Fyzika laserů

Poloklasický popis šíření elmg. záření v rezonančním prostředí.

Jan Šulc

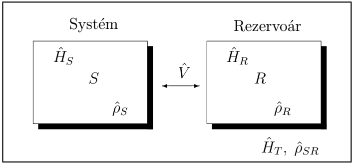
Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

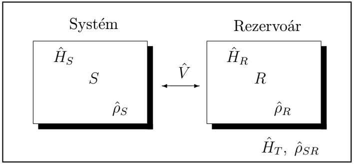
20. dubna 2020

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. **Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím**
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Interakce ATOM – REZERVOÁR





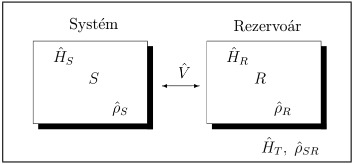
- $\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle$
- $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$
- $\sum_l |l\rangle\langle l| = \mathbf{1}$

Interakce je dipólová

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} f_{k,l}|k\rangle\langle l| = -e\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{E}}$$

Elektromagnetické pole v termodynamické rovnováze

Interakce ATOM – REZERVOÁR



- $\hat{H}_S|l\rangle = E_l|l\rangle$
- $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$
- $\sum_l |l\rangle\langle l| = \mathbf{1}$

Interakce je dipólová

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} f_{k,l}|k\rangle\langle l| = -e\hat{\vec{r}}\cdot\hat{\vec{E}}$$

Elektromagnetické pole v termodynamické rovnováze

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}_C}{\partial t} = \left[\left(\hat{V} + \hat{H}_S + \hat{H}_R\right), \hat{\rho}_C\right]$$

Liouvilova rovnice $\Rightarrow$ řídící rovnice $\Rightarrow$ Pauliho ronice

$$\frac{\partial\varrho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij}\sum_k{}' w_{ik}\,\varrho_{kk} - \left(\Gamma_{ij}^c - \mathrm{i}\omega_{ij}\right)\varrho_{ji}$$

Pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu w_{lk}
Tlumení a posuv frekvence Γ_{ij}^c

Prostředí soubor kvantových soustav (dvouhladinových), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Interakce rezonančního záření s prostředím – poloklasický popis

Prostředí soubor kvantových soustav (dvouhladinových), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Interakce rezonančního záření s prostředím – poloklasický popis

Prostředí soubor kvantových soustav (dvouhladinových), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Rezonanční záření frekvence v rezonanci s kvantovým přechodem (Bohrův vztah)

Interakce rezonančního záření s prostředím – poloklasický popis

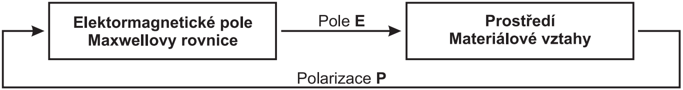
Prostředí soubor kvantových soustav (dvouhladinových), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Rezonanční záření frekvence v rezonanci s kvantovým přechodem (Bohrův vztah)

Interakce záření s prostředím prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

$$\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$$



Pole klasicky $+$ prostředí kvantově $\rightarrow$ poloklasický popis

Interakce rezonančního záření s prostředím – poloklasický popis

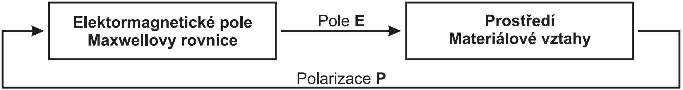
Prostředí soubor kvantových soustav (dvouhladinových), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Rezonanční záření frekvence v rezonanci s kvantovým přechodem (Bohrův vztah)

Interakce záření s prostředím prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

$$\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$$



Pole klasicky $+$ prostředí kvantově $\rightarrow$ poloklasický popis

Pauliho rovnice popisují chování tlumené kvantové soustavy s pomocí časového vývoje elementů matice hustoty. Přechodem k makroskopickým veličinám $\vec{P}$ a N získáme rovnice pro odezvu prostředí.

$$\vec{P} = \bar{N}(\vec{d}_{21}\varrho_{12} + \vec{d}_{12}\varrho_{21})$$

$$N = \bar{N}(\varrho_{22} - \varrho_{11})$$

Rovnice poloklasické teorie interakce hmoty a pole

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + {\omega_{21}}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \tag{3}$$

Rovnice poloklasické teorie interakce hmoty a pole

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + {\omega_{21}}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \tag{3}$$

- Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy dvouhladinové kvantové soustavy

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}{}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \tag{3}$$

- Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy dvouhladinové kvantové soustavy
- Vzájemně vázané nelineární vektorové parciální diferenciální rovnice druhého řádu $\Rightarrow$ vlastně je to celkem 7 rovnic

$\vec{E}$	Elmag. pole	T_1	Relaxace inverze populace hladin
$\vec{P}$	Makroskopická polarizace	T_2	Relaxace makroskopické polarizace
N	Inverze populace hladin	ω_{21}	Rezonanční frekvence
N_0	Inverze populace hladin bez vnějšího pole	$\lvert\vec{d}_{21}\rvert$	Velikost dipólového momentu

Rovnice pro komplexní analyticky sdružený signál

- Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi

Rovnice pro komplexní analyticky sdružený signál

- Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi
- Někdy je výhodné reálným signálům přiřadit komplexní funkce – komplexní analyticky sdružený signál, přitom jeho reálná část je rovna reálnému (skutečnému) signálu. Např. rovinná elektromagnetická vlna:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

Rovnice pro komplexní analyticky sdružený signál

- Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi
- Někdy je výhodné reálným signálům přiřadit komplexní funkce – komplexní analyticky sdružený signál, přitom jeho reálná část je rovna reálnému (skutečnému) signálu. Např. rovinná elektromagnetická vlna:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

- Příslušný komplexní analyticky sdružený signál:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)}.$$

Rovnice pro komplexní analyticky sdružený signál

- Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi
- Někdy je výhodné reálným signálům přiřadit komplexní funkce – komplexní analyticky sdružený signál, přitom jeho reálná část je rovna reálnému (skutečnému) signálu. Např. rovinná elektromagnetická vlna:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

- Příslušný komplexní analyticky sdružený signál:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)}.$$

- Z komplexního analyticky sdruženého signálu je snadné vyjádřit reálné signály

$$\vec{E}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \vec{P}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{P} + \vec{P}^*)$$

Rovnice pro komplexní analyticky sdružený signál

- Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi
- Někdy je výhodné reálným signálům přiřadit komplexní funkce – komplexní analyticky sdružený signál, přitom jeho reálná část je rovna reálnému (skutečnému) signálu. Např. rovinná elektromagnetická vlna:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

- Příslušný komplexní analyticky sdružený signál:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)}.$$

- Z komplexního analyticky sdruženého signálu je snadné vyjádřit reálné signály

$$\vec{E}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \vec{P}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{P} + \vec{P}^*)$$

- Po dosazení do soustavy rovnic poloklasické teorie (DC 2.8):

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}\,, \tag{4}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\,\omega_{21}\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\vec{E}N\,, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]. \tag{6}$$

Stacionární signál monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál
: monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí
: rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

Stacionární signál monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

- Fázová rychlost vlny

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{(1+\chi)}}$$

Stacionární signál monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

- Fázová rychlost vlny

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{(1+\chi)}}$$

- Index lomu

$$n_{ref} = \sqrt{(1+\chi)}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$
- Inverze populace hladin N se blíží své ustálené hodnotě N_0

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$
- Inverze populace hladin N se blíží své ustálené hodnotě N_0
- Šíření harmonických signálů s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E_0}(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P_0}(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$
- Inverze populace hladin N se blíží své ustálené hodnotě N_0
- Šíření harmonických signálů s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Odezvu prostředí popisuje rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$
- Inverze populace hladin N se blíží své ustálené hodnotě N_0
- Šíření harmonických signálů s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E_0}(z, \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P_0}(z, \omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Odezvu prostředí popisuje rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme ($\partial\vec{P}/\partial t = \mathrm{i}\omega\vec{P}$):

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P_0}(z, \omega)}{\varepsilon_0\vec{E_0}(z, \omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E} \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}$
- Inverze populace hladin N se blíží své ustálené hodnotě N_0
- Šíření harmonických signálů s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Odezvu prostředí popisuje rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme ($\partial\vec{P}/\partial t = \mathrm{i}\omega\vec{P}$):

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z,\omega)}{\varepsilon_0\vec{E}_0(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Susceptibilita $\chi(\omega)$ – komplexní, frekvenčně závislá veličina

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\omega) \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\omega) \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Pro velké blízké frekvence ω_{21} a ω ($\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$, $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\omega) \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Pro velké blízké frekvence ω_{21} a ω ($\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$, $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

- Předpokládáme $T_2 \gg \omega_{21}^{-1}$ ($T_2 \sim 10^{-9}$ s, $\omega_{21} \sim 10^{15}$ s^{-1})

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2}}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\omega) \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Pro velké blízké frekvence ω_{21} a ω ($\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$, $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

