Fyzika laserů

Tlumená kvantová soustava – Pauliovy řídící rovnice

Jan Šulc

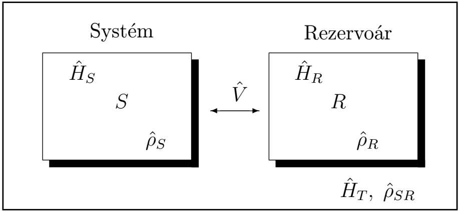
Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

3. března 2021

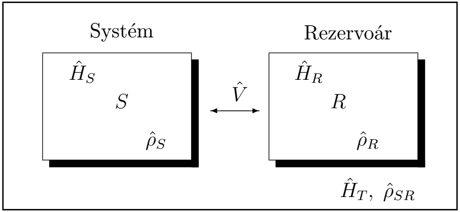
Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. **Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice**
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Tlumený kvantový systém

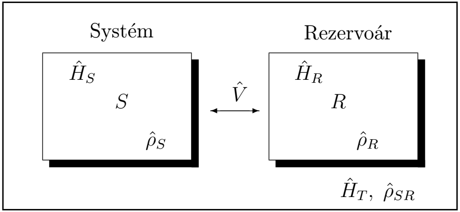


Tlumený kvantový systém



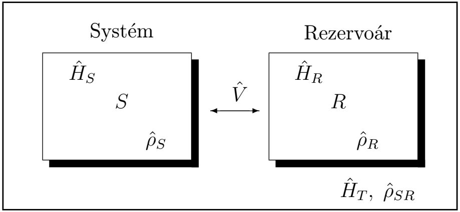
- Uzavřený složený kvantový systém: $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$

Tlumený kvantový systém



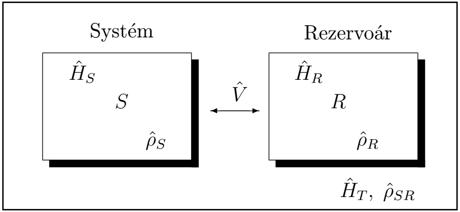
- Uzavřený složený kvantový systém: $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti

Tlumený kvantový systém



- Uzavřený složený kvantový systém: $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně mnoho s.v.,

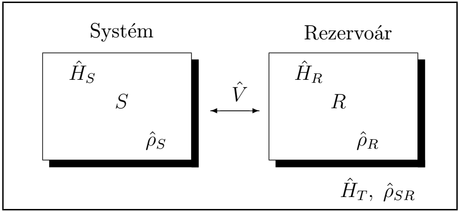
Tlumený kvantový systém



- Uzavřený složený kvantový systém: $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně mnoho s.v.,
- Evoluce celého uzavřeného systému – Liouvillova rovnice v interakční reprezentaci

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \hat{\varrho}^I_{SR}}{\partial t} = \left[\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\varrho}^I_{SR}\right]$$

Tlumený kvantový systém



- Uzavřený složený kvantový systém: $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně mnoho s.v.,
- Evoluce celého uzavřeného systému – Liouvillova rovnice v interakční reprezentaci

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \hat{\varrho}^I_{SR}}{\partial t} = \left[\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\varrho}^I_{SR}\right]$$

- Řešení nestacionární poruchovou iterační metodou + řada zjednodušujících předpokladů $\Rightarrow$ ŘÍDÍCÍ ROVNICE

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav
- Předpokládáme *speciální tvar* interakčního hamiltoniánu $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
  $\hat{Q}_i$ – operátory systému, $\hat{F}_i$ – operátory rezervoáru

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav
- Předpokládáme *speciální tvar* interakčního hamiltoniánu $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
  $\hat{Q}_i$ – operátory systému, $\hat{F}_i$ – operátory rezervoáru
- Předpokládáme *harmonickou* časovou závislost operátorů systému $\hat{Q}_i$
  ω_i – příslušné vlastní frekvence

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav
- Předpokládáme *speciální tvar* interakčního hamiltoniánu $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
  $\hat{Q}_i$ – operátory systému, $\hat{F}_i$ – operátory rezervoáru
- Předpokládáme *harmonickou* časovou závislost operátorů systému $\hat{Q}_i$
  ω_i – příslušné vlastní frekvence
- Omezujeme se na časové intervaly, kdy minimální krok výpočtu $\Delta t \gg \tau_c,\, \omega_i^{-1}$
  τ_c – doba relaxace fluktuací rezervoáru – Markovovská aproximace

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav
- Předpokládáme *speciální tvar* interakčního hamiltoniánu $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
  $\hat{Q}_i$ – operátory systému, $\hat{F}_i$ – operátory rezervoáru
- Předpokládáme *harmonickou* časovou závislost operátorů systému $\hat{Q}_i$
  ω_i – příslušné vlastní frekvence
- Omezujeme se na časové intervaly, kdy minimální krok výpočtu $\Delta t \gg \tau_c,\, \omega_i^{-1}$
  τ_c – doba relaxace fluktuací rezervoáru – Markovovská aproximace
- Délka kroku $\Delta t \ll \gamma^{-1}$, γ – rychlost tlumení systému

Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}_S, \hat{\varrho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$
$$\times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- $\hat{\varrho}_S^S(t) = \mathrm{Tr}_R\, \hat{\varrho}_{SR}^S$ – redukovaný statistický operátor systému
- Rezervoár v termodynamické rovnováze – stacionární stav
- Předpokládáme *speciální tvar* interakčního hamiltoniánu $\hat{V} = \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i$
  $\hat{Q}_i$ – operátory systému, $\hat{F}_i$ – operátory rezervoáru
- Předpokládáme *harmonickou* časovou závislost operátorů systému $\hat{Q}_i$
  ω_i – příslušné vlastní frekvence
- Omezujeme se na časové intervaly, kdy minimální krok výpočtu $\Delta t \gg \tau_c,\, \omega_i^{-1}$
  τ_c – doba relaxace fluktuací rezervoáru – Markovovská aproximace
- Délka kroku $\Delta t \ll \gamma^{-1}$, γ – rychlost tlumení systému
- w_{ij}^+, w_{ji}^- – spektrální složky rezervoárových korelačních funkcí na frekvenci $\omega_{i,j}$

$$w_{ij}^+ = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i\tau} \langle \hat{F}_i(\tau)\hat{F}_j \rangle_R \, d\tau\,, \qquad w_{ji}^- = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i\tau} \langle \hat{F}_j\hat{F}_i(\tau) \rangle_R \, d\tau$$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM"
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3\ldots$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3\ldots$
  - Předpokládáme nekvidistantní, nedegenerované spektrum a středově symetrické stacionární stavy – $\langle l|\hat{\vec{d}}|l\rangle = 0$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3\ldots$
  - Předpokládáme nekvidistantní, nedegenerované spektrum a středově symetrické stacionární stavy – $\langle l|\hat{\vec{d}}|l\rangle = 0$
  - Výměna energie s okolím probíhá po kvantech

$$\omega_{kl} = \frac{E_k - E_l}{\hbar}$$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3\ldots$
  - Předpokládáme nekvidistantní, nedegenerované spektrum a středově symetrické stacionární stavy – $\langle l|\hat{\vec{d}}|l\rangle = 0$
  - Výměna energie s okolím probíhá po kvantech

$$\omega_{kl} = \frac{E_k - E_l}{\hbar}$$

- Tlumící systém – mnohamódové elektromagnetické pole ve stavu termodynamické rovnováhy – záření černého tělesa

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle \,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl} \,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3 \ldots$
  - Předpokládáme nekvidistantní, nedegenerované spektrum a středově symetrické stacionární stavy – $\langle l|\hat{\vec{d}}|l\rangle = 0$
  - Výměna energie s okolím probíhá po kvantech

$$\omega_{kl} = \frac{E_k - E_l}{\hbar}$$

- Tlumící systém – mnohamódové elektromagnetické pole ve stavu termodynamické rovnováhy – záření černého tělesa
- Vzájemná interakce je dána působením elektromagnetického pole záření na indukovaný dipól atomu

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}}$$

Tlumená kvantová soustava

- Konkrétní případ dynamického systému – kvantová soustava – prostorově lokalizovaný systém navzájem vázaných elementárních částic – „ATOM“
  - Známe stacionární stavy soustavy $|l\rangle$ (konfigurace)

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

  - Známe diskrétní spektrum energetických hladin E_l, $l = 1, 2, 3 \ldots$
  - Předpokládáme nekvidistantní, nedegenerované spektrum a středově symetrické stacionární stavy – $\langle l|\hat{\vec{d}}|l\rangle = 0$
  - Výměna energie s okolím probíhá po kvantech

$$\omega_{kl} = \frac{E_k - E_l}{\hbar}$$

- Tlumící systém – mnohamódové elektromagnetické pole ve stavu termodynamické rovnováhy – záření černého tělesa
- Vzájemná interakce je dána působením elektromagnetického pole záření na indukovaný dipól atomu

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}}$$

- Budeme řešit interakci atomu s polem ve stavu termodynamické rovnováhy – najdeme konkrétní tvar členů v řídící rovnici

Interakční hamiltonián

- Operátor elektrické intenzity mnohamódového elektromagnetického pole v *dlouhovlnné* aproximaci ($\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \cong 1$)

$$\hat{\vec{E}}\left(\vec{r},t\right) = \mathrm{i}\sum_{\lambda} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\kappa_{\lambda}} \left(\hat{b}_{\lambda} - \hat{b}_{\lambda}^{\dagger}\right)\vec{e}_{\lambda}$$

- Operátor elektrické intenzity mnohamódového elektromagnetického pole v *dlouhovlnné* aproximaci ($\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \cong 1$)

$$\hat{\vec{E}}\left(\vec{r},t\right) = \mathrm{i}\sum_{\lambda} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\kappa_\lambda} \left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right) \vec{e}_\lambda$$

- Interakční hamiltonián (λ – módový index zahrnující $\vec{k}$ a polarizaci)

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}} = -\mathrm{i}\sum_{\lambda} \kappa_\lambda \left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right)\left(\vec{e}_\lambda \cdot \hat{\vec{d}}\,\right)$$

Interakční hamiltonián

- Operátor elektrické intenzity mnohamódového elektromagnetického pole v *dlouhovlnné* aproximaci ($\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \cong 1$)

$$\hat{\vec{E}}\,(\vec{r}, t) = \mathrm{i} \sum_{\lambda} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\kappa_\lambda} \left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right) \vec{e}_\lambda$$

- Interakční hamiltonián (λ – módový index zahrnující $\vec{k}$ a polarizaci)

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}} = -\mathrm{i} \sum_{\lambda} \kappa_\lambda \left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right)\left(\vec{e}_\lambda \cdot \hat{\vec{d}}\,\right)$$

- Provedeme rozvoj $\hat{V}$ do vlastních stavů kvantové soustavy $|k\rangle$, $|l\rangle$

$$\hat{V} = \hat{1}\hat{V}\hat{1} = \sum_{k,l} |l\rangle\langle l|\hat{V}|k\rangle\langle k|$$

- Operátor elektrické intenzity mnohamódového elektromagnetického pole v *dlouhovlnné* aproximaci ($e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cong 1$)

$$\hat{\vec{E}}\,(\vec{r},t) = i\sum_\lambda \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\kappa_\lambda}\left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right)\vec{e}_\lambda$$

- Interakční hamiltonián (λ – módový index zahrnující $\vec{k}$ a polarizaci)

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}} = -i\sum_\lambda \kappa_\lambda\left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger\right)\left(\vec{e}_\lambda\cdot\hat{\vec{d}}\,\right)$$

