Fyzika laserů

Tlumený dvouhladinový systém v silném elektromagnetickem poli

Jan Šulc

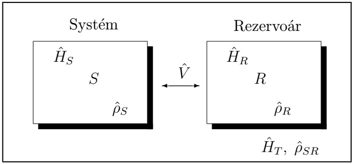
Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

15. dubna 2020

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. **Poloklasický popis interakce záření s látkou**
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Interakce ATOM – REZERVOÁR



- $\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle$
- $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$
- $\sum_l |l\rangle\langle l| = \mathbf{1}$

Interakce je dipólová

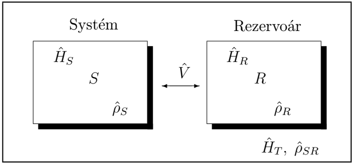
$$\hat{V} = -e\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{E}} = \hbar \sum_{k,l} f_{k,l}|k\rangle\langle l|$$

Elektromagnetické pole v termodynamické rovnováze

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}_{SR}}{\partial t} = \left[\left(\hat{V} + \hat{H}_S + \hat{H}_R\right), \hat{\rho}_{SR}\right]$$

Liouvilova rovnice – evoluce statistického operátoru $\hat{\rho}_{SR}$ celkového systému

- Reservoir má velký počet stupňů volnosti a je v termodynamicky rovnovážném stavu, přičemž tento jeho stav není ovlivněný interakcí s atomem.
- Celá soustava se chová jako Markovovský systém, tj. *nepamatuje* si své předchozí stavy. To je splněno jen na určitém časovém intervalu.
- Problém řešíme ve druhém řádu teorie poruch.



- Obecná řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I(t)}{\partial t} = -\sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j)\times$$
$$\times\left\{\left(\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_i^S\right) w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}_S^I(t)\hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S\right) w_{ji}^-\right\}$$

- Řídící rovnice pro tlumený atom

$$i \leftrightarrow k,l; \quad \hat{Q}_i \leftrightarrow |k\rangle\langle l|; \quad \omega_i \leftrightarrow \omega_{kl} = (E_k - E_l)/\hbar; \quad w_{ij}^{\pm} \leftrightarrow w_{klmn}^{\pm} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \hat{\varrho}_S^I}{\partial t} = \sum_{k,l}\left\{|l\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle l| w_{lk} - |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\, w_{kllk}^+ - \hat{\varrho}_S^I\,|k\rangle\langle k| w_{kllk}^-\right\} +$$
$$+\sum_{k,l}{}' |k\rangle\langle k|\hat{\varrho}_S^I\,|l\rangle\langle l|\left(w_{llkk}^+ + w_{llkk}^-\right)$$

Pauliho řídící rovnice – řídící rovnice pro prvky matice hustoty

V interakčním obrazu

$$\frac{\partial \varrho^I_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho^I_{kk} - \Gamma^c_{ij} \varrho^I_{ji}$$

Ve schrödingerově obrazu

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k{}' w_{ik}\, \varrho_{kk} - \left(\Gamma^c_{ij} - \mathrm{i}\omega_{ij}\right) \varrho_{ji}$$

- Maticové elementy: $\varrho^I_{ji} = \langle j|\hat{\varrho}^I_S|i\rangle$ a $\varrho_{ij} = \langle i|\hat{\varrho}^S_S|j\rangle$
- Bohrovy frekvence: $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$
- Pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu $w_{lk} = w^+_{kllk} + w^-_{kllk}$

$$w_{ik} = \frac{2\pi}{\hbar\varepsilon_0 L^3} \sum_\lambda \omega_\lambda |\vec{e}_\lambda \cdot \vec{d}_{ik}|^2 \Big(\underbrace{\bar{n}_\lambda \delta(\omega_{ki} + \omega_\lambda)}_{\text{absorpce } (\omega_{ki}<0)} + \underbrace{(\bar{n}_\lambda + 1)\delta(\omega_{ki} - \omega_\lambda)}_{\text{stim. \& spont. emise } (\omega_{ki}>0)} \Big)$$

