Fyzika laserů – cvičení

Klasická teorie interakce látky a záření

J. Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické

18. března 2008

Model prostředí

- Uvažujme jednoduchý případ homogenního dielektrika, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá polarizaci molekul prostředí

Model prostředí

- Uvažujme jednoduchý případ homogenního dielektrika, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá polarizaci molekul prostředí
- Pod vlivem vnějšího pole vlny dochází k posunu elektronů, molekula se polarizuje a získává dipólový moment

$$\vec{p} = e\vec{r}$$

Model prostředí

- Uvažujme jednoduchý případ homogenního dielektrika, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá polarizaci molekul prostředí
- Pod vlivem vnějšího pole vlny dochází k posunu elektronů, molekula se polarizuje a získává dipólový moment

$$\vec{p} = e\vec{r}$$

- V případě homogenního dielektrika obsahuje jednotka objemu N molekul, takže pro vektor objemové hustoty polarizace platí

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

Model prostředí

- Uvažujme jednoduchý případ homogenního dielektrika, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá polarizaci molekul prostředí
- Pod vlivem vnějšího pole vlny dochází k posunu elektronů, molekula se polarizuje a získává dipólový moment

$$\vec{p} = e\vec{r}$$

- V případě homogenního dielektrika obsahuje jednotka objemu N molekul, takže pro vektor objemové hustoty polarizace platí

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

- Valenční elektrony poutá k atomům (nebo molekulám) elastická vratná síla $(-m_e\omega_0^2 r)$ úměrná výchylce elektronu z rovnovážné polohy

Model prostředí

- Uvažujme jednoduchý případ homogenního dielektrika, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá polarizaci molekul prostředí
- Pod vlivem vnějšího pole vlny dochází k posunu elektronů, molekula se polarizuje a získává dipólový moment

$$\vec{p} = e\vec{r}$$

- V případě homogenního dielektrika obsahuje jednotka objemu N molekul, takže pro vektor objemové hustoty polarizace platí

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

- Valenční elektrony poutá k atomům (nebo molekulám) elastická vratná síla $(-m_e\omega_0^2 r)$ úměrná výchylce elektronu z rovnovážné polohy
- Atom považujeme za klasický oscilátor nucených kmitů, jež jsou udržovány střídavým polem $\vec{E}$ působícím ve směru $\vec{r}$:

$$\vec{F}_e = q_e\vec{E}(t) = q_e\vec{E}_0\cos(\omega t)$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron

- Pohybová rovnice

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m_e \omega_0^2 \vec{r} = q_e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron

- Pohybová rovnice

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m_e \omega_0^2 \vec{r} = q_e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

- Předpokládejme, že kmity elektronu jsou totožné s kmity pole $E(t)$; můžeme tedy hledat řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron

- Pohybová rovnice

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m_e \omega_0^2 \vec{r} = q_e \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

- Předpokládejme, že kmity elektronu jsou totožné s kmity pole $E(t)$; můžeme tedy hledat řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t$$

- Dostáváme:

$$\vec{r}(t) = \frac{q_e}{m_e} \frac{\vec{E}(t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Polarizace prostředí a susceptibilita

- Polarizace prostředí

$$\vec{P} = q_e \vec{r} N = \frac{q_e^2 N}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

Polarizace prostředí a susceptibilita

- Polarizace prostředí

$$\vec{P} = q_e \vec{r} N = \frac{q_e^2 N}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

- Přitom $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Tedy:

$$\chi = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 \vec{E}} = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Polarizace prostředí a susceptibilita

- Polarizace prostředí

$$\vec{P} = q_e \vec{r} N = \frac{q_e^2 N}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

- Přitom $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Tedy:

$$\chi = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 \vec{E}} = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- Index lomu $n^2(\omega) = 1 + \chi$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}$$

Polarizace prostředí a susceptibilita

- Polarizace prostředí

$$\vec{P} = q_e \vec{r} N = \frac{q_e^2 N}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

- Přitom $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Tedy:

$$\chi = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 \vec{E}} = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- Index lomu $n^2(\omega) = 1 + \chi$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}$$

- Z výrazu pro $n^2(\omega)$ vyplývá, že pro $\omega_0 \to \omega$ by $n^2(\omega)$ rostlo nade všechny meze, což je v rozporu se skutečností. Byl zanedbán ten fakt, že mezi atomy a molekuly v důsledku těsné blízkosti nastává silná interakce, jež se projevuje ve formě „tření“, které způsobuje tlumení oscilátorů a disipaci jejich energie v látce ve formě tepla (molekulární pohyb), a tím i omezení růstu $n^2(\omega)$ na konečnou hodnotu i pro $\omega_0 = \omega$.

Pohybová rovnice pro vázaný elektron s tlumením

- V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem **Drude-Lorentze**, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více tlumených lineárních oscilátorů, jež odpovídají normálním kmitům elektronů v molekule.

