

# Fyzika laserů

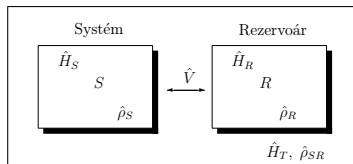
Poloklasický popis šíření elmg. záření v rezonančním prostředí.

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky  
České vysoké učení technické  
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

15. dubna 2020

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. **Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím**
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření



- ▶  $\hat{H}_S |l\rangle = E_l |l\rangle$
- ▶  $\langle l|m\rangle = \delta_{lm}$
- ▶  $\sum_l |l\rangle\langle l| = \mathbf{1}$

Interakce je dipólová

$$\hat{V} = \hbar \sum_{k,l} f_{k,l} |k\rangle\langle l| = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$$

Elektromagnetické  
pole v termodyna-  
mické rovnováze

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_C}{\partial t} = [(\hat{V} + \hat{H}_S + \hat{H}_R), \hat{\rho}_C]$$

Liouvilova rovnice  $\Rightarrow$  řídicí rovnice  $\Rightarrow$  Pauliho rovnice

$$\frac{\partial \rho_{ji}}{\partial t} = \delta_{ij} \sum_k' w_{ik} \rho_{kk} - (\Gamma_{ij}^c - i\omega_{ij}) \rho_{ji}$$

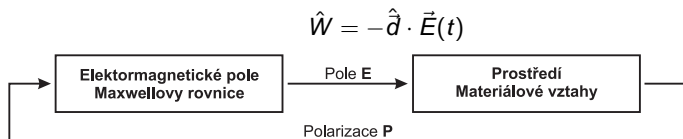
Pravděpodobnosti absorpce-emise fotonu  $w_{lk}$   
Tlumení a posuv frekvence  $\Gamma_{ij}^c$

**Prostředí** soubor kvantových soustav (**dvouhadinových**), nepolární dielektrikum, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, změna energie → změna konfigurace → změna dipólového momentu)

**Záření** elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

**Rezonanční záření** frekvence v rezonanci s kvantovým přechodem (Bohrův vztah)

**Interakce záření s prostředím** prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)



Pole klasicky + prostředí kvantově → poloklasický popis

**Pauliho rovnice** popisují chování tlumené kvantové soustavy s pomocí časového vývoje elementů matice hustoty. **Přechodem k makroskopickým veličinám  $\vec{P}$  a  $N$  získáme rovnice pro odezvu prostředí.**

$$\vec{P} = \bar{N}(\bar{d}_{21}\varrho_{12} + \bar{d}_{12}\varrho_{21})$$

$$N = \bar{N}(\varrho_{22} - \varrho_{11})$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P} \quad (3)$$

- ▶ Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy dvouhladinové kvantové soustavy
- ▶ Vzájemně vázané nelineární vektorové parciální diferenciální rovnice druhého řádu  $\Rightarrow$  vlastně je to celkem 7 rovnic

$\vec{E}$	Elmag. pole	$T_1$	Relaxace inverze populace hladin
$\vec{P}$	Makroskopická polarizace	$T_2$	Relaxace makroskopické polarizace
$N$	Inverze populace hladin	$\omega_{21}$	Rezonanční frekvence
$N_0$	Inverze populace hladin bez vnějšího pole	$ \vec{d}_{21} $	Velikost dipólového momentu

- ▶ Měřitelné veličiny jsou reprezentovány reálnými čísly nebo reálnými funkcemi
- ▶ Někdy je výhodné reálným signálům přiřadit komplexní funkce – **komplexní analyticky sdružený signál**, přitom jeho reálná část je rovna reálnému (skutečnému) signálu. Např. rovinná elektromagnetická vlna:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

- ▶ Příslušný komplexní analyticky sdružený signál:

$$\vec{E} = \vec{i}_y E_0 e^{i(\omega t - kz + \Phi)}.$$

- ▶ Z komplexního analyticky sdruženého signálu je snadné vyjádřit reálné signály

$$\vec{E}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*), \quad \vec{P}^{(r)} = \frac{1}{2}(\vec{P} + \vec{P}^*)$$

- ▶ Po dosazení do soustavy rovnic poloklasické teorie (DC 2.8):

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar} \vec{E} N, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}} \left[ \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P}^* + \vec{E}^* \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P} \right]. \quad (6)$$

**Stacionární signál** monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

**Disperzní prostředí** rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility  $\chi$  na kruhové frekvenci  $\omega$ .