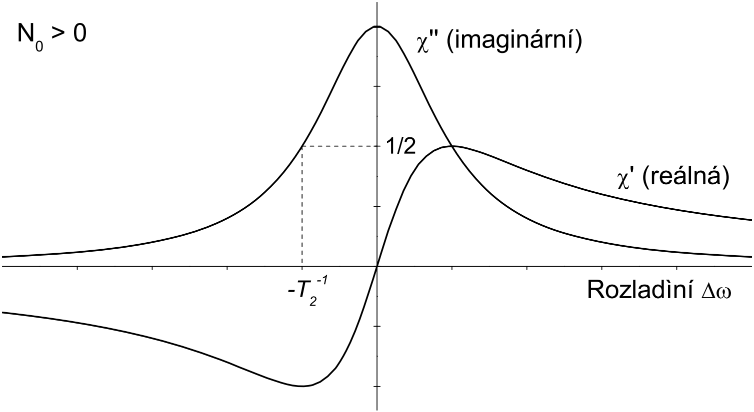
- Předpokládáme $T_2 \gg \omega_{21}^{-1}$ ($T_2 \sim 10^{-9}\,\mathrm{s}$, $\omega_{21} \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$)

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2}}$$

- Susceptibilitu rozložíme na reálnou a imaginární složku (DC 2.10):

$$\chi(\Delta\omega) = \chi'(\Delta\omega) + \mathrm{i}\chi''(\Delta\omega)$$

$$\chi'(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$



$$\chi'(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\, \varepsilon_0} \Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\, \varepsilon_0} \frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

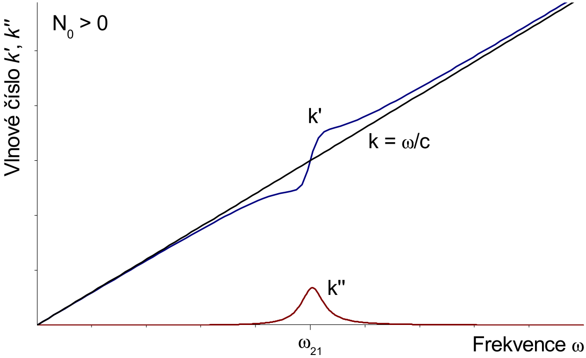
$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$

- Nutná podmínka pro existenci řešení v tomto tvaru, tzv. *disperzní vztah*:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi' + \mathrm{i}\chi'') = 0$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice
$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:
$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$
- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:
$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$
- Nutná podmínka pro existenci řešení v tomto tvaru, tzv. *disperzní vztah*:
$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi' + \mathrm{i}\chi'') = 0$$
- k je obecně komplexní číslo $k = k' + \mathrm{i}k''$, pro $k' \gg k''$:
$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{(1+\chi')}, \quad k'' = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\frac{\chi''}{\sqrt{(1+\chi')}}.$$



$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{(1+\chi')}, \quad k'' = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\frac{\chi''}{\sqrt{(1+\chi')}}$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$

Zesílení

- Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

Zesílení

- Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \,\mathrm{e}^{k''z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \,\mathrm{e}^{k''z} \cos\left(\omega t - k'z + \Phi\right)$$

Zesílení

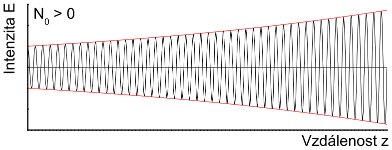
- Komplexní intenzita elektrického pole:

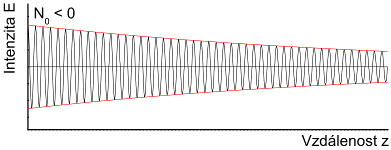
$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k'' z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k' z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k'' z} \, \cos\left(\omega t - k' z + \Phi\right)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá ($+$) nebo klesá ($-$).





Zesílení

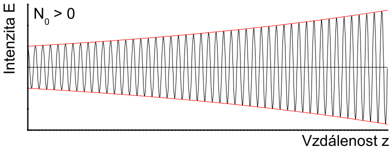
- Komplexní intenzita elektrického pole:

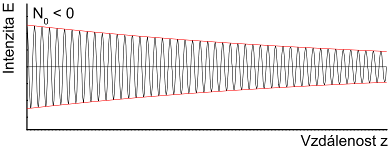
$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \cos(\omega t - k'z + \Phi)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá $(+)$ nebo klesá $(-)$.





