Fyzika laserů – cvičení

Řídící rovnice pro tlumený lineární harmonický oscilátor

J. Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické

16. února 2023

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dynamická soustava – lineární harmonický oscilátor (LHO)
  Např. jeden mód elektromagnetického pole

$$\hat{H}_S \equiv \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}\,, \quad \text{kde} \quad \omega_c \quad \text{je vlastní frekvence LHO} \tag{1}$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$

$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dynamická soustava – lineární harmonický oscilátor (LHO)
  Např. jeden mód elektromagnetického pole

$$\hat{H}_S \equiv \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}\,, \quad \text{kde} \quad \omega_c \quad \text{je vlastní frekvence LHO} \tag{1}$$

- Tlumící systém – soustava mnoha LHO v termodynamické rovnováze
  Např. fonony mřížky matrice laserového krystalu při dané teplotě

$$\hat{H}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j\,, \quad \text{kde} \quad \omega_j \quad \text{jsou frekvence jednotlivých módů} \tag{2}$$

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dynamická soustava – lineární harmonický oscilátor (LHO)
  Např. jeden mód elektromagnetického pole

$$\hat{H}_S \equiv \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}\,, \quad \text{kde} \quad \omega_c \quad \text{je vlastní frekvence LHO} \tag{1}$$

- Tlumící systém – soustava mnoha LHO v termodynamické rovnováze
  Např. fonony mřížky matrice laserového krystalu při dané teplotě

$$\hat{H}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j\,, \quad \text{kde} \quad \omega_j \quad \text{jsou frekvence jednotlivých módů} \tag{2}$$

- Interakční Hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right), \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty} \tag{3}$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- Interakční Hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right) , \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty}$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- Interakční Hamiltonián
$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right), \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty}$$
- $\hat{a}^\dagger$ – kreační operátor zvyšuje počet bosonů:
$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \left(\langle n | \hat{a}^\dagger = \langle n-1 | \sqrt{n} \right)$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- Interakční Hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right), \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty}$$

- $\hat{a}^\dagger$ – kreační operátor zvyšuje počet bosonů:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a}^\dagger = \langle n-1|\sqrt{n} \right)$$

- $\hat{a}$ – anihilační operátor počet bosonů snižuje:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a} = \langle n+1|\sqrt{n+1} \right)$$

- Interakční Hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right), \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty}$$

- $\hat{a}^\dagger$ – kreační operátor zvyšuje počet bosonů:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a}^\dagger = \langle n-1|\sqrt{n} \right)$$

- $\hat{a}$ – anihilační operátor počet bosonů snižuje:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a} = \langle n+1|\sqrt{n+1} \right)$$

- Působení $\hat{V}$ na stavy LHO $|n\rangle$ a tlumícího systému $|\{n_\lambda\}\rangle$

$$\hat{b}_l^\dagger \hat{a}|n\rangle|\{n_\lambda\}\rangle = \hat{b}_l^\dagger \hat{a}|n\rangle|n_1\rangle \ldots |n_l\rangle \ldots |n_\infty\rangle = \sqrt{n(n_l+1)}|n-1\rangle|n_1\rangle \ldots |n_l+1\rangle \ldots |n_\infty\rangle$$

$$\hat{b}_l \hat{a}^\dagger|n\rangle|\{n_\lambda\}\rangle = \hat{b}_l \hat{a}^\dagger|n\rangle|n_1\rangle \ldots |n_l\rangle \ldots |n_\infty\rangle = \sqrt{(n+1)n_l}|n+1\rangle|n_1\rangle \ldots |n_l-1\rangle \ldots |n_\infty\rangle$$

Tlumený lineární harmonický oscilátor

- Interakční Hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right), \quad \text{kde} \quad \kappa_j \quad \text{jsou vazební konstanty}$$

- $\hat{a}^\dagger$ – kreační operátor zvyšuje počet bosonů:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a}^\dagger = \langle n-1|\sqrt{n}\right)$$

- $\hat{a}$ – anihilační operátor počet bosonů snižuje:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \left(\langle n|\hat{a} = \langle n+1|\sqrt{n+1}\right)$$