- ▶ Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1 + \chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

- ▶ Fázová rychlost vlny

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \chi}}$$

- ▶ Index lomu

$$n_{ref} = \sqrt{1 + \chi}$$

- ▶ Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ . Výchozí rovnice:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}} \left[ \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P}^* + \vec{E}^* \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P} \right]$$

- ▶ Uvažujeme slabý signál  $\vec{E} \Rightarrow$  bude malá i polarizace  $\vec{P}$
- ▶ Inverze populace hladin  $N$  se blíží své ustálené hodnotě  $N_0$
- ▶ Šíření harmonických signálů s kruhovou frekvencí  $\omega$  ve směru osy  $z$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z, \omega) e^{i\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z, \omega) e^{i\omega t}$$

- ▶ Odezvu prostředí popisuje rovnice pro polarizaci:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} \doteq -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- ▶ Pro susceptibilitu dostaneme  $(\partial \vec{P} / \partial t = i\omega \vec{P})$ :

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z, \omega)}{\epsilon_0 \vec{E}_0(z, \omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar \epsilon_0} \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 N_0}{(i\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}$$

- ▶ Susceptibilita  $\chi(\omega)$  – komplexní, frekvenčně závislá veličina



- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\omega) \doteq -\frac{2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{\omega_{21} |\bar{d}_{21}|^2 N_0}{(i\omega + \frac{1}{T_2})^2 + \omega_{21}^2}.$$

- Pro velké blízké frekvence  $\omega_{21}$  a  $\omega$  ( $\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$ ,  $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$ ):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{i}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2 \omega_{21}}}$$

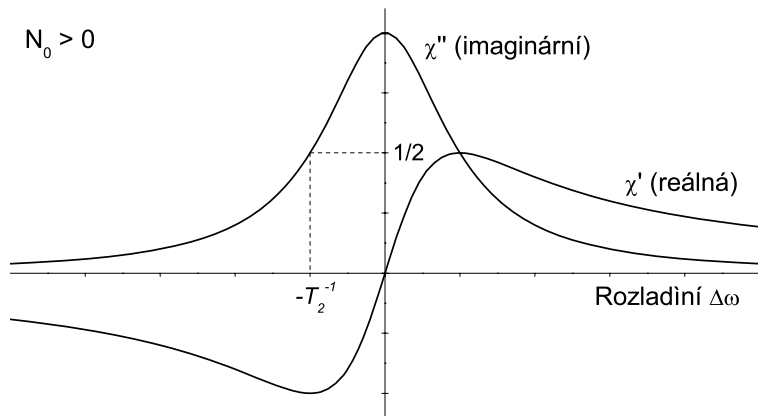
- Předpokládáme  $T_2 \gg \omega_{21}^{-1}$  ( $T_2 \sim 10^{-9}$  s,  $\omega_{21} \sim 10^{15}$  s $^{-1}$ )

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{i}{T_2}}$$

- Susceptibilitu rozložíme na reálnou a imaginární složku (DC 2.10):

$$\chi(\Delta\omega) = \chi'(\Delta\omega) + i\chi''(\Delta\omega)$$

$$\chi'(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \varepsilon_0} \Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$



$$\chi'(\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \epsilon_0} \Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \epsilon_0} \frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}.$$

- ▶ Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \chi \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- ▶ Šíření slabého **harmonického signálu** je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E} = -\chi \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}$$

