

Fyzika laserů

Kvantové generátory optického záření 2

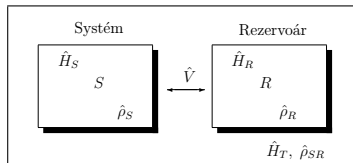
Tlumený dvouhladinový systém v silném elektromagnetickém poli

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

28. února 2022

1. **Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice**
2. **Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice**
3. **Poloklasický popis interakce záření s látkou**
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. **Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice**
11. **F.-P. rovnice pro záření a atom**
12. **F.-P. rovnice pro laser**
13. **Statistické vlastnosti laserového záření**



- ▶ $\hat{H}_S |l\rangle = E_l |l\rangle$
- ▶ $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$
- ▶ $\sum_l |l\rangle\langle l| = \mathbf{1}$

Interakce je dipólová

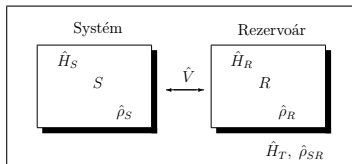
$$\hat{V} = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hbar \sum_{k,l} f_{k,l} |k\rangle\langle l|$$

Elektromagnetické pole v termodynamické rovnováze

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{SR}}{\partial t} = [(\hat{V} + \hat{H}_S + \hat{H}_R), \hat{\rho}_{SR}]$$

Liouvilova rovnice – evoluce statistického operátoru $\hat{\rho}_{SR}$ celkového systému

- ▶ Reservoir má velký počet stupňů volnosti a je v **termodynamicky rovnovážném** stavu, přičemž tento jeho stav není ovlivněný interakcí s atomem.
- ▶ Celá soustava se chová jako **Markovovský systém**, tj. *nepamatuje* si své předchozí stavy. To je splněno jen na určitém časovém intervalu.
- ▶ Problém řešíme ve **druhém řádu** teorie poruch.



► Obecná řídicí rovnice

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^l(t)}{\partial t} = - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^l(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^l(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^l(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^l(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

► Řídicí rovnice pro tlumený atom

$$i \leftrightarrow k, l; \quad \hat{Q}_i \leftrightarrow |k\rangle\langle l|; \quad \omega_i \leftrightarrow \omega_{kl} = (E_k - E_l)/\hbar; \quad w_{ij}^\pm \leftrightarrow w_{klmn}^\pm \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^l}{\partial t} = \sum_{k,l} \left\{ |l\rangle\langle k| \hat{\rho}_S^l |k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k| \hat{\rho}_S^l w_{klk}^+ - \hat{\rho}_S^l |k\rangle\langle k| w_{klk}^- \right\} + \\ + \sum'_{k,l} |k\rangle\langle k| \hat{\rho}_S^l |l\rangle\langle l| (w_{llkk}^+ + w_{llkk}^-)$$

V interakčním obrazu

$$\frac{\partial \rho_{ij}^I}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k' w_{ik} \rho_{kk}^I - \Gamma_{ij}^c \rho_{ij}^I$$

Ve schrödingerově obrazu

$$\frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k' w_{ik} \rho_{kk} - (\Gamma_{ij}^c - i\omega_{ij}) \rho_{ji}$$

- ▶ Maticové elementy: $\rho_{ji}^I = \langle j | \hat{\rho}_S^I | i \rangle$ a $\rho_{ij} = \langle i | \hat{\rho}_S^S | j \rangle$
- ▶ Bohrovy frekvence: $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$
- ▶ Pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu $w_{lk} = w_{kl}^+ + w_{kl}^-$

$$w_{ik} = \frac{2\pi}{\hbar \varepsilon_0 L^3} \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} |\vec{e}_{\lambda} \cdot \vec{d}_{ik}|^2 \left(\underbrace{\bar{n}_{\lambda} \delta(\omega_{ki} + \omega_{\lambda})}_{\text{absorpce } (\omega_{ki} < 0)} + \underbrace{(\bar{n}_{\lambda} + 1) \delta(\omega_{ki} - \omega_{\lambda})}_{\text{stim. \& spont. emise } (\omega_{ki} > 0)} \right)$$