- Působení $\hat{V}$ na stavy LHO $|n\rangle$ a tlumícího systému $|\{n_\lambda\}\rangle$

$$\hat{b}_l^\dagger \hat{a}|n\rangle|\{n_\lambda\}\rangle = \hat{b}_l^\dagger \hat{a}|n\rangle|n_1\rangle \dots |n_l\rangle \dots |n_\infty\rangle = \sqrt{n(n_l+1)}|n-1\rangle|n_1\rangle \dots |n_l+1\rangle \dots |n_\infty\rangle$$

$$\hat{b}_l \hat{a}^\dagger|n\rangle|\{n_\lambda\}\rangle = \hat{b}_l \hat{a}^\dagger|n\rangle|n_1\rangle \dots |n_l\rangle \dots |n_\infty\rangle = \sqrt{(n+1)n_l}|n+1\rangle|n_1\rangle \dots |n_l-1\rangle \dots |n_\infty\rangle$$

- Uvažujeme tedy vzájemnou výměnu právě jednoho kvanta energie mezi LHO a l-tým módem rezervoáru

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] = \delta_{kl}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad \langle n_k|m_l\rangle = \delta_{kl}\delta_{n_k m_l}$$

Interakční Hamiltonián

- Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right)$$

Interakční Hamiltonián

- Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right)$$

- Najdeme vyjádření operátorů $\hat{F}_i$, $\hat{Q}_i$, aby $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$

$$\hat{Q}_1 = \hat{a}^\dagger \qquad \hat{F}_1 = \sum_l \kappa_l \hat{b}_l \tag{4}$$

$$\hat{Q}_2 = \hat{a} \qquad \hat{F}_2 = \sum_l \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \tag{5}$$

Interakční Hamiltonián

- Interakční hamiltonián
$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right)$$
- Najdeme vyjádření operátorů $\hat{F}_i$, $\hat{Q}_i$, aby $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
$$\hat{Q}_1 = \hat{a}^\dagger \qquad \hat{F}_1 = \sum_l \kappa_l \hat{b}_l \tag{4}$$
$$\hat{Q}_2 = \hat{a} \qquad \hat{F}_2 = \sum_l \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \tag{5}$$
- Přejdeme do interakční reprezentace (viz další slaid...)
$$\hat{Q}_1^{\mathcal{I}} = \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c (t-t_0)} \qquad \hat{F}_1^{\mathcal{I}} = \sum_l \kappa_l \hat{b}_l \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l (t-t_0)} \tag{6}$$
$$\hat{Q}_2^{\mathcal{I}} = \hat{a} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c (t-t_0)} = \hat{Q}_1^{\mathcal{I}\dagger} \qquad \hat{F}_2^{\mathcal{I}} = \sum_l \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l (t-t_0)} \tag{7}$$

- Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_l \left(\kappa_l \hat{b}_l \hat{a}^\dagger + \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a} \right)$$

- Najdeme vyjádření operátorů $\hat{F}_i$, $\hat{Q}_i$, aby $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$

$$\hat{Q}_1 = \hat{a}^\dagger \qquad \hat{F}_1 = \sum_l \kappa_l \hat{b}_l \tag{4}$$

$$\hat{Q}_2 = \hat{a} \qquad \hat{F}_2 = \sum_l \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \tag{5}$$

- Přejdeme do interakční reprezentace (viz další slaid...)

$$\hat{Q}_1^{\mathcal{I}} = \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c (t-t_0)} \qquad \hat{F}_1^{\mathcal{I}} = \sum_l \kappa_l \hat{b}_l \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l (t-t_0)} \tag{6}$$

$$\hat{Q}_2^{\mathcal{I}} = \hat{a} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c (t-t_0)} = \hat{Q}_1^{\mathcal{I}\dagger} \qquad \hat{F}_2^{\mathcal{I}} = \sum_l \kappa_l^* \hat{b}_l^\dagger \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l (t-t_0)} \tag{7}$$

- Potřebné spektrální hustoty rezervoáru určíme integrací

$$w_{ij}^{+} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_j \right\rangle_R d\tau \,, \quad w_{ji}^{-} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_j \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R d\tau$$