- Tlumení a posuv frekvence (Lambův posuv)

$$\Gamma^c_{ij} = \sum_l (w^+_{ljjl} + w^-_{illi}) - w^+_{iijj} - w^-_{iijj} = \Gamma_{ij} + \mathrm{i}\Delta\omega_{ij}$$

  - $\mathbf{Re}(\Gamma^c_{ij}) = \Gamma_{ij} > 0$
  - $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma^{ph}_{ij}$
  - $\Gamma_i \equiv \Gamma_{ii} = \sum_k' w_{ki} > 0$
  - $\Gamma^{ph}_{ij} \approx 0$ (pro symetrické stavy atomu)

Pauliho řídící rovnice

Nediagonální maticové elementy:

$$i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right) \varrho_{ji}$$

Pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými hladinami $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$

$$S_{ji}(t) = S_{ji}(0) \exp\left[-(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij})t\right]$$

tyto členy zjevně po určitém čase relaxují k nule, neboť $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} > 0$

Diagonální maticové elementy:

$$i = j, \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\, \varrho_{kk} - \Gamma_i\, \varrho_{ii}$$

Pravděpodobnosti obsazení jednotlivých stavů $|i\rangle$

$$S_{ii}^{SS} = \left[\sum\nolimits_{j} \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_j}\right]^{-1} \mathrm{e}^{-\beta\epsilon_i}$$

známé – systém v tepelné rovnováze – Boltzmannovo rozdělení $\Rightarrow$

$$\Gamma_i = \sum\nolimits'_{k} w_{ki} = \sum\nolimits'_{k} w_{ik}\,\mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_k - \epsilon_i)}$$

Klasický popis záření – světlo

- Světlo kvantově – proud částic, tzv. **fotonů** (energie kvanta $E = \hbar\omega$)
- Světlo klasicky – elektromagnetická vlna

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \Phi)$$

- Maxwellovy rovnice – *klasická* teorie elektromagnetického pole (1873)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{(Faraday)} & \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Ampér)} \\ \vec{\nabla} . \vec{D} &= \rho \quad \text{(Gauss)} & \vec{\nabla} . \vec{B} &= 0 \quad \text{(Gauss)} \end{aligned}$$

- Materiálové vztahy

$$\vec{B} = \bar{\mu} \vec{H} \quad \text{(permeabilita)}, \quad \vec{D} = \bar{\varepsilon} \vec{E} \quad \text{(permitivita)}$$

- $\bar{\mu}$ a $\bar{\varepsilon}$ obecně tenzory a funkce pole

Šíření světla (elektromagnetické vlny) – vlnová rovnice

1. **Vakuum** ($\vec{J} = 0$, $\rho = 0$, $\bar{\mu} = \mu_0$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$)

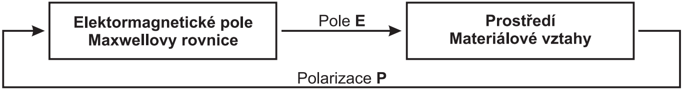
$$\text{Vlnová rovnice:} \quad \Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{kde} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

2. **Bezeztrátové dielektrikum** ($\vec{J} = 0$, $\rho = 0$, $\bar{\mu} = \mu_0$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$)
   Dielektrikum = těleso tvořené elementárními dipóly, náboje jsou vázané
   Nenulová hustota vázaných nábojů $\varrho_v \Rightarrow$ Polarizace dielektrika $\vec{P}(\vec{E})$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad \varrho_v = -\vec{\nabla}.P$$

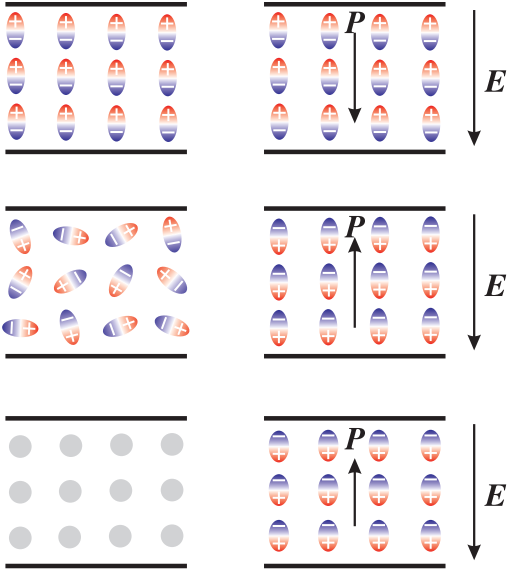
$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