- ▶ Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

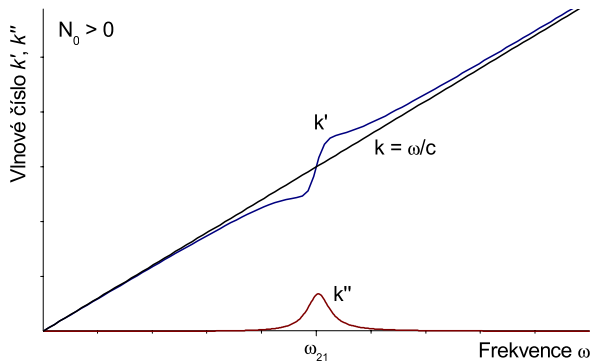
$$\vec{E} = \vec{i}_y E_0 \exp [i(\omega t - kz + \Phi)]$$

- ▶ Nutná podmínka pro existenci řešení v tomto tvaru, tzv. *disperzní vztah*:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi' + i\chi'') = 0$$

- ▶  $k$  je obecně komplexní číslo  $k = k' + ik''$ , pro  $k' \gg k''$ :

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi'}, \quad k'' = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\chi''}{\sqrt{1 + \chi'}}.$$



$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi'}, \quad k'' = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\chi''}{\sqrt{1 + \chi'}}$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \epsilon_0} \Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{\frac{|\bar{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar \epsilon_0} \frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}.$$

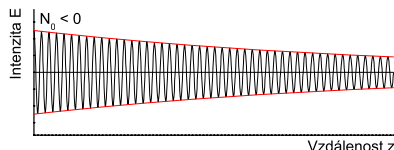
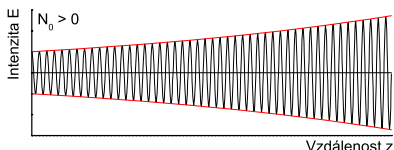
- ▶ Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i}_y E_0 e^{k''z} e^{i(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- ▶ Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i}_y E_0 e^{k''z} \cos(\omega t - k'z + \Phi)$$

- ▶ V závislosti na znaménku  $k''$  (znaménko  $N_0$ ) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá (+) nebo klesá (-).



- ▶ Plošná hustota výkonu  $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_0 |\vec{E}|^2$ :

$$I(z) = I_0 e^{g_0 z}$$

- ▶  $I_0$  je intenzita záření v rovině  $z = 0$  a  $g_0 = 2k''$  je součinitel zesílení slabého signálu.

- ▶ Spektrální závislost součinitele zesílení (absorpce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \epsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

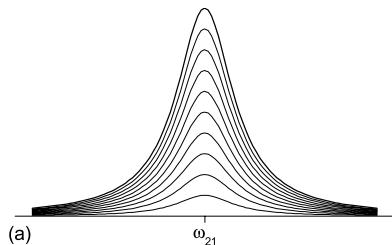
- ▶ Šířka spektrální čáry  $\leftrightarrow$  převrácená hodnota doby relaxace polarizace  $T_2$
- ▶ Přesná rezonance ( $\Delta\omega = 0$ ):

$$g_0 = \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2}{\hbar c \epsilon_0} N_0 T_2 = \sigma N_0$$

- ▶ Účinný průřez pro stimulovanou emisi (absorpci):

$$\sigma = \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 T_2}{\hbar c \epsilon_0}$$

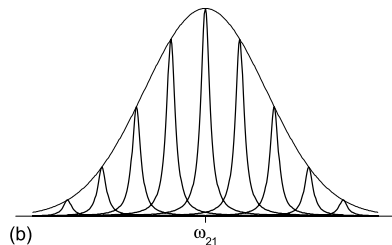
## Homogenní rozšíření



Jednotlivé kvantové soustavy mají **stejnou** rezonanční frekvenci  $\omega_{21}$ . Výsledný spektrální profil se shoduje se spektrem jedné KS.

Lorentzovská křivka

## Nehomogenní rozšíření



Jednotlivé kvantové soustavy mají **různé** rezonanční frekvence. Výsledný spektrální profil je superpozicí příspěvku od všech KS.

