3 Poloklasický popis šíření optických impulzů v rezonančním prostředí

3.1 Příklad [1, 60, část 3.3, DC 3.1]

Odvoďte výrazy [1, 60, (3.46)]

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = gI$$

a [1, 60, (3.47)]

$$g = \frac{\mathrm{g}_0}{1 + \frac{I}{\mathrm{I_s}}}.$$

Řešení. Rovnici [1, 60, (3.45)]

$$\frac{\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\epsilon_0 \omega_{21} \mathrm{c} \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{2\hbar} T_2 N_0 \frac{E(z)}{1 + \frac{\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar} T_1 T_2 E^2(z)},$$

zjednodušíme zavedením substitucí $\tilde{\mathrm{C}}_1 = \frac{\epsilon_0 \omega_{21} \mathrm{c} \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{2\hbar} T_2 N_0$ a $\tilde{\mathrm{C}}_2 = \frac{\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar} T_1 T_2$ na

$$\frac{\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\tilde{\mathrm{C}}_1 E(z)}{1 + \tilde{\mathrm{C}}_2 E^2(z)}. \tag{3.1}$$

Při první metodě

- nejprve položíme $\tilde{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\mathrm{c}\epsilon_0$, $\mathrm{C} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{c}\epsilon_0}}$
- a zavedeme substituci $I(z) = \tilde{\mathrm{C}} E^2(z)$, respektive $E(z) = \mathrm{C}\sqrt{I(z)}$, přičemž $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}\tilde{\mathrm{C}}_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{c}}{2\epsilon_0}} \frac{\mu_0 \omega_{21} \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar} T_2 N_0$ a $\mathrm{C}_2 = \frac{\tilde{\mathrm{C}}_2}{\tilde{\mathrm{C}}} = \frac{2\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\mathrm{c}\epsilon_0 \hbar^2} T_1 T_2$

$$\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}\sqrt{I(z)}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{C}_1 \sqrt{I(z)}}{1 + \mathrm{C}_2 I(z)},$$

- zderivujeme $\frac{\mathrm{d}\sqrt{I(z)}}{\mathrm{d}z}$ podle věty o složené funkci

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{I(z)}}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}I^{-\frac{1}{2}}(z)\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2\sqrt{I(z)}}\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}$$

- a dosadíme

$$\frac{C}{2\sqrt{I(z)}}\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{C}_1\sqrt{I(z)}}{1+\mathrm{C}_2I(z)},$$

- zjednodušíme substitucí $\mathrm{C}_3 = \frac{2\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}} = \frac{\mu_0\omega_{21}\mathrm{c}\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar}T_2N_0$ a upravíme

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{C}_3I(z)}{1+\mathrm{C}_2I(z)}$$

U druhé jednodušší a chytřejší metody

- rovnici (3.1) vynásobíme činitelem $2E(z)$

$$2E(z)\frac{\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\tilde{\mathrm{C}}_1E^2(z)}{1+\tilde{\mathrm{C}}_2E^2(z)},$$

- na pravé straně jsme »vykouzlili« derivaci $\frac{\mathrm{d}E^2(z)}{\mathrm{d}z}$, provedeme substituci $E^2(z) = \frac{1}{\tilde{\mathrm{C}}}I(z)$, přičemž $\mathrm{C}_1 = \frac{\tilde{\mathrm{C}}_1}{\tilde{\mathrm{C}}}$ a $\mathrm{C}_2 = \frac{\tilde{\mathrm{C}}_2}{\tilde{\mathrm{C}}} = \frac{2\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\mathrm{c}\epsilon_0\hbar^2}T_1T_2$

$$\frac{2E(z)\mathrm{d}E(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}E^2(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\tilde{\mathrm{C}}}\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\tilde{\mathrm{C}}_1I(z)}{\tilde{\mathrm{C}}\left(1+\mathrm{C}_2I(z)\right)},$$

- poslední rovnost vynásobíme $\tilde{\mathrm{C}}$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2\tilde{\mathrm{C}}_1I(z)}{1+\mathrm{C}_2I(z)}$$

- a docházíme k závěru, že mezi substitučními konstantami platí $\mathrm{C}_3 = 2\tilde{\mathrm{C}}_1$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{C}_3I(z)}{1+\mathrm{C}_2I(z)}.$$

Pokud dále definujeme účinný průřez pro stimulovanou emisi σ a saturační intenzitu I_s

$$\sigma = \frac{\mu_0 \omega_{21} c \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar} T_2, \qquad I_s = \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_{21}}{\sigma T_1}$$

a zavedeme-li

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I(z)}{I_s}},$$

kde $g_0 = \sigma N_0$. Potom

- platí $C_2 = \frac{1}{I_s}$

$$\frac{1}{I_s} = \frac{2\sigma T_1}{\hbar \omega_{21}} = \frac{2\mu_0 c \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 = \frac{2\left|\vec{d}_{21}\right|^2}{c \epsilon_0 \hbar^2} T_1 T_2 = C_2,$$

  kde jsme použili vztah $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$,

- a $g_0 = C_1$

$$g_0 = \sigma N_0 = \frac{\mu_0 \omega_{21} c \left|\vec{d}_{21}\right|^2}{\hbar} T_2 N_0 = C_3,$$

- takže po dosazení

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{g_0 I(z)}{1 + \frac{I(z)}{I_s}} = g I(z).$$