$\tau = t - t_0$, $\omega_1 = \omega_c$, $\omega_2 = -\omega_c$

Přechod do interakční reprezentace

- Provedeme pro $\hat{a}$ – ostatní jsou obdobné. Výchozí vztah:

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^{\dagger}\hat{a}\hat{U} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{a}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_S(t-t_0)}$$

Přechod do interakční reprezentace

- Provedeme pro $\hat{a}$ – ostatní jsou obdobné. Výchozí vztah:

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)} \hat{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)}$$

- Unitární operátory $\hat{U}$, $\hat{U}^\dagger$ rozložíme do Taylorovy řady. Využijeme tvar hamiltoniánu systému $\hat{H}_s = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Např.:

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\hat{a}^\dagger \hat{a}} = \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n, \quad \text{kde} \quad f_n = \frac{\left(-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\right)^n}{n!}$$

Přechod do interakční reprezentace

- Provedeme pro $\hat{a}$ – ostatní jsou obdobné. Výchozí vztah:

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)} \hat{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)}$$

- Unitární operátory $\hat{U}$, $\hat{U}^\dagger$ rozložíme do Taylorovy řady. Využijeme tvar hamiltoniánu systému $\hat{H}_s = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Např.:

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n, \quad \text{kde} \quad f_n = \frac{\big(-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\big)^n}{n!}$$

- Tedy:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger \hat{a})^m \hat{a} \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n$$

Přechod do interakční reprezentace

- Provedeme pro $\hat{a}$ – ostatní jsou obdobné. Výchozí vztah:

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)} \hat{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)}$$

- Unitární operátory $\hat{U}$, $\hat{U}^\dagger$ rozložíme do Taylorovy řady. Využijeme tvar hamiltoniánu systému $\hat{H}_s = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Např.:

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\hat{a}^\dagger \hat{a}} = \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n, \quad \text{kde} \quad f_n = \frac{\left(-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\right)^n}{n!}$$

- Tedy:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger \hat{a})^m \hat{a} \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger \hat{a})^n$$

- Přitom $\hat{a}(\hat{a}^\dagger \hat{a})^n = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}$. Využijeme komutátor $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, tedy $\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger \hat{a})^m \sum_n f_n (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a})^n \hat{a}$$

Přechod do interakční reprezentace

- Provedeme pro $\hat{a}$ – ostatní jsou obdobné. Výchozí vztah:

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{a} \hat{U} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)} \hat{a} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_s(t-t_0)}$$

- Unitární operátory $\hat{U}$, $\hat{U}^\dagger$ rozložíme do Taylorovy řady. Využijeme tvar hamiltoniánu systému $\hat{H}_s = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Např.:

$$\hat{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n, \quad \text{kde} \quad f_n = \frac{\left(-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)\right)^n}{n!}$$

- Tedy:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger\hat{a})^m \hat{a} \sum_n f_n (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n$$

- Přitom $\hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^n = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}$. Využijeme komutátor $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, tedy $\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger\hat{a})^m \sum_n f_n (1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})^n \hat{a}$$

- Opět sečteme řady a dostaneme hledaný výsledek:

$$\hat{a}(t) = \sum_m f_m^* (\hat{a}^\dagger\hat{a})^m \sum_n f_n (1+\hat{a}^\dagger\hat{a})^n \hat{a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c \hat{a}^\dagger\hat{a}(t-t_0)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(1+\hat{a}^\dagger\hat{a})(t-t_0)} \hat{a} = \hat{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c(t-t_0)}$$

Korelační funkce

- Příklad výpočtu korelační funkce:

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \hat{b}_l^\dagger \sum_m \kappa_m \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R$$

Korelační funkce

- Příklad výpočtu korelační funkce:

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \hat{b}_l^\dagger \sum_m \kappa_m \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R$$

- Rezervoár v termodynamické rovnováze

$$\left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{\{n_\lambda\}} \langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_R}}{Z} | \{n_\lambda\} \rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \underbrace{\langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m | \{n_\lambda\} \rangle}_{\delta_{lm} n_l} \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} =$$