- ▶ Tlumení a posuv frekvence (Lambův posuv)

$$\Gamma_{ij}^c = \sum_I (w_{iji}^+ + w_{iii}^-) - w_{ijj}^+ - w_{ijj}^- = \Gamma_{ij} + i\Delta\omega_{ij}$$

- ▶ $\text{Re}(\Gamma_{ij}^c) = \Gamma_{ij} > 0$
- ▶ $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma_{ij}^{ph}$
- ▶ $\Gamma_i \equiv \Gamma_{ii} = \sum_k' w_{ki} > 0$
- ▶ $\Gamma_{ij}^{ph} \approx 0$ (pro symetrické stavy atomu)

Nediagonální maticové elementy:

$$i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}$$

$$\frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = -(\Gamma_{ij} - i\omega'_{ij}) \rho_{ji}$$

Pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými hladinami $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$

$$S_{ji}(t) = S_{ji}(0) \exp [-(\Gamma_{ij} - i\omega'_{ij})t]$$

tyto členy zjevně po určitém čase relaxují k nule, neboť $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$

Diagonální maticové elementy:

$$i = j, \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{ii}}{\partial t} = \sum_k' w_{ik} \rho_{kk} - \Gamma_i \rho_{ii}$$

Pravděpodobnosti obsazení jednotlivých stavů $|i\rangle$

$$S_{ii}^{SS} = \left[\sum_j e^{-\beta\epsilon_j} \right]^{-1} e^{-\beta\epsilon_i}$$

známé – systém v tepelné rovnováze – **Boltzmannovo rozdělení** \Rightarrow

$$\Gamma_i = \sum_k' w_{ki} = \sum_k' w_{ik} e^{-\beta(\epsilon_k - \epsilon_i)}$$

- ▶ Světlo kvantově – proud **částic**, tzv. **fotonů** (energie kvanta $E = \hbar\omega$)
- ▶ Světlo klasicky – elektromagnetická **vlna**

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \Phi)$$

- ▶ **Maxwellovy rovnice** – *klasická* teorie elektromagnetického pole (1873)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Faraday}) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Ampér})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Gauss}) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauss})$$

- ▶ Materiálové vztahy

$$\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H} \quad (\text{permeabilita}), \quad \vec{D} = \vec{\varepsilon} \vec{E} \quad (\text{permitivita})$$

- ▶ $\vec{\mu}$ a $\vec{\varepsilon}$ obecně tenzory a funkce pole

Šíření světla (elektromagnetické vlny) – vlnová rovnice

1. **Vakuum** ($\vec{J} = 0, \rho = 0, \vec{\mu} = \mu_0, \vec{\epsilon} = \epsilon_0, \vec{H} = \vec{B}/\mu_0, \vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$)

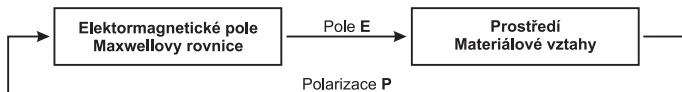
$$\text{Vlnová rovnice: } \Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{kde } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

2. **Bezeztrátové dielektrikum** ($\vec{J} = 0, \rho = 0, \vec{\mu} = \mu_0, \vec{\epsilon} = \epsilon_0\epsilon_r, \vec{H} = \vec{B}/\mu_0$)
Dielektrikum = těleso tvořené elementárními dipóly, náboje jsou vázané
Nenulová hustota vázaných nábojů $\rho_v \Rightarrow$ Polarizace dielektrika $\vec{P}(\vec{E})$

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \quad \rho_v = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

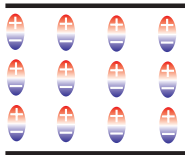
$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Interakce záření s prostředím

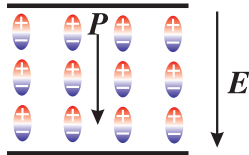


Elektrická polarizace dielektrika \vec{P}

Bez vnějšího pole

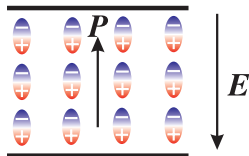
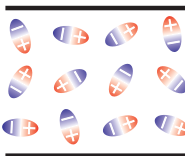


