat{Q}_i^I$, $\hat{Q}_j^I$

$$\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_i+\omega_j)(t-t_0)}\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i(t-t_0)}\hat{Q}_i^S\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j(t-t_0)}\hat{Q}_j^S = \hat{Q}_i^I(t-t_0)\hat{Q}_j^I(t-t_0)$$

- Dostaneme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - $$
$$-\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^I\hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^I\right)w_{ij}^+ - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\hat{Q}_i^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I\hat{Q}_i^I\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)\right] -$$

$$-\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^I\hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^I\right)w_{ij}^+ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\hat{Q}_i^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I\hat{Q}_i^I\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)\right] - \\ -\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^I\hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^I\right)w_{ij}^+ - \right.\right. \\ \left.\left. -\left(\hat{Q}_i^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I\hat{Q}_i^I\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Mezi operátory $\hat{Q}_i^I$, $\hat{Q}_j^I$ a $\hat{\varrho}_S^I(t)$ v kulatých závorkách vložíme výraz

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = 1$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)\right] - \\ -\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\left[\sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\left\{\left(\hat{Q}_i^I\hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^I\right)w_{ij}^+ - \right.\right. \\ \left.\left. -\left(\hat{Q}_i^I\hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^I\hat{Q}_i^I\right)w_{ji}^-\right\}\right]\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Mezi operátory $\hat{Q}_i^I$, $\hat{Q}_j^I$ a $\hat{\varrho}_S^I(t)$ v kulatých závorkách vložíme výraz

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = 1$$

- Např. pro člen $\hat{Q}_i^I\hat{Q}_j^I\hat{\varrho}_S^I(t_0)$ v 1. kulaté závorce dostaneme:

$$\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_i^I\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_j^I\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\times \\ \times\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t_0)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_i^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_j^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \times$$

$$\times\, e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t_0) e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}^I_i e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}^I_j e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \times \\ \times e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}^I_S(t_0) e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Přejdeme k Schrödingerově reprezentaci $\hat{Q}^S_i$, $\hat{Q}^S_j$ a $\hat{\varrho}^S_S(t)$:

$$\underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}^I_i e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{Q}^S_i} \underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}^I_j e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{Q}^S_j} \times \\ \times \underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}^I_S(t_0) e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{\varrho}^S_S(t)} = \hat{Q}^S_i \hat{Q}^S_j \hat{\varrho}^S_S(t)$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

- Máme:

$$e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_i^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_j^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \times$$
$$\times\, e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t_0)e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}$$

- Přejdeme k Schrödingerově reprezentaci $\hat{Q}_i^S$, $\hat{Q}_j^S$ a $\hat{\varrho}_S^S(t)$:

$$\underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_i^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{Q}_i^S} \underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{Q}_j^I e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{Q}_j^S} \times$$
$$\times\, \underbrace{e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{\varrho}_S^I(t_0)e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{\varrho}_S^S(t)} = \hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^S(t)$$

- To provedeme pro všechny členy. Dostaneme:

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\times$$
$$\times\left\{\left(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}_S^S(t)\hat{Q}_i^S\right)w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}_S^S(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t)\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\right)w_{ji}^-\right\}$$