Statistický operátor rezervoáru

- Rezervoár v term. rovnováze:

$$\hat{\varrho}_R = \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_R}}{Z}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Statistický operátor rezervoáru

- Rezervoár v term. rovnováze:

$$\hat{\varrho}_R = \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_R}}{Z}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

- Hamiltonián

$$\hat{H}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \,, \quad \text{kde} \quad \omega_j \quad \text{jsou frekvence jednotlivých módů}$$

Statistický operátor rezervoáru

- Rezervoár v term. rovnováze:

$$\hat{\varrho}_R = \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_R}}{Z}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

- Hamiltonián

$$\hat{H}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \,, \quad \text{kde} \quad \omega_j \quad \text{jsou frekvence jednotlivých módů}$$

- Vlastní stavy a jejich energie:

$$\hat{H}_R |\{n_\lambda\}\rangle = E_{\{n_\lambda\}} |\{n_\lambda\}\rangle, \quad \text{kde} \quad E_{\{n_\lambda\}} = \sum_l \hbar\omega_l n_l = \sum_l E_{n_l}$$

Statistický operátor rezervoáru

- Rezervoár v term. rovnováze:

$$\hat{\varrho}_R = \frac{\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_R}}{Z}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

- Hamiltonián

$$\hat{H}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j\,, \quad \text{kde} \quad \omega_j \quad \text{jsou frekvence jednotlivých módů}$$

- Vlastní stavy a jejich energie:

$$\hat{H}_R|\{n_\lambda\}\rangle = E_{\{n_\lambda\}}|\{n_\lambda\}\rangle, \quad \text{kde} \quad E_{\{n_\lambda\}} = \sum_l \hbar\omega_l n_l = \sum_l E_{n_l}$$

- Partiční funkce

$$Z = \mathrm{Tr}_R\left\{\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_R}\right\} = \sum_{\{n_\lambda\}} \langle\{n_\lambda\}|\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_R}|\{n_\lambda\}\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} =$$

$$= \prod_l \sum_{n_l} \mathrm{e}^{-\beta E_{n_l}} = \prod_l Z_l$$

Partiční funkce

$$\sum_{\{n_\lambda\}} n_l \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_l} \sum_{n_{l+1}} \cdots \sum_{n_\infty} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots - \lambda_{l-1} n_{l-1} - \lambda_l n_l - \lambda_{l+1} n_{l+1} \cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

Partiční funkce

$$\sum_{\{n_\lambda\}} n_l \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_l} \sum_{n_{l+1}} \cdots \sum_{n_\infty} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots - \lambda_{l-1} n_{l-1} - \lambda_l n_l - \lambda_{l+1} n_{l+1} \cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

$$= \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_{l+1}} \cdots \sum_{n_\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots - \lambda_{l-1} n_{l-1} - \lambda_{l+1} n_{l+1} \cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

Partiční funkce

$$\sum_{\{n_\lambda\}} n_l \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_l} \sum_{n_{l+1}} \cdots \sum_{n_\infty} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots - \lambda_{l-1} n_{l-1} - \lambda_l n_l - \lambda_{l+1} n_{l+1} \cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

$$= \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-1}} \sum_{n_{l+1}} \cdots \sum_{n_\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots - \lambda_{l-1} n_{l-1} - \lambda_{l+1} n_{l+1} \cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

$$= \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} \sum_{\{n_\lambda\}}{}' \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} Z'$$

Partiční funkce

$$\sum_{\{n_\lambda\}} n_l \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_{l-1}}\sum_{n_l}\sum_{n_{l+1}}\cdots\sum_{n_\infty} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots -\lambda_{l-1}n_{l-1} - \lambda_l n_l - \lambda_{l+1}n_{l+1}\cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

$$= \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_{l-1}}\sum_{n_{l+1}}\cdots\sum_{n_\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 n_1 \cdots -\lambda_{l-1}n_{l-1} - \lambda_{l+1}n_{l+1}\cdots - \lambda_\infty n_\infty} =$$