Vnějšího pole zapnuté



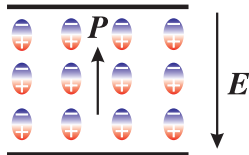
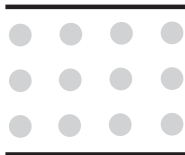
Tvrdé dielektrikum

Nenulová vlastní polarizace \mathbf{P}
 \mathbf{P} nezávisí na vnějším poli



Měkké polární dielektrikum

Střední vlastní polarizace $\mathbf{P} = 0$
Dipóly se orientují
v závislosti na vnějším poli



Měkké nepolární dielektrikum

Vlastní polarizace $\mathbf{P} = 0$
Dipóly se vytváří a orientují
v závislosti na vnějším poli

Elektrická polarizace prostředí \vec{P}

- ▶ Dielektrikum tvoří částice s vlastním nebo indukovaným dipólovým momentem
- ▶ Elektrická polarizace je odezva prostředí na vnější elektrické pole
- ▶ Polarizace \vec{P} = objemová hustota elektrického dipólového momentu dielektrika
- ▶ Pro lineární, homogenní, izotropní prostředí:

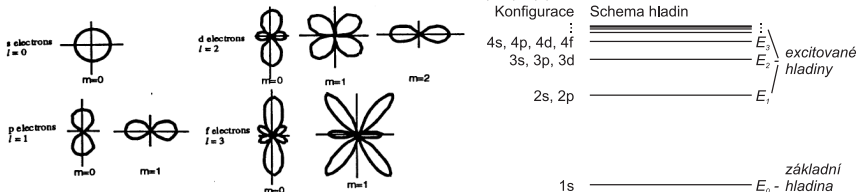
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad \text{kde } \chi \text{ je elektrická susceptibilita}$$

Vlnová rovnice má tvar:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{kde } c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \chi}}$$

- ▶ V obecném případě je nezbytné určit odezvu prostředí – polarizaci pro pravou stranu vlnové rovnice – na základě přesnějšího fyzikálního modelu dielektrika. (Klasická teorie Drude-Lorentz [5])

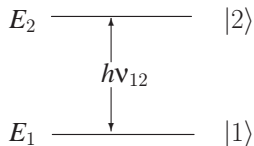
- ▶ Model prostředí – *makroskopického systému* – soubor *stejných kvantových soustav*
- ▶ Kvantová soustava – *mikroskopický systém vázaných částic* (elektron, proton, iont), které spolu interagují (elektromagnetická síla)
 - ▶ Diskrétní spektrum energetických hladin E_i (základní, 1. excitovaná, ...)
 - ▶ Diskrétní množina stavů – vlnových funkcí $|\varphi_i\rangle, |i\rangle$ – *vnitřní uspořádání*



- ▶ Interakce s okolím → výměna energie → změna energetické hladiny → změna stavu (konfigurace) → mikroskopická změna dipólového momentu → změna makroskopické polarizace souboru kvantových soustav (prostředí)
- ▶ Podmínka rezonance – zákon zachování energie (Bohrův vztah, 1913)

$$\Delta E = E_j - E_i = h\nu_{ji}$$

- ▶ **Rezonanční záření** – frekvence ν_{ji} je v rezonanci s kvantovým přechodem $|j\rangle \rightleftharpoons |i\rangle$



- ▶ Nejjednodušší model ideální kvantové soustavy
- ▶ Vychází z předpokladu, že **soustava má jen dva stacionární stavy**, tj. jen dvě energetické hladiny
- ▶ $|1\rangle, |2\rangle$ – system úplný, ortogonální
 - ▶ $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \mathbf{1}$
 - ▶ $\langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda}$
- ▶ Čistý stav
 $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle, |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
- ▶ Smíšený stav
 $\hat{\rho} = \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \rho_{12}|1\rangle\langle 2| + \rho_{21}|2\rangle\langle 1|, \rho_{ij} = \langle c_i c_j^* \rangle$