Gaussovská křivka

- ▶ Předpokládáme harmonickou vlnu a přesnou rezonanci  $\omega = \omega_{21}$ . Z rovnice

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar} \vec{E} N$$

dostaneme:

$$\vec{P} = -\frac{2\omega_{21} T_2 |\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2i\omega_{21} + \frac{1}{T_2})} N \vec{E}$$

- ▶ Po dosazení do rovnice

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1} \right) (N - N_0) = \frac{1}{2\hbar\omega_{21}} \left[ \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P}^* + \vec{E}^* \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2} \right) \vec{P} \right]$$

a pro  $\omega_{21} \gg \frac{1}{T_2}$ :

$$\frac{1}{T_1} (N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2} T_2 |\vec{E}|^2 N$$

- ▶ Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2} T_2 T_1 |\vec{E}|^2}$$



- ▶ Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

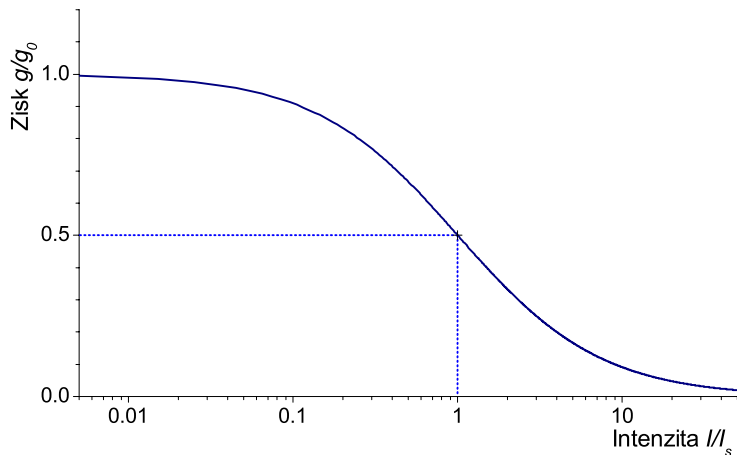
$$I_s = \frac{c}{2} \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{|\bar{d}_{21}|^2 T_2 T_1},$$

- ▶ Saturace inverze populace hladin (DC 2.11 a 2.12)

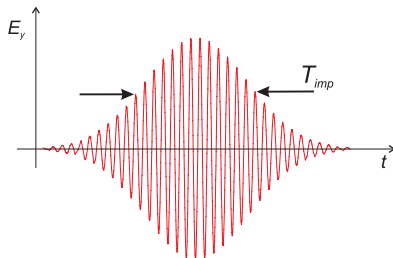
$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}},$$

- ▶ Saturace zisku (zesílení) je tedy:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}}.$$



- ▶ Signál o intenzitě  $I \ll I_s$  je součinitel zesílení roven  $\sim g_0$ . Signál, jehož intenzita je srovnatelná, nebo podstatně větší než  $I_s$ , je zesilován méně.

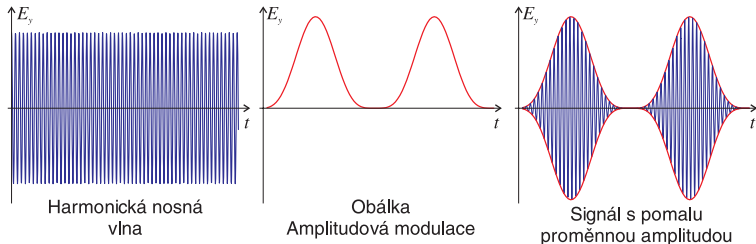


- ▶ Lineárně polarizovaná harmonická vlna
- ▶ Doba trvání pulsu  $T \gg$  doba jednoho kmitu pole  $2\pi/\omega$
- ▶ Vektor makroskopické polarizace a vektor elektromagnetického pole  $\Rightarrow$  pomalu proměnné amplitudy (v čase i v prostoru)

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):