$$= \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} \sum_{\{n_\lambda\}}{}' \mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}} = \sum_{n_l} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} Z'$$

$$Z = Z_l Z'$$

$$\sum_{\{n_\lambda\}} n_l \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} = \sum_{n_l} n_l \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_l n_l}}{Z_l} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda_l} - 1}$$

$$Z_l = \sum_{n_l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad q = \mathrm{e}^{-\lambda_l} < 1 \right\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda_l}}$$

$$\sum_{n_l=0}^{\infty} n_l \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} = -\frac{d}{d\lambda_l} \sum_{n_l=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_l n_l} = -\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda_l}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_l}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_l}\right)^2}$$

Korelační funkce

- Příklad výpočtu korelační funkce:

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* e^{i\omega_l \tau} \hat{b}_l^\dagger \sum_m \kappa_m \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m e^{i\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R$$

- Rezervoár v termodynamické rovnováze

$$\left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{\{n_\lambda\}} \langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \frac{e^{-\beta \hat{H}_R}}{Z} | \{n_\lambda\} \rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \underbrace{\langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m | \{n_\lambda\} \rangle}_{\delta_{lm} n_l} \frac{e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} =$$

$$= \delta_{lm} \sum_{\{n_\lambda\}} n_l \frac{e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} = \delta_{lm} \sum_{n_l} n_l \frac{e^{-\beta E_{n_l}}}{Z_l} \underbrace{\frac{\sum'_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z'}}_{1} = \frac{\delta_{lm}}{e^{\lambda_l} - 1} = \bar{n}_l \delta_{lm}$$

kde

$$\lambda_l = \frac{\hbar \omega_l}{kT}$$

- Příklad výpočtu korelační funkce:

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* e^{i\omega_l \tau} \hat{b}_l^\dagger \sum_m \kappa_m \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m e^{i\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R$$

- Rezervoár v termodynamické rovnováze

$$\left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_{\{n_\lambda\}} \langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \frac{e^{-\beta \hat{H}_R}}{Z} | \{n_\lambda\} \rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \underbrace{\langle \{n_\lambda\} | \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m | \{n_\lambda\} \rangle}_{\delta_{lm} n_l} \frac{e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} =$$

$$= \delta_{lm} \sum_{\{n_\lambda\}} n_l \frac{e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z} = \delta_{lm} \sum_{n_l} n_l \frac{e^{-\beta E_{n_l}}}{Z_l} \underbrace{\frac{\sum'_{\{n_\lambda\}} e^{-\beta E_{\{n_\lambda\}}}}{Z'}}_{1} = \frac{\delta_{lm}}{e^{\lambda_l} - 1} = \bar{n}_l \delta_{lm}$$

kde

$$\lambda_l = \frac{\hbar \omega_l}{kT}$$

- Tedy:

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_1 \right\rangle_R = \sum_l |\kappa_l|^2 e^{i\omega_l \tau} \bar{n}_l$$

Korelační funkce

- Podobně další:

$$\left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{-i\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_l |\kappa_l|^2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l \tau} \bar{n}_l$$

$$\left\langle \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_1 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l \hat{b}_m \right\rangle_R = 0$$

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_2 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R = 0$$

Korelační funkce

- Podobně další:

$$\left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{-i\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_l |\kappa_l|^2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l \tau} \bar{n}_l$$

$$\left\langle \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_1 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l \hat{b}_m \right\rangle_R = 0$$

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_2 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R = 0$$

- Při výpočtu korelace s členy typu $\left\langle \hat{b}\hat{b}^\dagger \right\rangle_R$ využijeme $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$

$$\left\langle \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \right\rangle_R = \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + 1 \right\rangle_R = \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \right\rangle_R + 1 = \bar{n}_l + 1 \, .$$

- Podobně další:

$$\left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{-i\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m \right\rangle_R = \sum_l |\kappa_l|^2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l \tau} \bar{n}_l$$

$$\left\langle \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_1 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_1 \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_m \tau} \left\langle \hat{b}_l \hat{b}_m \right\rangle_R = 0$$

$$\left\langle \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_2 \right\rangle_R = \left\langle \hat{F}_2 \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R = 0$$