- Provedeme rozvoj $\hat{V}$ do vlastních stavů kvantové soustavy $|k\rangle$, $|l\rangle$

$$\hat{V} = \hat{1}\hat{V}\hat{1} = \sum_{k,l}|l\rangle\langle l|\hat{V}|k\rangle\langle k| = -i\sum_{k,l}\sum_\lambda \kappa_\lambda\Big(\underbrace{\hat{b}_\lambda - \hat{b}_\lambda^\dagger}_{\text{pole}}\Big)\Big(\vec{e}_\lambda\cdot\underbrace{|k\rangle\langle k|\hat{\vec{d}}\,|l\rangle\langle l|}_{\text{atom}}\Big)$$

- Operátor elektrické intenzity mnohamódového elektromagnetického pole v *dlouhovlnné* aproximaci ($\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \cong 1$)

$$\hat{\vec{E}}\,(\vec{r},t) = \mathrm{i}\sum_{\lambda} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\kappa_\lambda} \left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}^\dagger_\lambda\right)\vec{e}_\lambda$$

- Interakční hamiltonián (λ – módový index zahrnující $\vec{k}$ a polarizaci)

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}} = -\mathrm{i}\sum_{\lambda}\kappa_\lambda\left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}^\dagger_\lambda\right)\left(\vec{e}_\lambda\cdot\hat{\vec{d}}\,\right)$$

- Provedeme rozvoj $\hat{V}$ do vlastních stavů kvantové soustavy $|k\rangle$, $|l\rangle$

$$\hat{V} = \hat{1}\hat{V}\hat{1} = \sum_{k,l}|l\rangle\langle l|\hat{V}|k\rangle\langle k| = -\mathrm{i}\sum_{k,l}\sum_{\lambda}\kappa_\lambda\underbrace{\left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}^\dagger_\lambda\right)}_{\text{pole}}\left(\vec{e}_\lambda\cdot\underbrace{|k\rangle\langle k|\hat{\vec{d}}\,|l\rangle\langle l|}_{\text{atom}}\right)$$

$$\hat{V} = \hbar\sum_{k,l}\hat{f}_{kl}|k\rangle\langle l| \quad \text{kde} \quad \hat{f}_{kl} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{\lambda}\kappa_\lambda\left(\hat{b}_\lambda - \hat{b}^\dagger_\lambda\right)\left(\vec{e}_\lambda\cdot\vec{d}_{kl}\,\right)$$

Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \, \hat{F}_i$$

Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \longrightarrow \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \longrightarrow \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$

$$\hat{Q}_i^S \longrightarrow \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \longrightarrow \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \to \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \to \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$

$$\hat{Q}_i^S \to \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \to \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

- Přejdeme do interakční reprezentace – najdeme vlastní frekvence $|k\rangle\langle l|$

$$\hat{Q}_{kl}^I(t) \quad = \quad \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} =$$

Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \longrightarrow \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \longrightarrow \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$

$$\hat{Q}_i^S \longrightarrow \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \longrightarrow \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

- Přejdeme do interakční reprezentace – najdeme vlastní frekvence $|k\rangle\langle l|$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{kl}^I(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = \\ &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)(E_k - E_l)(t-t_0)} |k\rangle\langle l| = |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} = \hat{Q}_{kl}^S \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} \end{aligned}$$

Interakční hamiltonián

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \to \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \to \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$

$$\hat{Q}_i^S \to \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \to \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

- Přejdeme do interakční reprezentace – najdeme vlastní frekvence $|k\rangle\langle l|$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{kl}^I(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = \\ &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)(E_k-E_l)(t-t_0)} |k\rangle\langle l| = |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} = \hat{Q}_{kl}^S \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} \\ \hat{f}_{kl}(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)} \hat{f}_{kl} \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)} \end{aligned}$$

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \to \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \to \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$
$$\hat{Q}_i^S \to \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \to \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

- Přejdeme do interakční reprezentace – najdeme vlastní frekvence $|k\rangle\langle l|$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{kl}^I(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = \\
&= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)(E_k - E_l)(t-t_0)} |k\rangle\langle l| = |k\rangle\langle l| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} = \hat{Q}_{kl}^S \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} \\
\hat{f}_{kl}(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)} \hat{f}_{kl} \, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)}
\end{aligned}$$

- Spektrální hustoty korelačních funkcí rezervoáru R (DC 1.6.)

$$w_{ij}^+ \quad \to \quad w_{klmn}^+ = \int_0^\infty \mathrm{e}^{i\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{kl}(\tau) \hat{f}_{mn} \rangle_R \, d\tau$$
$$w_{ji}^- \quad \to \quad w_{mnkl}^- = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{mn} \hat{f}_{kl}(\tau) \rangle_R \, d\tau$$

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} \hat{f}_{kl} |k\rangle\langle l| \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V} = \hbar \sum_{i} \hat{Q}_i \hat{F}_i$$

- Můžeme volit:

$$\hat{F}_i \to \hat{F}_{kl} = \hat{f}_{kl} \qquad \hat{F}_j \to \hat{F}_{mn} = \hat{f}_{mn}$$

$$\hat{Q}_i^S \to \hat{Q}_{kl}^S = |k\rangle\langle l| \qquad \hat{Q}_j^S \to \hat{Q}_{mn}^S = |m\rangle\langle n|$$

- Přejdeme do interakční reprezentace – najdeme vlastní frekvence $|k\rangle\langle l|$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{kl}^I(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} |k\rangle\langle l|\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} = \\
&= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)(E_k-E_l)(t-t_0)} |k\rangle\langle l| = |k\rangle\langle l|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} = \hat{Q}_{kl}^S\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}(t-t_0)} \\
\hat{f}_{kl}(t) &= \mathrm{e}^{(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)} \hat{f}_{kl}\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/\hbar)\hat{H}_R(t-t_0)}
\end{aligned}$$