- Plošná hustota výkonu $I = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$:

$$I(z) = I_0 \, \mathrm{e}^{g_0 z}$$

Zesílení

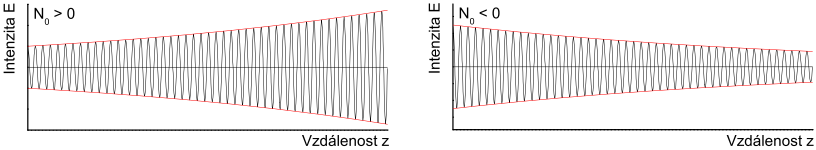
- Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \,\mathrm{e}^{k'' z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k' z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \,\mathrm{e}^{k'' z} \cos\left(\omega t - k' z + \Phi\right)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá ($+$) nebo klesá ($-$).



- Plošná hustota výkonu $I = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$:

$$I(z) = I_0 \,\mathrm{e}^{g_0 z}$$

- I_0 je intenzita záření v rovině $z = 0$ a $g_0 = 2k''$ je součinitel zesílení slabého signálu.

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorpce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorpce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorpce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2
- Přesná rezonance ($\Delta\omega = 0$):

$$g_0 = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar c \varepsilon_0} N_0 T_2 = \sigma N_0$$

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorpce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2
- Přesná rezonance ($\Delta\omega = 0$):

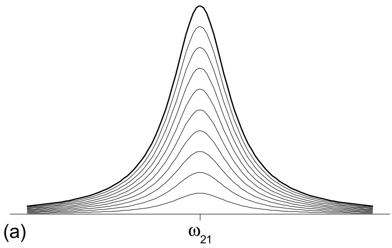
$$g_0 = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar c \varepsilon_0} N_0 T_2 = \sigma N_0$$

- Účinný průřez pro stimulovanou emisi (absorpci):

$$\sigma = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 T_2}{\hbar c \varepsilon_0}$$

Tvar spektrální čáry

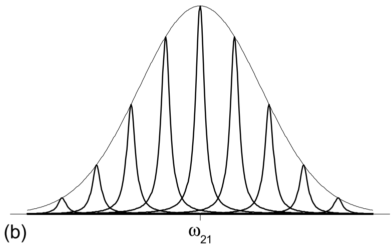
Homogenní rozšíření



Jednotlivé kvantové soustavy mají stejnou rezonanční frekvenci ω_{21}. Výsledný spektrální profil se shoduje se spektrem jedné KS.

Lorentzovská křivka

Nehomogenní rozšíření



Jednotlivé kvantové soustavy mají různé rezonanční frekvence. Výsledný spektrální profil je superpozicí příspěvku od všech KS.

Gaussovská křivka

Saturace zesílení

- Předpokládáme harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$. Z rovnice

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\,\omega_{21}\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\vec{E}N$$

dostaneme:

$$\vec{P} = -\frac{2\omega_{21}T_2|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega_{21} + \frac{1}{T_2})}N\vec{E}$$

Saturace zesílení

- Předpokládáme harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$. Z rovnice

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\,\omega_{21}\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\vec{E}N$$

dostaneme:

$$\vec{P} = -\frac{2\omega_{21}T_2|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega_{21} + \frac{1}{T_2})}N\vec{E}$$

- Po dosazení do rovnice

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

a pro $\omega_{21} \gg \frac{1}{T_2}$:

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2|\vec{E}|^2N$$

Saturace zesílení

- Předpokládáme harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$. Z rovnice

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\,\omega_{21}\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\vec{E}N$$

dostaneme:

$$\vec{P} = -\frac{2\omega_{21}T_2|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega_{21} + \frac{1}{T_2})}N\vec{E}$$

- Po dosazení do rovnice

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}}\left[\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}^* + \vec{E}^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}\right]$$

a pro $\omega_{21} \gg \frac{1}{T_2}$:

$$\frac{1}{T_1}(N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2|\vec{E}|^2N$$

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2T_1|\vec{E}|^2}.$$

Saturace zesílení

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2} \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1},$$

Saturace zesílení

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2}\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1},$$

- Saturace inverze populace hladin (DC 2.11 a 2.12)

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}},$$

Saturace zesílení

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2}\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1},$$