- Popis pomocí matice hustoty

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

- Čtyři komplexní čísla, ale $\hat{\rho}$ hermitovský

- $\rho_{12} = \rho_{21}^*$
- $\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = 1 = \rho_{11} + \rho_{22}$

- \Rightarrow Stačí tři reálná čísla – **Blochův vektor** $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ (DC 2.1, 2.2:

$$|\vec{R}|^2 \leq 1)$$

- $R_x = 2\text{Re}(\rho_{12})$
- $R_y = 2\text{Im}(\rho_{12})$
- $R_z = \rho_{22} - \rho_{11}$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - R_z & R_x + iR_y \\ R_x - iR_y & 1 + R_z \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 - R_z)|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}(1 + R_z)|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}(R_x + iR_y)|1\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}(R_x - iR_y)|2\rangle\langle 1|$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)}_1 + R_z \underbrace{(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|)}_{\hat{n}} + R_x \underbrace{(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)}_{\hat{a}_x} + iR_y \underbrace{(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)}_{\hat{a}_y} \right]$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + R_z \hat{n} + R_x \hat{a}_x + iR_y \hat{a}_y)$$

- ▶ Dipólový moment kvantové soustavy $\hat{\vec{d}} = e\hat{\vec{r}}$
- ▶ Atom je bez vlastního dipólového momentu, tj. $\langle 1|\hat{\vec{d}}|1\rangle = 0$, $\langle 2|\hat{\vec{d}}|2\rangle = 0$
- ▶ Dipólový moment se projeví při kvantovém přechodu, tj. $\langle 1|\hat{\vec{d}}|2\rangle \neq 0$, $\langle 2|\hat{\vec{d}}|1\rangle \neq 0$ – změna konfigurace atomu $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ ($\psi_1(\vec{r}) \leftrightarrow \psi_2(\vec{r})$)

$$\vec{d}_{12} = e \langle 1|\vec{r}|2\rangle = e \int \psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r}) dV = \vec{d}_{21}^*.$$

$$\hat{\vec{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{d}_{12} \\ \vec{d}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Střední hodnota dipólového momentu (DC 2.3)

$$\langle \vec{d} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{\vec{d}} \right\} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \vec{d}_{12} \\ \vec{d}_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \vec{d}_{12}\rho_{21} + \vec{d}_{21}\rho_{12}$$

$$\langle \vec{d} \rangle = \text{Re}(\vec{d}_{12})R_x + \text{Im}(\vec{d}_{12})R_y$$

- ▶ Makroskopická polarizace prostředí $\vec{P} = \sum \langle \vec{d} \rangle$ dipólové momenty jednotlivých kvantových soustav (měkké dielektrikum)
- ▶ Pro učení odezvy prostředí (vývoje střední hodnoty dipólového momentu) je třeba popsat vývoj dvouhladinové soustavy (určit v každém okamžiku matici hustoty)

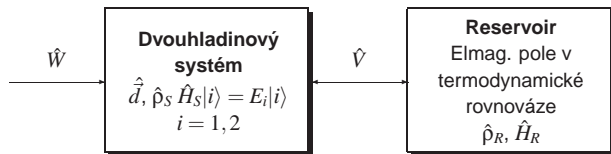
$$\begin{aligned}
 i = j, \quad \omega_{ij} = \Delta\omega_{ij} = 0 & & i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij} \\
 \frac{\partial \rho_{ii}}{\partial t} = \sum_k' w_{ik} \rho_{kk} - \Gamma_i \rho_{ii} & & \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = -(\Gamma_{ij} - i\omega'_{ij}) \rho_{ji}
 \end{aligned}$$

- ▶ Zanedbáváme posuv frekvence způsobený reservoírem a využíváme toho, že $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, $w_{21} = \Gamma_1$ a $w_{12} = \Gamma_2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} & & \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -(\Gamma_{21} - i\omega_{21}) \rho_{12} \\
 \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} & & \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -(\Gamma_{12} + i\omega_{21}) \rho_{21}
 \end{aligned}$$