Interakce záření s prostředím



Elektrická polarizace dielektrika $\vec{P}$

Bez vnějšího pole | Vnějšího pole zapnuté



Tvrdé dielektrikum
Nenulová vlastní polarizace $\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{P}$ nezávisí na vnějším poli

Měkké polární dielektrikum
Střední vlastní polarizace $\boldsymbol{P} = 0$
Dipóly se orientují
v závislosti na vnějším poli

Měkké nepolární dielektrikum
Vlastní polarizace $\boldsymbol{P} = 0$
Dipóly se vytváří a orientují
v závislosti na vnějším poli

Elektrická polarizace prostředí $\vec{P}$

- Dielektrikum tvoří částice s vlastním nebo indukovaným dipólovým momentem
- Elektrická polarizace je odezva prostředí na vnější elektrické pole
- Polarizace $\vec{P}$ = objemová hustota elektrického dipólového momentu dielektrika
- Pro lineární, homogenní, izotropní prostředí:

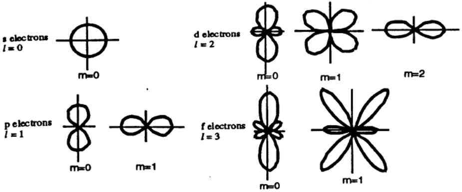
$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad \text{kde } \chi \text{ je elektrická susceptibilita}$$

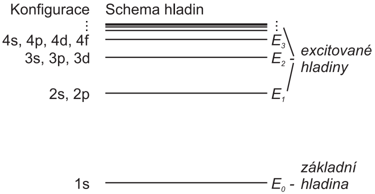
Vlnová rovnice má tvar:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{kde} \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{1+\chi}}$$

- V obecném případě je nezbytné určit odezvu prostředí – polarizaci pro pravou stranu vlnové rovnice – na základě přesnějšího fyzikálního modelu dielektrika. (Klasická teorie Drude-Lorentz [5])

- Model prostředí – *makroskopického systému* – soubor *stejných* kvantových soustav
- Kvantová soustava – *mikroskopický systém vázaných částic* (elektron, proton, iont), které spolu interagují (elektromagnetická síla)
  - Diskrétní spektrum energetických hladin E_i (základní, 1. excitovaná,. . .)
  - Diskrétní množina stavů – vlnových funkcí $|\varphi_i\rangle$, $|i\rangle$ – *vnitřní uspořádání*

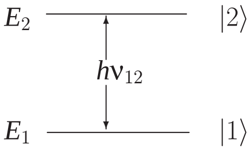




- Interakce s okolím → výměna energie → změna energetické hladiny → změna stavu (konfigurace) → mikroskopická změna dipólového momentu → změna makroskopické polarizace souboru kvantových soustav (prostředí)
- Podmínka rezonance – zákon zachování energie (Bohrův vztah, 1913)

$$\Delta E = E_j - E_i = h\nu_{ji}$$

- Rezonanční záření – frekvence ν_{ji} je v rezonanci s kvantovým přechodem $|j\rangle \rightleftharpoons |i\rangle$



- Nejjednodužší model ideální kvantové soustavy
- Vychází z předpokladu, že soustava má jen dva stacionární stavy, tj. jen dvě energetické hladiny
- $|1\rangle$, $|2\rangle$ – system úplný, ortogonální
  - $|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \mathbf{1}$
  - $\langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda' \lambda}$
- Čistý stav
  $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
- Smíšený stav
  $\hat{\rho} = \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + \rho_{22}|2\rangle\langle 2| + \rho_{12}|1\rangle\langle 2| + \rho_{21}|2\rangle\langle 1|$, $\rho_{ij} = \langle c_i c_j^* \rangle$

