1.2 Příklad [1, 27, část 1.4.1, DC 1.7]

Odvoďte postupně [1, 26, (1.76), (1.77) a (1,78)] a dosazením do rovnice [1, 26, (1.75)]

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l,m,n} \left(\delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \left(\left(\delta_{lm} \left|k\right\rangle \left\langle n\right| \hat{\varrho}_S^I \left|m\right\rangle \left\langle n\right| \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \right) w^+_{klmn} - \left(\left|k\right\rangle \left\langle l\right| \hat{\varrho}_S^I \left|m\right\rangle \left\langle n\right| \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I \left|m\right\rangle \left\langle l\right| \right) w^-_{mnkl} \right)\right) \tag{1.1}$$

nalezněte výsledný tvar řídicí rovnice [1, 27, (1.79)].

Řešení. Díky δ-funkci $\delta(\omega_{kl} + \omega_{mn})$ budou v sumě na pravé straně rovnice (1.1) přispívat jen sčítance pro něž je splněna podmínka $\omega_{kl} + \omega_{mn} = 0$. Tu lze rozepsat pomocí rovnice $\hbar\omega_{pq} = E_p - E_q$ v energiích $E_k - E_l + E_m - E_n = 0$. Vyloučíme-li případ $E_k + E_m = E_l + E_n$ máme v případě nedegenerovaného spektra tři podmínky pro indexy

1. $k = n, l = m, k \neq l$,
2. $k = l, m = n, k \neq m$ a
3. $k = l = m = n$.

V prvním případě

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = -\sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \left(\left(\left|k\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I - \left|l\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \right) \omega^+_{kllk} - \left(\left|k\right\rangle \left\langle l\right| \hat{\varrho}_S^I \left|l\right\rangle \left\langle k\right| - \hat{\varrho}_S^I \left|l\right\rangle \left\langle l\right| \right) \omega^-_{lkkl} \right) = \dots$$

- upravíme a zjednodušíme

$$\dots = \sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \left(\left|l\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \omega^+_{kllk} + \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \hat{\varrho}_S^I \left|l\right\rangle \left\langle k\right| \omega^-_{lkkl} - \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \omega^+_{kllk} - \hat{\varrho}_S^I \left|l\right\rangle \left\langle l\right| \omega^-_{lkkl} \right) = \dots$$

- u vybraných členů provedeme záměnu indexů

$$\dots = \sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \left(\left|l\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \omega^+_{kllk} + \left|l\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle l\right| \omega^-_{kllk} - \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \hat{\varrho}_S^I \omega^+_{kllk} - \hat{\varrho}_S^I \left|k\right\rangle \left\langle k\right| \omega^-_{kllk} \right) = \dots$$

- zavedeme $\omega_{lk} = \omega^{+}_{kllk} + \omega^{-}_{kllk}$

$$\ldots = \sum_{\substack{k,l\\k\neq l}} \left(|l\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle l|\, \omega_{lk} - |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S \omega^{+}_{kllk} - \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{-}_{kllk} \right).$$

Ve druhém případě

$$\frac{\partial \hat{\varrho}^{I(2)}_S}{\partial t} = -\sum_{\substack{k,m\\k\neq m}} \left(\Big(\underbrace{\delta_{km}}_{=0} |k\rangle\langle m|\, \hat{\varrho}^I_S - |m\rangle\langle m|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k| \Big) \omega^{+}_{kkmm} - \Big(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |m\rangle\langle m| - \underbrace{\delta_{mk}}_{=0} \hat{\varrho}^I_S\, |m\rangle\langle k| \Big) \omega^{-}_{mmkk} \right) = \ldots$$

- zjednodušíme

$$\ldots = \sum_{\substack{k,m\\k\neq m}} \left(|m\rangle\langle m|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{+}_{kkmm} + |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |m\rangle\langle m|\, \omega^{-}_{mmkk} \right) = \ldots$$

- přeindexujeme $l = m$

$$\ldots = \sum_{\substack{k,l\\k\neq l}} \left(|l\rangle\langle l|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{+}_{kkll} + |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |l\rangle\langle l|\, \omega^{-}_{llkk} \right) = \ldots$$

- u vybraných členů provedeme záměnu indexů a upravíme

$$\ldots = \sum_{\substack{k,l\\k\neq l}} \left(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |l\rangle\langle l|\, \omega^{+}_{llkk} + |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |l\rangle\langle l|\, \omega^{-}_{llkk} \right) = \sum_{\substack{k,l\\k\neq l}} \left(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |l\rangle\langle l| \left(\omega^{+}_{llkk} + \omega^{-}_{llkk} \right) \right).$$

V třetím případě

$$\frac{\partial \hat{\varrho}^{I(3)}_S}{\partial t} = -\sum_{k} \left(\Big(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S - |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k| \Big) \omega^{+}_{kkkk} - \Big(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k| - \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k| \Big) \omega^{-}_{kkkk} \right) = \ldots$$

- upravíme

$$\ldots = \sum_{k} \left(|k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{+}_{kkkk} + |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{-}_{kkkk} - |k\rangle\langle k|\, \hat{\varrho}^I_S \omega^{+}_{kkkk} - \hat{\varrho}^I_S\, |k\rangle\langle k|\, \omega^{-}_{kkkk} \right) = \ldots$$

- a zjednodušíme

$$\ldots = \sum_k \left(|k\rangle \langle k| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle \langle k| \left(\omega_{kkkk}^+ + \omega_{kkkk}^- \right) - |k\rangle \langle k| \hat{\varrho}_S^I \omega_{kkkk}^+ - \hat{\varrho}_S^I |k\rangle \langle k| \omega_{kkkk}^- \right).$$

Celkově

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(i)}}{\partial t} = \sum_{k,l} \left(|l\rangle \langle k| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle \langle l| \omega_{lk} - |k\rangle \langle k| \hat{\varrho}_S^I \omega_{kllk}^+ - \hat{\varrho}_S^I |k\rangle \langle k| \omega_{kllk}^- \right) + \sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}} \left(|k\rangle \langle k| \hat{\varrho}_S^I |l\rangle \langle l| \left(\omega_{llkk}^+ + \omega_{llkk}^- \right) \right).$$

Poslední případ je započítán spolu s prvním do jediné sumy.

Reference

[1] M. Vrbová, J. Šulc: *Interakce rezonančního záření s látkou* (Nakladatelství ČVUT, 2006)

[2] conVERTER - převody jednotek
http://www.converter.cz/