- ▶ Ve stacionárním stavu – termodynamická rovnováha (DC 2.4, 2.5):

$$\begin{aligned}
 R_x = R_y = 0, \quad \langle \vec{d} \rangle = 0 \\
 R_z = \frac{\exp(-\beta E_2) - \exp(-\beta E_1)}{\exp(-\beta E_2) + \exp(-\beta E_1)} = \langle n^{ss} \rangle < 0
 \end{aligned}$$



- ▶ Energie interakce mezi atomem a polem $\vec{E}(t)$ působícím na dipólový moment příslušející tomuto atomu je dána vztahem

$$W = -\vec{d} \cdot \vec{E}(t)$$

- ▶ Odpovídající kvantový operátor interakce dvouhladinové soustavy s **klasickým elektromagnetickým polem**, představuje příspěvek od klasické síly

$$\hat{W} = -\hat{d} \cdot \vec{E}(t)$$

- ▶ Pauliho rovnice bez vnější síly:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = \langle j | [(\hat{V} + \hat{H}_S), \hat{\rho}] | i \rangle$$

- ▶ Po započtení působení vnější síly \hat{W} bude mít Liouvilova (respektive příslušná Pauliho) rovnice tvar:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = \langle j | [(\hat{V} + \hat{H}_S), \hat{\rho}] | i \rangle + \langle j | [\hat{W}, \hat{\rho}] | i \rangle$$

- ▶ Pro započtení takovéto síly do Pauliho rovnice stačí na její pravou stranu přidat člen $\langle j | [\hat{W}, \hat{\rho}] | i \rangle$.
- ▶ Rozepíšeme operátor \hat{W} do báze $|i\rangle\langle j|$:

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \hat{1} \hat{W} \hat{1} = (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) (-\hat{d}) (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) \cdot \vec{E}(t) = \\ &= -(|1\rangle\langle 1| \vec{d}_{11} + |2\rangle\langle 1| \vec{d}_{21} + |1\rangle\langle 2| \vec{d}_{12} + |2\rangle\langle 2| \vec{d}_{22}) \cdot \vec{E}(t) \end{aligned}$$

- ▶ Díky symetrii vlnových funkcí příslušejících stavům $|1\rangle$ a $|2\rangle$ platí $\vec{d}_{11} = \vec{d}_{22} = 0$

$$\hat{W} = -\vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) |1\rangle\langle 2| - \vec{d}_{21} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) |2\rangle\langle 1|$$

- ▶ Příspěvek od klasické síly \hat{W} k Pauliho rovnici bude mít tvar (DC 2.6):

$$\begin{aligned} \langle i | [\hat{W}, \hat{\rho}] | j \rangle = & -\vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \langle i | 1 \rangle \langle 2 | \hat{\rho} | j \rangle - \vec{d}_{21} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \langle i | 2 \rangle \langle 1 | \hat{\rho} | j \rangle + \\ & + \vec{d}_{12} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \langle i | \hat{\rho} | 1 \rangle \langle 2 | j \rangle + \vec{d}_{21} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \langle i | \hat{\rho} | 2 \rangle \langle 1 | j \rangle \end{aligned}$$

- ▶ Po dosazení příspěvku od klasické síly \hat{W} budou mít **Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom v silném vnějším elektromagnetickém poli** tvar:

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + i \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12} \rho_{21} - \vec{d}_{21} \rho_{12}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + i \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21} \rho_{12} - \vec{d}_{12} \rho_{21}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -(\Gamma_{21} - i\omega_{21}) \rho_{12} + i \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{12} (\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -(\Gamma_{21} + i\omega_{21}) \rho_{21} - i \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{21} (\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (4)$$

- ▶ Cílem je na základě systému rovnic Pauliových rovnic pro prvky matice hustoty napsat rovnice pro měřitelné veličiny
 - ▶ dipólový moment atomu $\langle \vec{d} \rangle = \vec{d}_{21} \rho_{12} + \vec{d}_{12} \rho_{21}$
 - ▶ a střední hodnotu rozdílu populace horní a dolní hladiny $\langle \hat{n} \rangle = \rho_{22} - \rho_{11}$
- ▶ Hledané rovnice (DC – odvození rovnice 2.68):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \langle \vec{d} \rangle = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 \langle n \rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (\langle n \rangle - \langle n^{SS} \rangle) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \langle \vec{d} \rangle$$

- ▶ $T_1 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)^{-1}$ je relaxační doba inverze populace (podélná) – souvisí s fluorescenční dobou;
- ▶ $T_2 = \Gamma_{21}^{-1}$ je relaxační doba polarizace (příčná) – souvisí s celkovou šířkou homogenně rozšířené spektrální čáry.