- Při výpočtu korelace s členy typu $\left\langle \hat{b} \hat{b}^\dagger \right\rangle_R$ využijeme $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$

$$\left\langle \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \right\rangle_R = \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + 1 \right\rangle_R = \left\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \right\rangle_R + 1 = \bar{n}_l + 1 \, .$$

- Tedy:

$$\left\langle \hat{F}_1 \hat{F}_2^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R = \left\langle \sum_l \kappa_l^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \hat{b}_l \sum_m \kappa_m \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R =$$

$$= \sum_l |\kappa_l|^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_l \tau} (\bar{n}_l + 1)$$

$$\left\langle \hat{F}_1^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_2 \right\rangle_R = \sum_{l,m} \kappa_l^* \kappa_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l \tau} \left\langle \hat{b}_l \hat{b}_m^\dagger \right\rangle_R = \sum_l |\kappa_l|^2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_l \tau} (\bar{n}_l + 1)$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Definice:

$$w_{ij}^{+} = \int_0^\infty e^{i\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau)\hat{F}_j \right\rangle_R d\tau \,, \quad w_{ji}^{-} = \int_0^\infty e^{i\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_j \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R d\tau$$

- Definice:

$$w_{ij}^{+} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau) \hat{F}_j \right\rangle_R d\tau \,, \quad w_{ji}^{-} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i \tau} \left\langle \hat{F}_j \hat{F}_i^{\mathcal{I}}(\tau) \right\rangle_R d\tau$$

- Po dosazení pro $i, j = \{1, 2\}$ ($\omega_1 = \omega_c$, $\omega_2 = -\omega_c$):

$$\begin{aligned}
w_{12}^{+} &= \sum_l |\kappa_l|^2 (\bar{n}_l + 1) \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_c - \omega_l)\tau} d\tau \\
w_{12}^{-} &= \sum_l |\kappa_l|^2 (\bar{n}_l + 1) \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau = \left(w_{12}^{+}\right)^* \\
w_{21}^{+} &= \sum_l |\kappa_l|^2 \bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau \\
w_{21}^{-} &= \sum_l |\kappa_l|^2 \bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_c - \omega_l)\tau} d\tau = \left(w_{21}^{+}\right)^* \\
w_{11}^{+} &= w_{11}^{-} = w_{22}^{+} = w_{22}^{-} = 0
\end{aligned}$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Další úpravy uděláme pouze pro w_{12}^{+} – ostatní podobně. Máme:

$$w_{12}^{+} = \sum_{l} |\kappa_l|^2 \, \bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Další úpravy uděláme pouze pro w_{12}^{+} – ostatní podobně. Máme:

$$w_{12}^{+} = \sum_{l} |\kappa_l|^2 \, \bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau$$

- Využijme Cauchyho integrál ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\Omega\tau} d\tau = \pi\delta(\Omega) \pm \mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Další úpravy uděláme pouze pro w_{12}^{+} – ostatní podobně. Máme:

$$w_{12}^{+} = \sum_{l} |\kappa_l|^2 \, \bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau$$

- Využijme Cauchyho integrál ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\Omega\tau} d\tau = \pi\delta(\Omega) \pm \mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$$

- Předpokládáme, že módy rezervoáru jsou blízko sebe

$$\sum_{l} \{\dots\} \to \int_0^{\infty} d\omega_l g(\omega_l) \{\dots\}$$

$g(\omega_l)$ vyjadřuje váhu intervalu (hustotu počtu módů) $(\omega_l, \omega_l + d\omega_l)$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Další úpravy uděláme pouze pro w_{12}^{+} – ostatní podobně. Máme:

$$w_{12}^{+} = \sum_{l} |\kappa_l|^2 \,\bar{n}_l \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_l - \omega_c)\tau} d\tau$$

- Využijme Cauchyho integrál ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\Omega\tau} d\tau = \pi\delta(\Omega) \pm \mathrm{i}\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$$