- Spektrální hustoty korelačních funkcí rezervoáru R (DC 1.6.)

$$w_{ij}^+ \quad \to \quad w_{klmn}^+ = \int_0^\infty \mathrm{e}^{i\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{kl}(\tau) \hat{f}_{mn} \rangle_R \, d\tau$$

$$w_{ji}^- \quad \to \quad w_{mnkl}^- = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{mn} \hat{f}_{kl}(\tau) \rangle_R \, d\tau$$

$$w_{mnkl}^- = (w_{lknm}^+)^*$$

- Vyjdeme z obecné řídící rovnice v interakčním obraze

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Vyjdeme z obecné řídící rovnice v interakčním obraze

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dosadíme za $\hat{Q}_i^S \to |k\rangle\langle l|$, $\hat{Q}_j^S \to |m\rangle\langle n|$, $w_{ij}^+ \to w_{klmn}^+$, $w_{ji}^- \to w_{mnkl}^-$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Vyjdeme z obecné řídící rovnice v interakčním obraze

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dosadíme za $\hat{Q}_i^S \to |k\rangle\langle l|$, $\hat{Q}_j^S \to |m\rangle\langle n|$, $w_{ij}^+ \to w_{klmn}^+$, $w_{ji}^- \to w_{mnkl}^-$

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \left\{ \left(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \right) w_{klmn}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \right) w_{mnkl}^- \right\}$$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Vyjdeme z obecné řídící rovnice v interakčním obraze

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dosadíme za $\hat{Q}_i^S \to |k\rangle\langle l|$, $\hat{Q}_j^S \to |m\rangle\langle n|$, $w_{ij}^+ \to w_{klmn}^+$, $w_{ji}^- \to w_{mnkl}^-$

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \left\{ \left(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \right) w_{klmn}^+ - \right.$$
$$\left. - \left(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \right) w_{mnkl}^- \right\}$$

- Podmínka $\delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) = 1$, nebo-li $\omega_{kl} + \omega_{mn} = 0$, určuje přechody, které mohou přispívat k tlumení

- Vyjdeme z obecné řídící rovnice v interakčním obraze

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \right. \\ \left. - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- Dosadíme za $\hat{Q}_i^S \rightarrow |k\rangle\langle l|$, $\hat{Q}_j^S \rightarrow |m\rangle\langle n|$, $w_{ij}^+ \rightarrow w_{klmn}^+$, $w_{ji}^- \rightarrow w_{mnkl}^-$

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \left\{ \left(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \right) w_{klmn}^+ - \right. \\ \left. - \left(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \right) w_{mnkl}^- \right\}$$

- Podmínka $\delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) = 1$, nebo-li $\omega_{kl} + \omega_{mn} = 0$, určuje přechody, které mohou přispívat k tlumení

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n, l = m, k \neq l$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n, l = m, k \neq l$
  2. $k = l, m = n, k \neq m$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n, l = m, k \neq l$
  2. $k = l, m = n, k \neq m$
  3. $k = l = m = n$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n, l = m, k \neq l$
  2. $k = l, m = n, k \neq m$
  3. $k = l = m = n$

1. příspěvek ($w_{lk} = w^{+}_{kllk} + w^{-}_{kllk}$ je vzhledem k $w^{-}_{mnkl} = (w^{+}_{klmn})^{*}$ reálné číslo)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = \sum_{k,l}{}' \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\, w^{+}_{kllk} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w^{-}_{kllk} \right\} \qquad (1)$$

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n, l = m, k \neq l$
  2. $k = l, m = n, k \neq m$
  3. $k = l = m = n$

1. příspěvek ($w_{lk} = w^+_{kllk} + w^-_{kllk}$ je vzhledem k $w^-_{mnkl} = (w^+_{klmn})^*$ reálné číslo)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}^{I(1)}_S}{\partial t} = {\sum_{k,l}}' \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}^I_S|k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}^I_S w^+_{kllk} - \hat{\varrho}^I_S |k\rangle\langle k| w^-_{kllk} \right\} \tag{1}$$

2. příspěvek

$$\frac{\partial \hat{\varrho}^{I(2)}_S}{\partial t} = {\sum_{k,l}}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}^I_S|l\rangle\langle l| \left(w^+_{llkk} + w^-_{llkk} \right) \tag{2}$$

$$E_k - E_l + E_m - E_n = 0$$

- Neekvidistantní nedegenerované spektrum energie. Podmínka platí, jestliže
  1. $k = n$, $l = m$, $k \neq l$
  2. $k = l$, $m = n$, $k \neq m$
  3. $k = l = m = n$

1. příspěvek ($w_{lk} = w^+_{kllk} + w^-_{kllk}$ je vzhledem k $w^-_{mnkl} = (w^+_{klmn})^*$ reálné číslo)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = \sum_{k,l}{}' \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\, w^+_{kllk} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k| w^-_{kllk} \right\} \tag{1}$$

2. příspěvek

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(2)}}{\partial t} = \sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l| \left(w^+_{llkk} + w^-_{llkk} \right) \tag{2}$$

3. příspěvek

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(3)}}{\partial t} = \sum_m \left\{ \left(|m\rangle\langle m|\hat{\varrho}_S^I\,|m\rangle\langle m| - |m\rangle\langle m|\hat{\varrho}_S^I \right) w^+_{mmmm} + \right.$$

$$\left. + \left(|m\rangle\langle m|\hat{\varrho}_S^I\,|m\rangle\langle m| - \hat{\varrho}_S^I\,|m\rangle\langle m| \right) w^-_{mmmm} \right\} \tag{3}$$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Odvození 1. příspěvku – vyjdeme z rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \Big\{ \Big(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \Big) w_{klmn}^{+} - \\ - \Big(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \Big) w_{mnkl}^{-} \Big\}$$