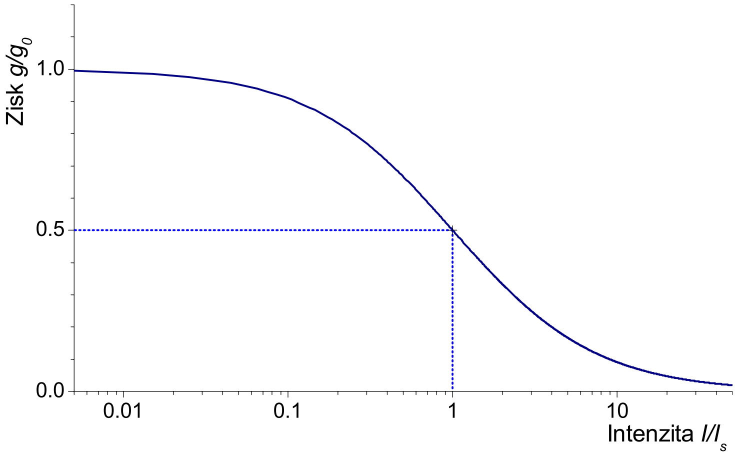
- Saturace inverze populace hladin (DC 2.11 a 2.12)

$$N = \frac{N_0}{1+\frac{I}{I_s}},$$

- Saturace zisku (zesílení) je tedy:

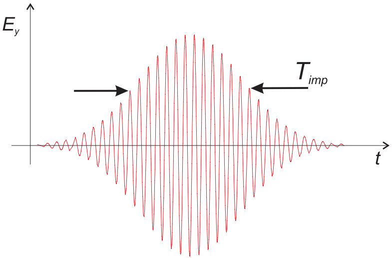
$$g = \frac{g_0}{1+\frac{I}{I_s}}.$$

Saturace zesílení



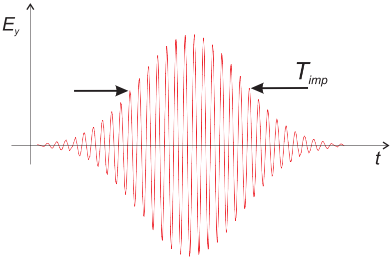
- Signál o intenzitě $I << I_s$ je součinitel zesílení roven $\sim g_0$. Signál, jehož intenzita je srovnatelná, nebo podstatně větší než I_s, je zesilován méně.

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou



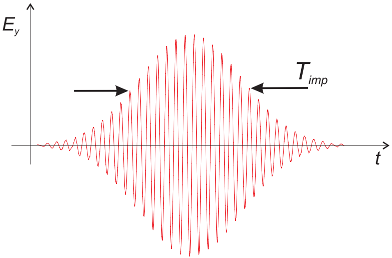
- Lineárně polarizovaná harmonická vlna

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou



- Lineárně polarizovaná harmonická vlna
- Doba trvání pulsu $T \gg$ doba jednoho kmitu pole $2\pi/\omega$

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou



- Lineárně polarizovaná harmonická vlna
- Doba trvání pulsu $T \gg$ doba jednoho kmitu pole $2\pi/\omega$
- Vektor makroskopické polarizace a vektor elektromagnetického pole $\Rightarrow$ pomalu proměnné amplitudy (v čase i v prostoru)

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):

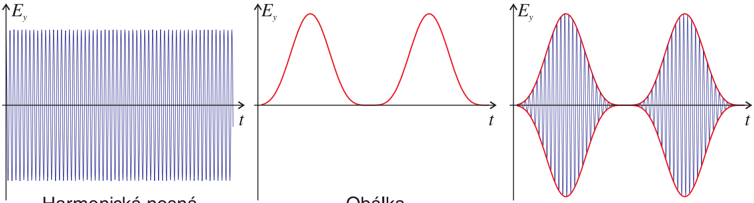
$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \left\{\mathcal{P}_1(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] + \mathcal{P}_2(z,t) \sin\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]\right\}$$

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):

$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \left\{\mathcal{P}_1(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] + \mathcal{P}_2(z,t) \sin\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]\right\}$$

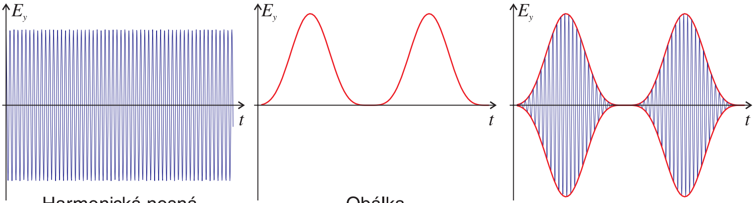


Harmonická nosná vlna | Obálka Amplitudová modulace | Signál s pomalu proměnnou amplitudou

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):

$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \left\{ \mathcal{P}_1(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] + \mathcal{P}_2(z,t) \sin\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] \right\}$$