- Předpokládáme, že módy rezervoáru jsou blízko sebe

$$\sum_{l} \{\dots\} \to \int_0^{\infty} d\omega_l g(\omega_l) \{\dots\}$$

$g(\omega_l)$ vyjadřuje váhu intervalu (hustotu počtu módů) $(\omega_l, \omega_l + d\omega_l)$

- Tedy

$$w_{21}^{+} = \underbrace{\pi \int_0^{\infty} d\omega_l g(\omega_l) \left|\kappa(\omega_l)\right|^2 \bar{n}(\omega_l) \delta(\omega_l - \omega_c)}_{\pi g(\omega_c)|\kappa(\omega_c)|^2 \bar{n}(\omega_c)} + \underbrace{\mathrm{i}\mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega_l \frac{g(\omega_l)\bar{n}(\omega_l) \left|\kappa(\omega_l)\right|^2}{\omega_l - \omega_c}}_{\text{když přijmeme, že integrál přispívá hlavně pro } \omega_l \sim \omega_c, \text{ můžeme položit } \bar{n}(\omega_l) \sim \bar{n}(\omega_c)}$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Po provedení integrace získáváme:

$$
\begin{aligned}
w_{21}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n}(\omega_c) = w_{21}^{-*} \\
w_{12}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}(\omega_c) + 1) = w_{12}^{-*} \\
w_{11}^{\pm} &= w_{22}^{\pm} = 0
\end{aligned}
$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí

- Po provedení integrace získáváme:

$$w_{21}^{+} = \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n}(\omega_c) = w_{21}^{-*}$$
$$w_{12}^{+} = \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}(\omega_c) + 1) = w_{12}^{-*}$$
$$w_{11}^{\pm} = w_{22}^{\pm} = 0$$

- Přitom (κ má stejný rozměr jako ω, $d\omega_l g(\omega_l)$ musí být bezrozměrné, tj. g má rozměr ω^{-1}):

$$\gamma = 2\pi g(\omega_c)\left|\kappa(\omega_c)\right|^2$$
$$\Delta\omega = -\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{d\omega_l g(\omega_l)\left|\kappa(\omega_l)\right|^2}{\omega_l - \omega_c}$$
$$\bar{n}(\omega_c) = \frac{1}{\exp\left[\hbar\omega_c/kT\right] - 1}$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- První komutátor

$$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S \right] = -\mathrm{i}\omega_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\varrho}_S^S \right]$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- První komutátor

$$\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S\right] = -\mathrm{i}\omega_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

- Vzhledem k $\delta(\omega_i + \omega_j)$ $(\omega_1 = \omega_c, \omega_2 = -\omega_c)$ má suma jen na dva sčítance

$$\text{pro } i = 1, j = 2: \quad \sum_{i,j} \cdots = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\varrho}_S^S - \hat{a} \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger\right] w_{12}^+ - \left[\hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S \hat{a} - \hat{\varrho}_S^S \hat{a} \hat{a}^\dagger\right] w_{21}^-$$
$$\text{pro } i = 2, j = 1: \quad \sum_{i,j} \cdots = \left[\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S \hat{a}\right] w_{21}^+ - \left[\hat{a} \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger \hat{a}\right] w_{12}^-$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Výchozí řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- První komutátor

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S\right] = -i\omega_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

- Vzhledem k $\delta(\omega_i + \omega_j)$ ($\omega_1 = \omega_c$, $\omega_2 = -\omega_c$) má suma jen na dva sčítance

$$\text{pro } i = 1, j = 2: \quad \sum_{i,j} \cdots = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\varrho}_S^S - \hat{a} \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger\right] w_{12}^+ - \left[\hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S \hat{a} - \hat{\varrho}_S^S \hat{a} \hat{a}^\dagger\right] w_{21}^-$$
$$\text{pro } i = 2, j = 1: \quad \sum_{i,j} \cdots = \left[\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S \hat{a}\right] w_{21}^+ - \left[\hat{a} \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger \hat{a}\right] w_{12}^-$$

- Sečteme tyto dva členy, použijeme komutační relaci $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]$=1 a vztah:

$$\left[\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger\right] + \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] = \left(\hat{\varrho}_S^S \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S\right) + \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) =$$
$$= \left(\hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S\right) + \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S \hat{a}^\dagger \hat{a}\right) = 0$$