- Popis pomocí matice hustoty

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

- Čtyři komplexní čísla, ale $\hat{\rho}$ hermitovský
  - $\rho_{12} = \rho_{21}^*$
  - $\mathrm{Tr}\,\{\hat{\rho}\} = 1 = \rho_{11} + \rho_{22}$
- $\Rightarrow$ Stačí tři reálná čísla – Blochův vektor $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ (DC 2.1, 2.2: $|\vec{R}|^2 \leq 1$)
  - $R_x = 2\mathrm{Re}(\rho_{12})$
  - $R_y = 2\mathrm{Im}(\rho_{12})$
  - $R_z = \rho_{22} - \rho_{11}$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - R_z & R_x + \mathrm{i}R_y \\ R_x - \mathrm{i}R_y & 1 + R_z \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 - R_z)|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}(1 + R_z)|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}(R_x + \mathrm{i}R_y)|1\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}(R_x - \mathrm{i}R_y)|2\rangle\langle 1|$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)}_{\mathbf{1}} + R_z\underbrace{(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|)}_{\hat{n}} + R_x\underbrace{(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)}_{\hat{d}_x} + \mathrm{i}R_y\underbrace{(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)}_{\hat{d}_y}\Big]$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + R_z\,\hat{n} + R_x\,\hat{d}_x + \mathrm{i}R_y\,\hat{d}_y\right)$$

Dvouhladinový systém – Dipólový moment

- Dipólový moment kvantové soustavy $\hat{\vec{d}} = e\hat{\vec{r}}$
- Atom je bez vlastního dipólového momentu, tj. $\langle 1|\hat{\vec{d}}|1\rangle = 0$, $\langle 2|\hat{\vec{d}}|2\rangle = 0$
- Dipólový moment se projeví při kvantovém přechodu , tj. $\langle 1|\hat{\vec{d}}|2\rangle \neq 0$, $\langle 2|\hat{\vec{d}}|1\rangle \neq 0$ – změna konfigurace atomu $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ $(\psi_1(\vec{r}) \leftrightarrow \psi_2(\vec{r}))$

$$\vec{d}_{12} = e\,\langle 1|\vec{r}|2\rangle = e\int \psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2(\vec{r})\,dV = \vec{d}_{21}^*.$$

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{d}_{12} \\ \vec{d}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

- Střední hodnota dipólového momentu (DC 2.3)

$$\langle\vec{d}\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\hat{\vec{d}}\right\} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & \vec{d}_{12} \\ \vec{d}_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \vec{d}_{12}\rho_{21} + \vec{d}_{21}\rho_{12}$$

$$\langle\vec{d}\rangle = \mathrm{Re}(\vec{d}_{12})R_x + \mathrm{Im}(\vec{d}_{12})R_y$$

- Makroskopická polarizace prostředí $P = \sum\langle\vec{d}\rangle$ dipólové momenty jednotlivých kvantových soustav (měkké dielektrikum)
- Pro učení odezvy prostředí (vývoje střední hodnoty dipólového momentu) je třeba popsat vývoj dvouhladinové soustavy (určit v každém okamžiku matici hustoty)

Dvouhladinový systém – Pauliho řídící rovnice

$$i = j, \quad \omega_{ii} = \Delta\omega_{ii} = 0 \qquad\qquad i \neq j, \quad \omega'_{ij} = \omega_{ij} + \Delta\omega_{ij}$$

$$\frac{\partial \varrho_{ii}}{\partial t} = \sum\nolimits'_k w_{ik}\, \varrho_{kk} - \Gamma_i\, \varrho_{ii} \qquad\qquad \frac{\partial \varrho_{ji}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{ij} - \mathrm{i}\omega'_{ij}\right) \varrho_{ji}$$

- Zanedbáváme posuv frekvence způsobený reservoirem a využíváme toho, že $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, $w_{21} = \Gamma_1$ a $w_{12} = \Gamma_2$.