$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z, t) \cos[\omega t - kz + \Phi(z, t)]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \{ \mathcal{P}_1(z, t) \cos[\omega t - kz + \Phi(z, t)] + \mathcal{P}_2(z, t) \sin[\omega t - kz + \Phi(z, t)] \}$$



$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \frac{1}{\mathcal{E}} \right| \ll \omega, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right| \ll \omega, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \frac{1}{\mathcal{E}} \right| \ll k, \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| \ll k, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \frac{1}{\mathcal{P}} \right| \ll \omega$$

$$\left| \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} \frac{1}{\mathcal{P}_1} \right| \ll \omega, \quad \left| \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} \frac{1}{\mathcal{P}_2} \right| \ll \omega$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta k \right\} \mathcal{E} = \frac{\mu_0 \omega_{21} \mathcal{C}}{2} \mathcal{P}_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \omega_{21} \mathcal{C}}{2} \mathcal{P}_2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_1}{T_2} - \left( \Delta \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \mathcal{P}_2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} + \left( \Delta \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \mathcal{P}_1 - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \quad (10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{T_1} (N - N_0) + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \quad (11)$$

kde  $\Delta \omega = \omega - \omega_{21}$  a  $\Delta k = \omega/c - k$ .

- ▶ Tato uzavřená **soustava pěti** parciálních diferenciálních rovnic **prvního řádu je matematickým modelem koherentního šíření záření.**
- ▶ Popisuje **kooperativní chování** celého souboru kvantových soustav pod vlivem elektrického pole elektromagnetického záření i zpětný vliv souboru kvantových soustav na elektromagnetické pole.
- ▶ V řadě zvláštních případů je možné tento model ještě dále **zjednodušovat.**

Další zjednodušení rovnic nastane, pokud se předpokládá šíření signálu bez fázové modulace s frekvencí odpovídající přesně frekvenci kvantového přechodu, tj.

$\Phi = \text{const.}$ ,  $\Delta\omega = 0$  a  $\Delta k = 0$ :

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Delta k \right\} \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_1 \equiv 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_1}{T_2} - \left( \Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \mathcal{P}_2 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} + \left( \Delta\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \mathcal{P}_1 - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{T_1} (N - N_0) + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_1 \equiv 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

... a ještě zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c} \quad z' = z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Potom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\ \frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \end{aligned}$$

► Rovnice **nelineární**

- Neplatí princip superpozice  $E_{\text{in}}^{(1)} \rightarrow E_{\text{out}}^{(1)}, E_{\text{in}}^{(2)} \rightarrow E_{\text{out}}^{(2)} \not\Rightarrow E_{\text{in}}^{(1)} + E_{\text{in}}^{(2)} \neq E_{\text{out}}^{(1)} + E_{\text{out}}^{(2)}$
- Amplitudy pole a polarizace a také inverze populace hladin závisí na souřadnicích v prostoru i čase

- ▶ Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- ▶ Stacionární signál  $\Rightarrow$  položíme časové derivace  $\equiv 0$
- ▶ Získáme rovnice pro  $\mathcal{P}_2(z)$ ,  $N(z)$

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_2(z) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E} N$$

$$0 = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \quad \Rightarrow \quad N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2 T_1 T_2 \mathcal{E}^2}{\hbar^2}}$$



# Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

## Rovnice pro intenzitu optického záření

- ▶ Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla  $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0\mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \Rightarrow \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- ▶ Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- ▶ Zisk pro slabý signál  $g_0 = \sigma N_0$
- ▶ Účinný průřez pro stimulovanou emisi

$$\sigma = \frac{\mu_0 \omega_{21} c |d_{21}|^2}{\hbar} T_2$$

- ▶ Saturační intenzita

$$I_s = \frac{\hbar \omega}{2\sigma T_1}$$

# Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- ▶ Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- ▶ Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \Rightarrow \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- ▶ Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 dz$$

- ▶ Okrajová (počáteční) podmínka

$$J|_{z=0} = J_1$$

- ▶ Řešení ( $z = L$ )

