Vztah 3.34 Odvoďte vztah

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{\mathcal{E}\mathcal{P}_2}{\hbar} \tag{1}$$

Vyjdeme z rovnice pro inverzi populace hladin (2.72)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}. \tag{2}$$

upravíme pravou stranu s využitím přiblížení (3.20)

$$\frac{\partial P}{\partial t} \simeq -\mathcal{P}_1\omega SIN + \mathcal{P}_2\omega COS, \tag{3}$$

kde jsme označili $SIN = \sin(\omega t - kz + \phi(z,t))$ a $COS = \cos(\omega t - kz + \phi(z,t))$. Dále využijeme $T_2 \gg \omega^{-1}$, čili členy $\frac{1}{T_2}$ zanedbáme, pravou stranu můžeme napsat ve tvaru:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\mathcal{P} \simeq -\mathcal{P}_1\omega SIN + \mathcal{P}_2\omega COS. \tag{4}$$

Rovnici 4 vynásobíme $E = \mathcal{E}\cos(\omega t - kz + \phi(z,t))$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\mathcal{P} = -\mathcal{P}_1\mathcal{E}\omega SIN\,COS + \mathcal{P}_2\mathcal{E}\omega COS\,COS. \tag{5}$$

Člen $SINCOS \sim \frac{1}{2}sin(2\Upsilon)$ - jen vysokofrekvenčni složky a $COSCOS \sim \frac{1}{2}cos(2\Upsilon) + \frac{1}{2}$ - vysokofrekvenčni složky se stejnosmernou složkou. Vysokofrekvenční složky zanedbáme (rovnice 2 popisuje relativne pomalé změny inverze populace hladin, je možné při středování v čase srovnatelném s $T_1 \sim 10^{-6}$ s zanedbat rychle se měnící příspěvky). Uvažováním jen stejnosměrné složky $\frac{1}{2}$ a srovnáním levé strany rovnice 2 s 5 získáme 1:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{\mathcal{E}\mathcal{P}_2}{\hbar} \tag{6}$$