- Odvození 1. příspěvku – vyjdeme z rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \Big\{ \Big(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \Big) w_{klmn}^{+} - \\ - \Big(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \Big) w_{mnkl}^{-} \Big\}$$

- Položíme $k = n$, $l = m$, přitom $k \neq l$ (čárkovaná suma – nesčítá se pro $l = k$)

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Odvození 1. příspěvku – vyjdeme z rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \Big\{ \Big(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \Big) w_{klmn}^{+} - $$

$$ - \Big(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \Big) w_{mnkl}^{-} \Big\}$$

- Položíme $k = n$, $l = m$, přitom $k \neq l$ (čárkovaná suma – nesčítá se pro $l = k$)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = -{\sum_{k,l}}' \Big\{ |k\rangle\langle k| \hat{\varrho}_S^I w_{kllk}^{+} - |l\rangle\langle k| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| w_{kllk}^{+} - $$

$$ - |k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |l\rangle\langle k| w_{lkkl}^{-} + \hat{\varrho}_S^I |l\rangle\langle l| w_{lkkl}^{-} \Big\}$$

Řídící rovnice pro tlumenou kvantovou soustavu

- Odvození 1. příspěvku – vyjdeme z rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl} + \omega_{mn}) \Big\{ \Big(\delta_{lm} |k\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| \Big) w_{klmn}^{+} - \\ - \Big(|k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle n| - \delta_{nk} \hat{\varrho}_S^I |m\rangle\langle l| \Big) w_{mnkl}^{-} \Big\}$$

- Položíme $k = n$, $l = m$, přitom $k \neq l$ (čárkovaná suma – nesčítá se pro $l = k$)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = -{\sum_{k,l}}' \Big\{ |k\rangle\langle k| \hat{\varrho}_S^I w_{kllk}^{+} - |l\rangle\langle k| \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle l| w_{kllk}^{+} - \\ - |k\rangle\langle l| \hat{\varrho}_S^I |l\rangle\langle k| w_{lkkl}^{-} + \hat{\varrho}_S^I |l\rangle\langle l| w_{lkkl}^{-} \Big\}$$

- Protože sčítáme přes všechny k, l, můžeme ve třetím členu zaměnit $k \leftrightarrow l$

- Odvození 1. příspěvku – vyjdeme z rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = -\sum_{k,l,m,n} \delta(\omega_{kl}+\omega_{mn})\Big\{\Big(\delta_{lm}|k\rangle\langle n|\hat{\varrho}_S^I - |m\rangle\langle n|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|\Big)w_{klmn}^{+} - \\ - \Big(|k\rangle\langle l|\hat{\varrho}_S^I|m\rangle\langle n| - \delta_{nk}\hat{\varrho}_S^I|m\rangle\langle l|\Big)w_{mnkl}^{-}\Big\}$$

- Položíme $k=n$, $l=m$, přitom $k\neq l$ (čárkovaná suma – nesčítá se pro $l=k$)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = -\sum_{k,l}{}'\Big\{|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I w_{kllk}^{+} - |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|w_{kllk}^{+} - \\ - |k\rangle\langle l|\hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle k|w_{lkkl}^{-} + \hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle l|w_{lkkl}^{-}\Big\}$$

- Protože sčítáme přes všechny k, l, můžeme ve třetím členu zaměnit $k \leftrightarrow l$

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^{I(1)}}{\partial t} = \sum_{k,l}{}'\Big\{-|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I w_{kllk}^{+} + |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|\underbrace{\big(w_{kllk}^{+}+w_{kllk}^{-}\big)}_{w_{lk}} - \hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle l|w_{lkkl}^{-}\Big\}$$

- Posčítáme příspěvky (1), (2) a (3) a dostaneme řídící rovnici tlumeného atomu v interakčním obraze (DC 1.7)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-} \right\} +$$

$$+ \sum_{k,\,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l| \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

Pauliovy řídící rovnice

- Posčítáme příspěvky (1), (2) a (3) a dostaneme řídící rovnici tlumeného atomu v interakčním obraze (DC 1.7)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\, w_{klk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k| w_{kllk}^{-} \right\} + \\ + \sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l| \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

- Můžeme určit časový vývoj maticových elementů redukovaného statistického operátoru $\varrho_{ji}^I = \langle j|\hat{\varrho}_S^I|i\rangle$

- Posčítáme příspěvky (1), (2) a (3) a dostaneme řídící rovnici tlumeného atomu v interakčním obraze (DC 1.7)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-} \right\} + \\ + \sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l| \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

- Můžeme určit časový vývoj maticových elementů redukovaného statistického operátoru $\varrho_{ji}^I = \langle j|\hat{\varrho}_S^I|i\rangle$

$$\frac{\partial \varrho_{ji}^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ \langle j|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|i\rangle w_{lk} - \langle j|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|i\rangle w_{kllk}^{+} - \langle j|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle k|i\rangle w_{kllk}^{-} \right\} + \\ + \sum_{k,l}{}' \langle j|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle l|i\rangle \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

Pauliovy řídící rovnice

- Posčítáme příspěvky (1), (2) a (3) a dostaneme řídící rovnici tlumeného atomu v interakčním obraze (DC 1.7)

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ |l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I |k\rangle\langle k| w_{kllk}^{-} \right\} + $$

$$+ \sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle l| \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

- Můžeme určit časový vývoj maticových elementů redukovaného statistického operátoru $\varrho_{ji}^I = \langle j|\hat{\varrho}_S^I|i\rangle$

$$\frac{\partial \varrho_{ji}^I}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ \langle j|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|i\rangle w_{lk} - \langle j|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|i\rangle w_{kllk}^{+} - \langle j|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle k|i\rangle w_{kllk}^{-} \right\} + $$

$$+ \sum_{k,l}{}' \langle j|k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|l\rangle\langle l|i\rangle \left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-} \right)$$