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 L$$

# Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování

- ▶ Řešení ( $z = L$ ) – transcendentní rovnice

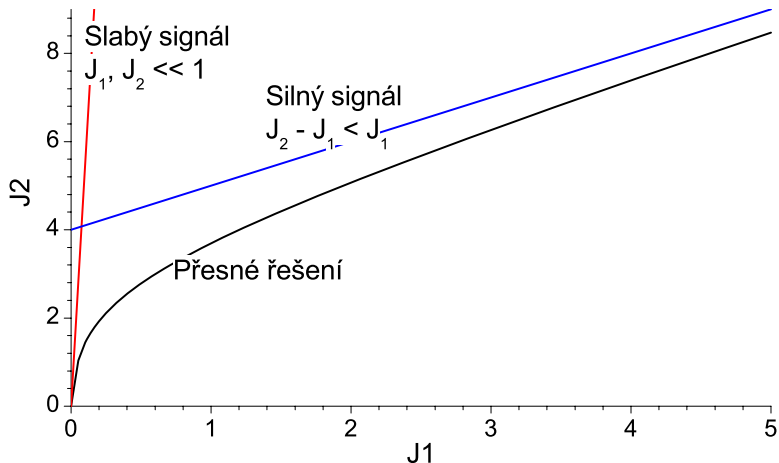
$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 L$$

Slabý signál	Silný signál
$J_1 \ll 1, \quad J_2 \ll 1$	$\ln \frac{J_2}{J_1} \approx 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{J_2}{J_1} \approx 1$
$J_2 = J_1 e^{g_0 L}$	$J_2 = J_1 + g_0 L$

- ▶ Obecné řešení transcendentní rovnice (pro libovolné  $J_1$  a zesílení)

$$J_2 = \text{LambertW} \left\{ J_1 e^{[J_1 + g_0 L]} \right\}$$

# Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování ( $g_0 L = 4$ )



# Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace – zesilování + ztráty

- ▶ Přidáme součinitel ztrát  $\beta$ :

$$\frac{dJ}{dz} = -\beta J + g_0 \frac{J}{1+J}$$

- ▶ Řešení (DC 3.2)

$$\ln \frac{J_2}{J_1} - \frac{g_0}{\beta} \ln \frac{g_0 - \beta(1+J_2)}{g_0 - \beta(1+J_1)} = (g_0 - \beta) L$$

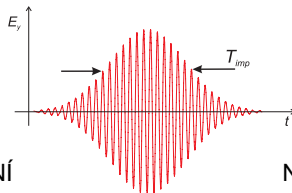
- ▶ Limita  $g_0 L \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$I_2^{\max} = \frac{g_0}{\beta} I_s$$

- ▶ Existuje mezní hustota výkonu nekonečně dlouhého zesilovače – satureovaný zisk právě kompenzuje ztráty

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu  $T_{imp}$  v porovnání s relaxačními časy  $T_1$  a  $T_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\ \frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2\end{aligned}$$



KOHERENTNÍ

$$T_{imp} \ll T_1, T_2$$

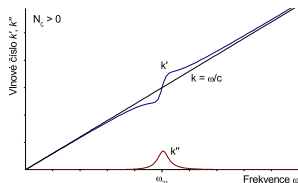
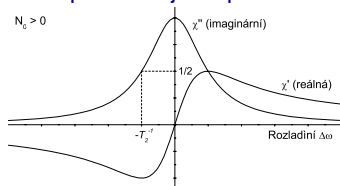
NEKOHERENTNÍ

$$T_{imp} \gg T_1, T_2$$

APROXIMACE  
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$$T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$$

► Rezonanční prostředí je disperzní a nelineární



- Pro popis šíření impulzů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic  $\Rightarrow$  časový vývoj obálky impulzu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Dokonalá rezonance, konstantní fáze:







$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární řešení poskytuje rovnici popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I - \beta I$$

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
-  PREMARATNE M., AGRAWAL, G. P.: *Light propagation in gain media*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>