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} \qquad\qquad \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} - \mathrm{i}\omega_{21}\right) \rho_{12}$$

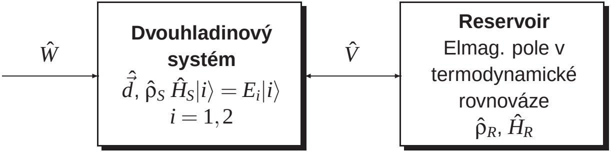
$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} \qquad\qquad \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_{21}\right) \rho_{21}$$

- Ve stacionárním stavu – termodynamická rovnováha (DC 2.4, 2.5):

$$R_x = R_y = 0, \quad \langle \vec{d} \rangle = 0$$

$$R_z = \frac{\exp(-\beta E_2) - \exp(-\beta E_1)}{\exp(-\beta E_2) + \exp(-\beta E_1)} = \langle n^{SS} \rangle < 0$$

Tlumený dvouhladinový systém v silném elmag. poli



- Energie interakce mezi atomem a polem $\vec{E}(t)$ působícím na dipólový moment příslušející tomuto atomu je dána vztahem

$$W = -\vec{d} \cdot \vec{E}(t)$$

- Odpovídající kvantový operátor interakce dvouhladinové soustavy s klasickým elektromagnetickým polem, představuje příspěvek od klasické síly

$$\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$$

Zavedení vnější síly do Pauliho rovnice

- Pauliho rovnice bez vnější síly:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\rho_{ji}}{\partial t} = \langle j|\left[\left(\hat{V}+\hat{H}_S\right),\hat{\rho}\right]|i\rangle$$

- Po započtení působení vnější síly $\hat{W}$ bude mít Liouvilova (respektive příslušná Pauliho) rovnice tvar:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\rho_{ji}}{\partial t} = \langle j|\left[\left(\hat{V}+\hat{H}_S\right),\hat{\rho}\right]|i\rangle + \langle j|\left[\hat{W},\hat{\rho}\right]|i\rangle$$

- Pro započtení takovéto síly do Pauliho rovnice stačí na její pravou stranu přidat člen $\langle j|[\hat{W},\hat{\rho}]|i\rangle$.
- Rozepíšeme operátor $\hat{W}$ do báze $|i\rangle\langle j|$:

$$\begin{aligned}\hat{W} = \hat{1}\hat{W}\hat{1} &= \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)\left(-\hat{\vec{d}}\,\right)\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)\cdot\vec{E}(t) = \\ &= -\left(|1\rangle\langle 1|\vec{d}_{11} + |2\rangle\langle 1|\vec{d}_{21} + |1\rangle\langle 2|\vec{d}_{12} + |2\rangle\langle 2|\vec{d}_{22}\right)\cdot\vec{E}(t)\end{aligned}$$

- Díky symetrii vlnových funkcí příslušejících stavům $|1\rangle$ a $|2\rangle$ platí $\vec{d}_{11} = \vec{d}_{22} = 0$

$$\hat{W} = -\vec{d}_{12}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)|1\rangle\langle 2| - \vec{d}_{21}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)|2\rangle\langle 1|$$

Zavedení vnější síly do Pauliho rovnice

- Příspěvek od klasické síly $\hat{W}$ k Pauliho rovnici bude mít tvar (DC 2.6):

$$\langle i|\left[\hat{W},\hat{\rho}\right]|j\rangle = -\vec{d}_{12}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\langle i|1\rangle\langle 2|\hat{\rho}|j\rangle - \vec{d}_{21}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\langle i|2\rangle\langle 1|\hat{\rho}|j\rangle + \\ + \vec{d}_{12}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\langle i|\hat{\rho}|1\rangle\langle 2|j\rangle + \vec{d}_{21}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\langle i|\hat{\rho}|2\rangle\langle 1|j\rangle$$

- Po dosazení příspěvku od klasické síly $\hat{W}$ budou mít Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom v silném vnějším elektromagnetickém poli tvar:

$$\frac{\partial\rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2\rho_{22} - \Gamma_1\rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar}\cdot(\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1\rho_{11} - \Gamma_2\rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar}\cdot(\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} - \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{12} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar}\cdot\vec{d}_{12}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho_{21}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} + \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{21} - \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar}\cdot\vec{d}_{21}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{4}$$