- Využijeme ortogonalitu vlastních stavů $\langle k|l\rangle = \delta_{kl}$ a dostaneme Pauliovy řídící rovnice (DC 1.8)

$$\frac{\partial \varrho_{ji}^I}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho_{kk}^I - \Gamma_{ij}^c \varrho_{ji}^I \,, \quad \text{kde} \quad \Gamma_{ij}^c = \sum_l (w_{ljjl}^{+} + w_{illi}^{-}) - w_{iijj}^{+} - w_{iijj}^{-}$$

Pauliovy řídící rovnice

- Interakční reprezentace

$$\frac{\partial \varrho^I_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho^I_{kk} - \Gamma^c_{ij}\, \varrho^I_{ji}$$

Pauliovy řídící rovnice

- Interakční reprezentace

$$\frac{\partial \varrho_{ji}^{I}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_{k}{}' w_{ik}\, \varrho_{kk}^{I} - \Gamma_{ij}^{c}\, \varrho_{ji}^{I}$$

- Schrödingerova reprezentace ($\varrho_{ij} = \langle i | \hat{\varrho}_S^S | j \rangle$) (DC 1.10)

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_{k}{}' w_{ik}\, \varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij}^{c} - \mathrm{i}\omega_{ij} \right) \varrho_{ji}$$

Pauliovy řídící rovnice

- Interakční reprezentace

$$\frac{\partial \varrho_{ji}^{I}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_{k}{}' w_{ik}\, \varrho_{kk}^{I} - \Gamma_{ij}^{c}\, \varrho_{ji}^{I}$$

- Schrödingerova reprezentace ($\varrho_{ij} = \langle i | \hat{\varrho}_S^S | j \rangle$) (DC 1.10)

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_{k}{}' w_{ik}\, \varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij}^{c} - \mathrm{i}\omega_{ij}\right) \varrho_{ji}$$

- w_{ik} – pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu $\hbar\omega_{ik}$ za sekundu

$$w_{ik} = w_{kiik}^{+} + (w_{kiik}^{+})^{*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ki} t} \langle \hat{f}_{ki}(\tau) \hat{f}_{ik} \rangle_R \, d\tau$$

Pauliovy řídící rovnice

- Interakční reprezentace

$$\frac{\partial \varrho^I_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho^I_{kk} - \Gamma^c_{ij}\, \varrho^I_{ji}$$

- Schrödingerova reprezentace ($\varrho_{ij} = \langle i|\hat{\varrho}^S_S|j\rangle$) (DC 1.10)

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho_{kk} - \left(\Gamma^c_{ij} - \mathrm{i}\omega_{ij}\right) \varrho_{ji}$$

- w_{ik} – pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu $\hbar\omega_{ik}$ za sekundu

$$w_{ik} = w^+_{kiik} + (w^+_{kiik})^* = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{ki} t} \langle \hat{f}_{ki}(\tau) \hat{f}_{ik} \rangle_R \, d\tau$$

- Po dosazení a úpravách:

$$w_{ik} = \frac{2\pi}{\hbar \varepsilon_0 L^3} \sum_\lambda \omega_\lambda |\vec{e}_\lambda \cdot \vec{d}_{ik}|^2 \Big(\underbrace{\bar{n}_\lambda \delta(\omega_{ki} + \omega_\lambda)}_{\text{absorpce } (\omega_{ki}<0)} + \underbrace{(\bar{n}_\lambda + 1)\delta(\omega_{ki} - \omega_\lambda)}_{\text{stim. \& spont. emise } (\omega_{ki}>0)} \Big)$$

- Koeficienty Γ^c_{ij}

$$\Gamma^c_{ij} = \sum_l (w^+_{ljjl} + w^-_{illi}) - w^+_{iijj} - w^-_{iijj} = \left\{ \begin{array}{l} w^+_{klmn} = \int_0^\infty e^{i\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{kl}(\tau)\hat{f}_{mn}\rangle_R \, d\tau \\ \omega_{ii} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \left\{ \sum_l \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{jl}\tau} \langle \hat{f}_{jl}(\tau)\hat{f}_{lj}\rangle_R + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{li}\tau} \langle \hat{f}_{il}\hat{f}_{li}(\tau)\rangle_R \right] - \langle \hat{f}_{ii}(\tau)\hat{f}_{jj}\rangle_R - \langle \hat{f}_{ii}\hat{f}_{jj}(\tau)\rangle_R \right\}$$

- Koeficienty Γ^c_{ij}

$$\Gamma^c_{ij} = \sum_l (w^+_{ljjl} + w^-_{illi}) - w^+_{iijj} - w^-_{iijj} = \left\{ \begin{array}{l} w^+_{klmn} = \int_0^\infty e^{i\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{kl}(\tau)\hat{f}_{mn}\rangle_R \, d\tau \\ \omega_{ii} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \left\{ \sum_l \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{jl}\tau} \langle \hat{f}_{jl}(\tau)\hat{f}_{lj}\rangle_R + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{li}\tau} \langle \hat{f}_{il}\hat{f}_{li}(\tau)\rangle_R \right] - \langle \hat{f}_{ii}(\tau)\hat{f}_{jj}\rangle_R - \langle \hat{f}_{ii}\hat{f}_{jj}(\tau)\rangle_R \right\}$$

- Výpočet asymetrického integrálu (Cauchyho int. ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$):

$$\int_0^\infty d\tau (\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\Omega\tau}) = \pi\delta(\Omega) \pm i\mathcal{P}\frac{1}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^c_{ij} = \Gamma_{ij} - \mathrm{i}\Delta\omega_{ij}$$