Harmonická nosná vlna

Obálka Amplitudová modulace

Signál s pomalu proměnnou amplitudou

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\frac{1}{\mathcal{E}}\right| \ll \omega, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right| \ll \omega, \quad \left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}\frac{1}{\mathcal{E}}\right| \ll k, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right| \ll k, \quad \left|\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}\frac{1}{\mathcal{P}}\right| \ll \omega$$

$$\left|\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t}\frac{1}{\mathcal{P}_1}\right| \ll \omega, \quad \left|\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t}\frac{1}{\mathcal{P}_2}\right| \ll \omega$$

Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta k\right\}\mathcal{E}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{P}_1}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_1}{T_2}-\left(\Delta\omega+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\mathcal{P}_2}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_2}{T_2}+\left(\Delta\omega+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_1-\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \tag{10}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{T_1}(N-N_0)+\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2 \tag{11}$$

kde $\Delta\omega=\omega-\omega_{21}$ a $\Delta k=\omega/c-k$.

Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta k\right\}\mathcal{E}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\mathcal{P}_1}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_1}{T_2}-\left(\Delta\omega+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\mathcal{P}_2}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_2}{T_2}+\left(\Delta\omega+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_1-\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \tag{10}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{T_1}(N-N_0)+\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2 \tag{11}$$

kde $\Delta\omega=\omega-\omega_{21}$ a $\Delta k=\omega/c-k$.

- Tato uzavřená soustava pěti parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je matematickým modelem koherentního šíření záření.

Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta k\right\}\mathcal{E} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_1}{T_2} - \left(\Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} + \left(\Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_1 - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \tag{10}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{T_1}(N - N_0) + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2 \tag{11}$$

kde $\Delta\omega = \omega - \omega_{21}$ a $\Delta k = \omega/c - k$.

- Tato uzavřená soustava pěti parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je matematickým modelem koherentního šíření záření.
- Popisuje kooperativní chování celého souboru kvantových soustav pod vlivem elektrického pole elektromagnetického záření i zpětný vliv souboru kvantových soustav na elektromagnetické pole.

Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\Delta k\right\}\mathcal{E}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}=\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_2 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_1}{T_2}-\left(\Delta\omega+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_2 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t}=-\frac{\mathcal{P}_2}{T_2}+\left(\Delta\omega+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_1-\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \tag{10}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{T_1}(N-N_0)+\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2 \tag{11}$$

kde $\Delta\omega=\omega-\omega_{21}$ a $\Delta k=\omega/c-k$.

- Tato uzavřená soustava pěti parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu je matematickým modelem koherentního šíření záření.
- Popisuje kooperativní chování celého souboru kvantových soustav pod vlivem elektrického pole elektromagnetického záření i zpětný vliv souboru kvantových soustav na elektromagnetické pole.
- V řadě zvláštních případů je možné tento model ještě dále zjednodušovat.

Další zjednodušení rovnic nastane, pokud se předpokládá šíření signálu bez fázové modulace s frekvencí odpovídající přesně frekvenci kvantového přechodu, tj. $\Phi = const.$, $\Delta\omega = 0$ a $\Delta k = 0$:

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta k\right\}\mathcal{E} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_1 \qquad \Rightarrow \mathcal{P}_1 \equiv 0 \\
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{P}_1}{T_2} - \left(\Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow 0 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} + \left(\Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\mathcal{P}_1 - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{1}{T_1}(N - N_0) + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

.

Signál v rezonanci a bez fázové modulace

Další zjednodušení rovnic nastane, pokud se předpokládá šíření signálu bez fázové modulace s frekvencí odpovídající přesně frekvenci kvantového přechodu, tj. $\Phi = const.$, $\Delta\omega = 0$ a $\Delta k = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_1 \equiv 0 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

Tato soustava rovnic, zapsaná pro komplexní analyticky sdružený signál, je v literatuře někdy označována jako **Maxwellovy-Blochovy rovnice**.

. . . a ještě zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c} \qquad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$t' = t - \frac{z}{c} \qquad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Potom:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

$$t' = t - \frac{z}{c} \quad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Potom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

- Rovnice **nelineární**

... a ještě zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c} \quad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Potom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

- Rovnice **nelineární**
- Neplatí princip superpozice $E_{\text{in}}^{(1)} \to E_{\text{out}}^{(1)}, E_{\text{in}}^{(2)} \to E_{\text{out}}^{(2)} \not\Rightarrow E_{\text{in}}^{(1)} + E_{\text{in}}^{(2)} \neq E_{\text{out}}^{(1)} + E_{\text{out}}^{(2)}$

$$t' = t - \frac{z}{c} \qquad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Potom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