Pohybová rovnice pro vázaný elektron s tlumením

- V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem **Drude-Lorentze**, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více tlumených lineárních oscilátorů, jež odpovídají normálním kmitům elektronů v molekule.
- Pohybová rovnice pro jeden oscilátor při respektování útlumu „tření“ vznikajícího v důsledku vzájemné interakce molekul

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_d(t)$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron s tlumením

- V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem **Drude-Lorentze**, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více tlumených lineárních oscilátorů, jež odpovídají normálním kmitům elektronů v molekule.
- Pohybová rovnice pro jeden oscilátor při respektování útlumu „tření“ vznikajícího v důsledku vzájemné interakce molekul

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_d(t)$$

- $\vec{E}_d(t)$ je celková intenzita elektrického pole působícího na dipól

$$\vec{E}_d(t) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron s tlumením

- V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem **Drude-Lorentze**, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více tlumených lineárních oscilátorů, jež odpovídají normálním kmitům elektronů v molekule.
- Pohybová rovnice pro jeden oscilátor při respektování útlumu „tření“ vznikajícího v důsledku vzájemné interakce molekul

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_d(t)$$

- $\vec{E}_d(t)$ je celková intenzita elektrického pole působícího na dipól

$$\vec{E}_d(t) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

- Bude-li časová závislost všech veličin harmonická, dostaneme po dosazení a po vynásobení obou stran rovnice součinitelem Ne

$$\left(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu + \omega_0^2\right)\vec{P} = \frac{e^2N}{m}\vec{E} + \frac{1}{3}\frac{e^2N}{m\varepsilon_0}\vec{P}$$

Pohybová rovnice pro vázaný elektron s tlumením

- V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem **Drude-Lorentze**, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více tlumených lineárních oscilátorů, jež odpovídají normálním kmitům elektronů v molekule.
- Pohybová rovnice pro jeden oscilátor při respektování útlumu „tření“ vznikajícího v důsledku vzájemné interakce molekul

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\nu\frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2\vec{r} = e\vec{E}_d(t)$$

- $\vec{E}_d(t)$ je celková intenzita elektrického pole působícího na dipól

$$\vec{E}_d(t) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

- Bude-li časová závislost všech veličin harmonická, dostaneme po dosazení a po vynásobení obou stran rovnice součinitelem Ne

$$\left(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu + \omega_0^2\right)\vec{P} = \frac{e^2N}{m}\vec{E} + \frac{1}{3}\frac{e^2N}{m\varepsilon_0}\vec{P}$$

- Dostáváme:

$$\vec{P} = \frac{e^2N}{m}\frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2N}{m\varepsilon_0}}$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

- Posun frekvence oscilátoru

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

- Posun frekvence oscilátoru

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$$

- Susceptibilita:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu} = \frac{\omega_p^2\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\omega\nu}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2}$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

- Posun frekvence oscilátoru

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$$

- Susceptibilita:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu} = \frac{\omega_p^2\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\omega\nu}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2}$$

- Označme $\Delta\omega = \tilde{\omega}_0 - \omega$:

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2 = \left(\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}_0^2 + 2\tilde{\omega}_0\Delta\omega - \Delta\omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

- Posun frekvence oscilátoru

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$$

- Susceptibilita:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu} = \frac{\omega_p^2\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\omega\nu}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2}$$

- Označme $\Delta\omega = \tilde{\omega}_0 - \omega$:

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2 = \left(\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}_0^2 + 2\tilde{\omega}_0\Delta\omega - \Delta\omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2$$

- Zanedbáme $\Delta\omega$ oproti ω a předpokládáme, že $\omega^2 \sim \tilde{\omega}_0^2 \sim \omega\tilde{\omega}_0$

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2 \doteq 4\tilde{\omega}_0^2\Delta\omega^2 + \omega^2\nu^2 \doteq 4\tilde{\omega}_0^2(\Delta\omega^2 + \nu^2/4) \doteq 4\omega\tilde{\omega}_0(\Delta\omega^2 + \nu^2/4)$$

Susceptibilita

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, tedy:

$$\chi = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0}}$$

- Posun frekvence oscilátoru

$$\tilde{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} = \omega_0^2 - \frac{1}{3}\omega_p^2$$

- Susceptibilita:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\nu} = \frac{\omega_p^2\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2\omega\nu}{\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2}$$

- Označme $\Delta\omega = \tilde{\omega}_0 - \omega$:

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2 = \left(\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}_0^2 + 2\tilde{\omega}_0\Delta\omega - \Delta\omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2$$

- Zanedbáme $\Delta\omega$ oproti ω a předpokládáme, že $\omega^2 \sim \tilde{\omega}_0^2 \sim \omega\tilde{\omega}_0$

$$\left(\tilde{\omega}_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\nu^2 \doteq 4\tilde{\omega}_0^2\Delta\omega^2 + \omega^2\nu^2 \doteq 4\tilde{\omega}_0^2(\Delta\omega^2 + \nu^2/4) \doteq 4\omega\tilde{\omega}_0(\Delta\omega^2 + \nu^2/4)$$

- Potom:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{2\tilde{\omega}_0}\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^2 + \nu^2/4} + \mathrm{i}\frac{\omega_p^2}{2\tilde{\omega}_0}\frac{\nu/2}{\Delta\omega^2 + \nu^2/4}$$