- Koeficienty Γ_{ij}^{c}

$$\Gamma_{ij}^{c} = \sum_{l}(w_{ljjl}^{+} + w_{illi}^{-}) - w_{iijj}^{+} - w_{iijj}^{-} = \left\{ \begin{array}{l} w_{klmn}^{+} = \int_0^\infty e^{i\omega_{kl}\tau}\langle \hat{f}_{kl}(\tau)\hat{f}_{mn}\rangle_R \, d\tau \\ \omega_{ii} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \left\{ \sum_{l} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{jl}\tau}\langle \hat{f}_{jl}(\tau)\hat{f}_{lj}\rangle_R + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{li}\tau}\langle \hat{f}_{il}\hat{f}_{li}(\tau)\rangle_R \right] - \langle \hat{f}_{ii}(\tau)\hat{f}_{jj}\rangle_R - \langle \hat{f}_{ii}\hat{f}_{jj}(\tau)\rangle_R \right\}$$

- Výpočet asymetrického integrálu (Cauchyho int. ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$):

$$\int_0^\infty d\tau(\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\Omega\tau}) = \pi\delta(\Omega) \pm i\mathcal{P}\frac{1}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^{c} = \Gamma_{ij} - \mathrm{i}\Delta\omega_{ij}$$

- Koeficienty Γ_{ij}^{c} jsou obecně komplexní ($\Gamma_{ij}^{c} = \Gamma_{ji}^{c\,*}$).

- Koeficienty Γ^c_{ij}

$$\Gamma^c_{ij} = \sum_l (w^+_{ljjl} + w^-_{illi}) - w^+_{iijj} - w^-_{iijj} = \left\{ \begin{array}{l} w^+_{klmn} = \int_0^\infty e^{i\omega_{kl}\tau} \langle \hat{f}_{kl}(\tau)\hat{f}_{mn}\rangle_R \, d\tau \\ \omega_{ii} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \left\{ \sum_l \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{jl}\tau} \langle \hat{f}_{jl}(\tau)\hat{f}_{lj}\rangle_R + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{li}\tau} \langle \hat{f}_{il}\hat{f}_{li}(\tau)\rangle_R \right] - \langle \hat{f}_{ii}(\tau)\hat{f}_{jj}\rangle_R - \langle \hat{f}_{ii}\hat{f}_{jj}(\tau)\rangle_R \right\}$$

- Výpočet asymetrického integrálu (Cauchyho int. ve smyslu vlastní hodnoty $\mathcal{P}\frac{1}{\Omega}$):

$$\int_0^\infty d\tau (\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\Omega\tau}) = \pi\delta(\Omega) \pm i\mathcal{P}\frac{1}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^c_{ij} = \Gamma_{ij} - \mathrm{i}\Delta\omega_{ij}$$

- Koeficienty Γ^c_{ij} jsou obecně komplexní ($\Gamma^c_{ij} = \Gamma^{c\,*}_{ji}$).
- Reálná část Γ_{ij} představuje *tlumení*, imaginární $\Delta\omega_{ij}$ *posuv vlastní frekvence atomu* – Lambův posuv

$$\Delta\omega_{ij} = -\mathcal{P} \sum_{\{n\},\{n'\},l} \left\{ \frac{|\langle \{n\}|\hat{f}_{jl}|\{n'\}\rangle|^2}{\omega_{jl} + \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)} + \frac{|\langle \{n\}|\hat{f}_{il}|\{n'\}\rangle|^2}{\omega_{li} - \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)} \right\} \prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}}) \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}$$

- Koeficienty Γ_{ij}:

$$\Gamma_{ij} = \underbrace{\pi \sum_{\{n\},\{n'\}} |\langle\{n\}\, |\hat{f}_{ii} - \hat{f}_{jj}|\, \{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\sum_m \omega_m(n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{asymetrická část } \Gamma^{\mathrm{ph}}_{ij}\approx 0} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq j} |\langle\{n\}\, |\hat{f}_{jl}|\, \{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{jl} + \sum_m \omega_m(n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{jj}>0} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq i} |\langle\{n\}\, |\hat{f}_{il}|\, \{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{li} + \sum_m \omega_m(n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{ii}>0}$$

$$\Gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma^{ph}_{ij}\,, \quad \text{kde} \quad \Gamma_i \equiv \Gamma_{ii} = \textstyle\sum'_k w_{ki} > 0$$

- Koeficienty Γ_{ij}:

$$\Gamma_{ij} = \underbrace{\pi \sum_{\{n\},\{n'\}} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{ii} - \hat{f}_{jj}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{asymetrická část } \Gamma^{\mathrm{ph}}_{ij} \approx 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq j} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{jl}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{jl} + \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{jj} > 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq i} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{il}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{li} + \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}})\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{ii} > 0}$$

$$\Gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma^{ph}_{ij}\,, \quad \text{kde} \quad \Gamma_i \equiv \Gamma_{ii} = \textstyle\sum'_k w_{ki} > 0$$

- Koeficienty Γ_{ii} udávají pravděpodobnost za sekundu, že atom přejde ze stavu $|i\rangle$ do libovolného jiného stavu.

- Koeficienty Γ_{ij}:

$$\Gamma_{ij} = \underbrace{\pi \sum_{\{n\},\{n'\}} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{ii} - \hat{f}_{jj}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}}) \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{asymetrická část } \Gamma_{ij}^{\mathrm{ph}} \approx 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq j} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{jl}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{jl} + \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}}) \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{jj} > 0} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\pi \sum_{\{n\},\{n'\},l\neq i} |\langle\{n\}\,|\hat{f}_{il}|\,\{n'\}\rangle|^2 \delta\left[\omega_{li} + \sum_m \omega_m (n_m - n'_m)\right] \left[\prod_m (1 - \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m}{kT}}) \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega_m n_m}{kT}}\right]}_{\text{symetrická část } \Gamma_{ii} > 0}$$

$$\Gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma_{ij}^{ph}, \quad \text{kde} \quad \Gamma_i \equiv \Gamma_{ii} = \textstyle\sum_k' w_{ki} > 0$$

- Koeficienty Γ_{ii} udávají pravděpodobnost za sekundu, že atom přejde ze stavu $|i\rangle$ do libovolného jiného stavu.
- Pro interakce „prvního řádu“ $\Gamma_{ij}^{ph} = 0$.