Přechod od Pauliových rovnic k rovnicím pro měřitelné

- Cílem je na základě systému rovnic Pauliových rovnic pro prvky matice hustoty napsat rovnice pro měřitelné veličiny
  - dipólový moment atomu $\langle \hat{\vec{d}}\, \rangle = \vec{d}_{21}\varrho_{12} + \vec{d}_{12}\varrho_{21}$
  - a střední hodnotu rozdílu populace horní a dolní hladiny $\langle \hat{n} \rangle = \varrho_{22} - \varrho_{11}$
- Hledané rovnice (DC – odvození rovnice 2.68):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right] \langle \vec{d} \rangle = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 \langle n \rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)\left(\langle n \rangle - \langle n^{SS} \rangle\right) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\langle \vec{d} \rangle$$

- $T_1 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)^{-1}$ je relaxační doba inverze populace (podélná) – souvisí s fluorescenční dobou;
- $T_2 = \Gamma_{21}^{-1}$ je relaxační doba polarizace (příčná) – souvisí s celkovou šířkou homogenně rozšířené spektrální čáry.

Soubor tlumených dvouhladinových systémů v silném elmag. poli

- Velká soustava stejných dvouhladinových tlumených systémů interagujících s klasickým elmag. polem.
- Jediná vzájemná komunikace těchto systémů je zprostředkovaná právě tímto klasickým polem
- Statisticky významný počet kvantových soustav – střední objemová hustota $\bar{N}$
  - Makroskopická polarizace $\vec{P} = \bar{N}\langle\vec{d}\,\rangle$
  - Inverze populace hladin $N = \bar{N}\langle n\rangle$
- Dostaneme rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin nahrazující materiálové vztahy

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Přidáme rovnici pro pole – klasickou vlnovou rovnici sestavenou na základě MR

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

Rovnice poloklasické teorie interakce látky a záření

- Deterministické pole popisujeme klasiky – Maxwellovy rovnice $\rightarrow$ vlnová rovnice:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

- Prostředí složené z tlumených dvouhladinových soustav popisujeme na základě kvantové teorie – Pauliovy rovnice $\rightarrow$ rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin nahrazující materiálové vztahy:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy dvouhladinové kvantové soustavy

Polarizace prostředí **P** je zdrojem pole **E**

Elektormagnetické pole - Vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

Pole **E** indukuje polarizaci prostředí **P**

Prostředí - Rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{T_2}\right)^2+\omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{T_1}\right)(N-N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

$\vec{E}$	Elmag. pole	T_1	Relaxace inverze populace hladin
$\vec{P}$	Makroskopická polarizace	T_2	Relaxace makroskopické polarizace
N	Inverze populace hladin	ω_{21}	Rezonanční frekvence
N_0	Inverze populace hladin bez vnějšího pole	$\lvert\vec{d}_{21}\rvert$	Velikost dipólového momentu

Shrnutí

- Poloklasická teorie interakce záření s látkou – záření klasicky, **látka kvantově**.
- Šíření záření popisuje vlnová rovnice. Odezvu prostředí vyjadřuje polarizace prostředí.
- Látka $=$ soubor **mnoha stejných** kvantových soustav.
- Základní model kvantové soustavy – tlumená **dvouhladinová** kvantová soustava.
  - Stav popsaný pomocí matice hustoty 2×2
  - Rezonanční frekvence $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$
  - Časový vývoj popisují Pauliho rovnice
  - Pro stanovení odezvy nás zajímá střední hodnota dipólového momentu kvantové soustavy $\langle \vec{d} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}\hat{\vec{d}} \right\} = \vec{d}_{12}\rho_{21} + \vec{d}_{21}\rho_{12}$
- Poloklasický operátor pro interakci klasického pole a kvantové soustavy $\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$
- Od Pauliho rovnic k rovnicím pro měřitelné $\langle \vec{d} \rangle$ a $\langle n \rangle$ a pak středování přes velký soubor stejných kvantových soustav $\rightarrow$ rovnice pro $\vec{P}$ a N, vyjadřující poloklasickou odezvu prostředí na rezonanční záření. Spolu s vlnovou rovnicí tvoří **úplný systém** pro poloklasický popis interakce rezonančního záření s látkou.

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/