- Rovnice **nelineární**
- Neplatí princip superpozice $E_{\mathrm{in}}^{(1)} \to E_{\mathrm{out}}^{(1)}, E_{\mathrm{in}}^{(2)} \to E_{\mathrm{out}}^{(2)} \not\Rightarrow E_{\mathrm{in}}^{(1)} + E_{\mathrm{in}}^{(2)} \neq E_{\mathrm{out}}^{(1)} + E_{\mathrm{out}}^{(2)}$
- Amplitudy pole a polarizace a také inverze populace hladin závisí na souřadnicích v prostoru i čase

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární signál $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární signál $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$
- Získáme rovnice pro $\mathcal{P}_2(z)$, $N(z)$

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}_2(z) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E} N$$
$$0 = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární signál $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$
- Získáme rovnice pro $\mathcal{P}_2(z)$, $N(z)$

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}_2(z) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E} N$$
$$0 = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

- Zůstává diferenciální rovnice pro změnu intenzity $\mathcal{E}$ ve směru šíření z

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace
Rovnice pro intenzitu optického záření

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$
- Účinný průřez pro stimulovanou emisi

$$\sigma = \frac{\mu_0 \omega_{21} c \, |d_{21}|^2}{\hbar} T_2$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace
Rovnice pro intenzitu optického záření

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}T_2N_0\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}T_1T_2\mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1+I/I_s}I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial\mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$
- Účinný průřez pro stimulovanou emisi

$$\sigma = \frac{\mu_0\omega_{21}c\,|d_{21}|^2}{\hbar}T_2$$

- Saturační intenzita

$$I_s = \frac{\hbar\omega}{2\sigma T_1}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

- Okrajová (počáteční) podmínka

$$J|_{z=0} = J_1$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

- Okrajová (počáteční) podmínka

$$J|_{z=0} = J_1$$

- Řešení ($z = L$)

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 \, L$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 \, L$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0\, L$$

Slabý signál	Silný signál
$J_1 \ll 1, \quad J_2 \ll 1$	$\ln \dfrac{J_2}{J_1} \approx 0, \quad \text{tj.} \quad \dfrac{J_2}{J_1} \approx 1$
$J_2 = J_1\, e^{g_0\, L}$	$J_2 = J_1 + g_0\, L$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

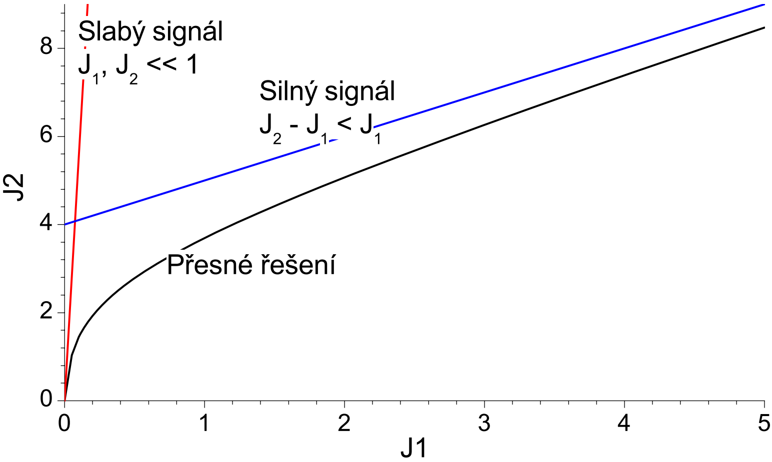
$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0\, L$$

Slabý signál	Silný signál
$J_1 \ll 1, \quad J_2 \ll 1$	$\ln \frac{J_2}{J_1} \approx 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{J_2}{J_1} \approx 1$
$J_2 = J_1\, e^{g_0\, L}$	$J_2 = J_1 + g_0\, L$

- Obecné řešení transcendentní rovnice (pro libovolné J_1 a zesílení)

$$J_2 = \mathrm{LambertW}\left\{ J_1 \mathrm{e}^{[J_1 + g_0\, L]} \right\}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování ($g_0 L = 4$)



Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování + ztráty

- Přidáme součinitel ztrát β:

$$\frac{dJ}{dz} = -\beta J + g_0 \frac{J}{1+J}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování $+$ ztráty

- Přidáme součinitel ztrát β:

$$\frac{dJ}{dz} = -\beta J + g_0 \frac{J}{1+J}$$

- Řešení (DC 3.2)

$$\ln \frac{J_2}{J_1} - \frac{g_0}{\beta} \ln \frac{g_0 - \beta(1+J_2)}{g_0 - \beta(1+J_1)} = (g_0 - \beta) L$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování + ztráty