- ▶ **Velká soustava stejných dvouhladinových tlumených systémů** interagujících s klasickým elmag. polem.
- ▶ Jediná vzájemná komunikace těchto systémů je zprostředkována právě tímto klasickým polem
- ▶ Statisticky významný počet kvantových soustav – střední objemová hustota \bar{N}
 - ▶ Makroskopická polarizace $\vec{P} = \bar{N}\langle\vec{d}\rangle$
 - ▶ Inverze populace hladin $N = \bar{N}\langle n\rangle$
- ▶ Dostaneme rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin nahrazující materiálové vztahy

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\bar{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P}$$

- ▶ Přidáme rovnici pro pole – klasickou vlnovou rovnici sestavenou na základě MR

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

- ▶ Deterministické pole popisujeme klasiky – Maxwellovy rovnice → vlnová rovnice:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

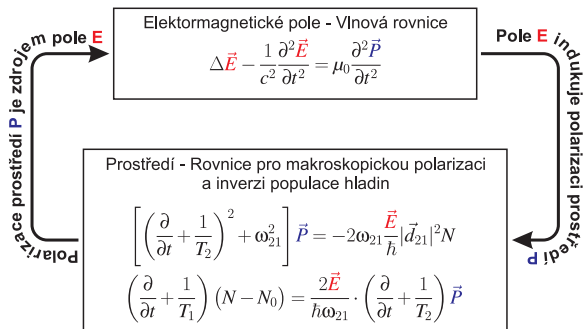
- ▶ Prostředí složené z tlumených dvouhladinových soustav popisujeme na základě kvantové teorie – Pauliovy rovnice → rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin nahrazující materiálové vztahy:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P}$$

- ▶ Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy dvouhladinové kvantové soustavy

Rovnice poloklasické teorie interakce látky a záření



\vec{E} Elmag. pole

\vec{P} Makroskopická polarizace

N Inverze populace hladin

N_0 Inverze populace hladin bez vnějšího pole







T_1 Relaxace inverze populace hladin

T_2 Relaxace makroskopické polarizace

ω_{21} Rezonanční frekvence

$|\vec{d}_{21}|$ Velikost dipólového momentu

- ▶ Poloklasická teorie interakce záření s látkou – záření klasicky, **látka kvantově**.
- ▶ Šíření záření popisuje vlnová rovnice. Odezvu prostředí vyjadřuje polarizace prostředí.
- ▶ Látka = soubor **mnoha stejných** kvantových soustav.
- ▶ Základní model kvantové soustavy – tlumená **dvouhladinová** kvantová soustava.
 - ▶ Stav popsán pomocí matice hustoty 2×2
 - ▶ Rezonanční frekvence $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$
 - ▶ Časový vývoj popisují Pauliho rovnice
 - ▶ Pro stanovení odezvy nás zajímá střední hodnota dipólového momentu kvantové soustavy $\langle \vec{d} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \vec{d} \} = \vec{d}_{12} \rho_{21} + \vec{d}_{21} \rho_{12}$
- ▶ Poloklasický operátor pro interakci klasického pole a kvantové soustavy $\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$
- ▶ Od Pauliho rovnic k rovnicím pro měřitelné $\langle \vec{d} \rangle$ a $\langle n \rangle$ a pak středování přes velký soubor stejných kvantových soustav \rightarrow rovnice pro \vec{P} a N , vyjadřující poloklasickou odezvu prostředí na rezonanční záření. Spolu s vlnovou rovnicí tvoří **úplný systém** pro poloklasický popis interakce rezonančního záření s látkou.

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>