- Spektrální hustoty korelačních funkcí:

$$
\begin{aligned}
w_{21}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n}, \qquad w_{21}^{-} = \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n} \\
w_{12}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}+1), \quad w_{12}^{-} = \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}+1)
\end{aligned}
$$

- Spektrální hustoty korelačních funkcí:

$$\begin{aligned} w_{21}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n}, \qquad w_{21}^{-} = \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)\bar{n} \\ w_{12}^{+} &= \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}+1), \quad w_{12}^{-} = \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\Delta\omega\right)(\bar{n}+1) \end{aligned}$$

- Tj.:

$$\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\right]w_{12}^{+} - \left[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right]w_{21}^{-} =$$
$$= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1) + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\mathrm{i}\Delta\omega(\bar{n}+1) - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1) - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\mathrm{i}\Delta\omega(\bar{n}+1) -$$
$$-\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a}\frac{\gamma}{2}\bar{n} - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a}\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\frac{\gamma}{2}\bar{n} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}$$

$$\left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a}\right]w_{21}^{+} - \left[\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right]w_{12}^{-} =$$
$$= \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\frac{\gamma}{2}\bar{n} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n} - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a}\frac{\gamma}{2}\bar{n} + \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a}\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n} -$$
$$-\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1) + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\mathrm{i}\Delta\omega(\bar{n}+1) + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1) - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\mathrm{i}\Delta\omega(\bar{n}+1)$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

$$\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + 2\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

$$\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + 2\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

$$\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + 2\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger]\right) = 0$$

$$\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + 2\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S, \hat{a}\hat{a}^\dagger]\right) = 0$$

$$\mathrm{i}\Delta\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \mathrm{i}\Delta\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

$$\frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S,\hat{a}\hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + 2\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)$$

$$\mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S + \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) =$$

$$= \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S + \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \mathrm{i}\Delta\omega\bar{n}\left([\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{\varrho}_S^S] + [\hat{\varrho}_S^S,\hat{a}\hat{a}^\dagger]\right) = 0$$

$$\mathrm{i}\Delta\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \mathrm{i}\Delta\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{\varrho}_S^S\right]$$

Celkem příspěvek k pravé straně řídící rovnice:

$$\mathrm{i}\Delta\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{\varrho}_S^S\right] - \frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - \gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Neporušená Liouvillovy rovnice pro LHO

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}\omega_c \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Neporušená Liouvillovy rovnice pro LHO

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}\omega_c\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

- Oprava Liouvillovy rovnice daná tlumením

$$\mathrm{i}\Delta\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] - \frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - \gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Neporušená Liouvillovy rovnice pro LHO

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}\omega_c \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

- Oprava Liouvillovy rovnice daná tlumením

$$\mathrm{i}\Delta\omega \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] - \frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - \gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

- Hledaná řídící rovnice pro tlumený lineární harmonický oscilátor ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}(\omega_c + \Delta\omega)\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] + \\ + \gamma\bar{n}\left[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right]$$

Řídící rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

- Neporušená Liouvillovy rovnice pro LHO

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}\omega_c \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right]$$

- Oprava Liouvillovy rovnice daná tlumením

$$\mathrm{i}\Delta\omega \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] - \frac{\gamma}{2}\left(2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - \gamma\bar{n}\left(\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

- Hledaná řídící rovnice pro tlumený lineární harmonický oscilátor ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{d\hat{\varrho}_S^S}{dt} = -\mathrm{i}(\omega_c + \Delta\omega)\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] + \\ + \gamma\bar{n}\left[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^S\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^S\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^S - \hat{\varrho}_S^S\hat{a}\hat{a}^\dagger\right]$$

- V interakční reprezentaci

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}(t)}{\partial t} = -\mathrm{i}\Delta\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\varrho}_S^S\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{a}\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}} - \hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] + \\ + \gamma\bar{n}\left[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}} - \hat{\varrho}_S^{\mathcal{I}}\hat{a}\hat{a}^\dagger\right]$$