- Přidáme součinitel ztrát β:

$$\frac{dJ}{dz} = -\beta J + g_0 \frac{J}{1+J}$$

- Řešení (DC 3.2)

$$\ln \frac{J_2}{J_1} - \frac{g_0}{\beta} \ln \frac{g_0 - \beta(1+J_2)}{g_0 - \beta(1+J_1)} = (g_0 - \beta)\, L$$

- Limita $g_0 L \to \infty \quad \Rightarrow$

$$I_2^{\max} = \frac{g_0}{\beta} I_s$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování + ztráty

- Přidáme součinitel ztrát β:

$$\frac{dJ}{dz} = -\beta J + g_0 \frac{J}{1+J}$$

- Řešení (DC 3.2)

$$\ln\frac{J_2}{J_1} - \frac{g_0}{\beta} \ln\frac{g_0 - \beta(1+J_2)}{g_0 - \beta(1+J_1)} = (g_0 - \beta)\, L$$

- Limita $g_0 L \to \infty \quad \Rightarrow$

$$I_2^{max} = \frac{g_0}{\beta} I_s$$

- Existuje mezní hustota výkonu nekonečně dlouhého zesilovače – saturovaný zisk právě kompenzuje ztráty

Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2
\end{aligned}
$$

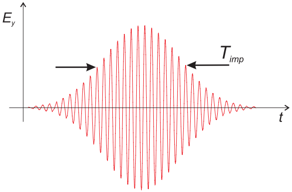
Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

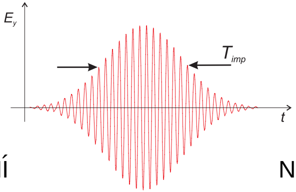


- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$



KOHERENTNÍ

$T_{\mathrm{imp}} \ll T_1,\ T_2$

NEKOHERNTNÍ

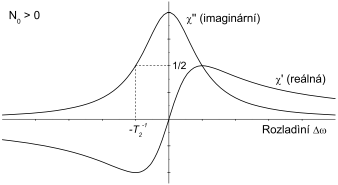
$T_{\mathrm{imp}} \gg T_1,\ T_2$

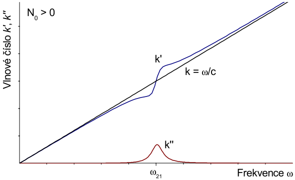
APROXIMACE
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

Shrnutí

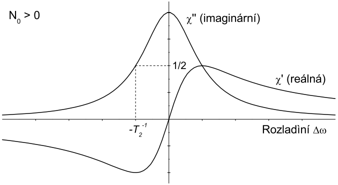
- Rezonanční prostředí je disperzní a nelineární

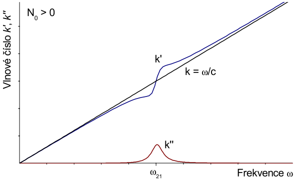




Shrnutí

- Rezonanční prostředí je disperzní a nelineární

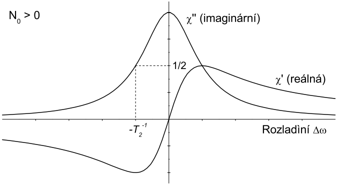


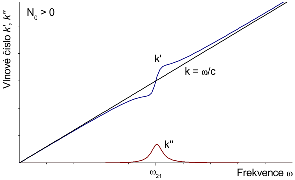


- Pro popis šíření impulzů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic ⇒ časový vývoj obálky impulzu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.

Shrnutí

- Rezonanční prostředí je disperzní a nelineární





- Pro popis šíření impulzů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic ⇒ časový vývoj obálky impulzu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Dokonalá rezonance, konstantní fáze:

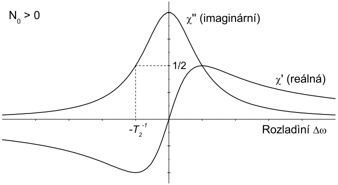
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

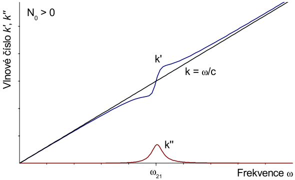
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Shrnutí

- Rezonanční prostředí je disperzní a nelineární





- Pro popis šíření impulzů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic ⇒ časový vývoj obálky impulzu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Dokonalá rezonance, konstantní fáze:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární řešení poskytuje rovnici popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I - \beta I$$

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
- PREMARATNE M., AGRAWAL, G. P.: *Light propagation in gain media*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/