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}\,, \tag{4}$$

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right) \varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = {\sum_k}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}\,, \quad i \neq j\,, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = \sum_k{}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}\,, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

- Řešení nezávislých rovnic (4) – vývoj pravděpodobnosti přechodů $i \rightleftarrows j$

$$\varrho_{ji}(t) = \varrho_{ji}(0)\exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right]$$

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = {\sum_k}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

- Řešení nezávislých rovnic (4) – vývoj pravděpodobnosti přechodů $i \rightleftarrows j$

$$\varrho_{ji}(t) = \varrho_{ji}(0)\exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{protože} \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$$

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

- Řešení nezávislých rovnic (4) – vývoj pravděpodobnosti přechodů $i \rightleftarrows j$

$$\varrho_{ji}(t) = \varrho_{ji}(0)\exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \quad \text{protože} \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$$

- Řešení rovnic (5) – vývoj pravděpodobnosti obsazení hladin i. Stacionární řešení odpovídá *Boltzmannovu rozdělení* ($\beta = (kT)^{-1}$)

$$\varrho_{ii}^{SS} = \left[\sum\nolimits_{j} \mathrm{e}^{-\beta E_j}\right]^{-1} \mathrm{e}^{-\beta E_i}$$

Řešení Pauliových rovnic

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = {\sum_k}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

- Řešení nezávislých rovnic (4) – vývoj pravděpodobnosti přechodů $i \rightleftarrows j$

$$\varrho_{ji}(t) = \varrho_{ji}(0)\exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{protože} \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$$

- Řešení rovnic (5) – vývoj pravděpodobnosti obsazení hladin i. Stacionární řešení odpovídá *Boltzmannovu rozdělení* ($\beta = (kT)^{-1}$)

$$\varrho_{ii}^{SS} = \left[\sum_j \mathrm{e}^{-\beta E_j}\right]^{-1} \mathrm{e}^{-\beta E_i}$$

- Pro ustálený stav $\partial\varrho_{ii}^{SS}/\partial t = 0$ z rovnice (5) dostaneme:

$$\Gamma_i\,\varrho_{ii}^{SS} = {\sum_k}' w_{ik}\,\varrho_{kk}^{SS}$$

- Pauliovy rovnice pro nediagonální a diagonální prvky matice hustoty

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}, \quad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\,\varrho_{kk} - \Gamma_i\,\varrho_{ii}, \quad \text{neboť} \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0\,. \tag{5}$$

- Řešení nezávislých rovnic (4) – vývoj pravděpodobnosti přechodů $i \rightleftarrows j$

$$\varrho_{ji}(t) = \varrho_{ji}(0)\exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \quad \text{protože} \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$$

- Řešení rovnic (5) – vývoj pravděpodobnosti obsazení hladin i. Stacionární řešení odpovídá *Boltzmannovu rozdělení* ($\beta = (kT)^{-1}$)

$$\varrho_{ii}^{SS} = \left[\sum\nolimits_{j} \mathrm{e}^{-\beta E_j}\right]^{-1} \mathrm{e}^{-\beta E_i}$$

- Pro ustálený stav $\partial\varrho_{ii}^{SS}/\partial t = 0$ z rovnice (5) dostaneme:

$$\Gamma_i\,\varrho_{ii}^{SS} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\,\varrho_{kk}^{SS}$$

- Tedy:

$$\Gamma_i = \sum\nolimits'_{k} w_{ki} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\,\mathrm{e}^{-\beta(E_k - E_i)}$$

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

- Dipólová interakce – operátor interakce

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{\vec{E}}$$

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

- Dipólová interakce – operátor interakce

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}}$$

- Výsledná řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l}\left\{|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-}\right\} +$$

$$+\sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l|\left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-}\right)$$

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

- Dipólová interakce – operátor interakce

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}}$$

- Výsledná řídící rovnice

$$\frac{\partial\hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l}\left\{|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\, w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-}\right\} +$$
$$+ \sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l|\left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-}\right)$$

- Pauliho rovnice

$$\frac{\partial\varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij}\sum_k{}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega_{ij}'\right)\varrho_{ji}$$

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

- Dipólová interakce – operátor interakce

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}}$$

- Výsledná řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l}\left\{|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-}\right\} +$$

$$+\sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l|\left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-}\right)$$

- Pauliho rovnice

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij}\sum_k{}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right)\varrho_{ji}$$

- Cvičení: ME v Schrödingerově reprezentaci

Shrnutí

- Konkrétní aplikace řídící rovnice – tlumená kvantová soustav – ATOM
- Popis ATOMU – vlastní stavy, vlastní energie, rezonanční frekvence

$$\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle\,, \qquad \langle k|l\rangle = \delta_{kl}\,, \qquad \sum_l |l\rangle\langle l| = \hat{1}$$

- Dipólová interakce – operátor interakce

$$\hat{V} = -\hat{\vec{d}}\cdot\hat{\vec{E}}$$

- Výsledná řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l}\left\{|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l|w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,w_{kllk}^{+} - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k|w_{kllk}^{-}\right\} +$$

$$+\sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l|\left(w_{llkk}^{+} + w_{llkk}^{-}\right)$$

- Pauliho rovnice

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij}\sum_k{}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega_{ij}'\right)\varrho_{ji}$$

- Cvičení: ME v Schrödingerově reprezentaci
- Příště: poloklasická teorie interakce tlumené kvantové soustavy s elmag. polem

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/