

Fyzika laserů

Aproximace rychlostních rovnic

Dynamika laseru s krátkým rezonátorem. Práh laseru

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

20. dubna 2020

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. **Aplikace na laser – kontinuální režim**
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR **klasicky**

Prostředí soubor dvouhladinových **kvantových** soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$,
 $|d_{21}|^2$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí $\hat{W} = -\hat{d} \cdot \vec{E}(t)$

Odezva prostředí 3 vektorové nelineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu pro \vec{E} , \vec{P} a N

Rezonanční prostředí je disperzní susceptibilita je funkcí frekvence

Rezonanční prostředí je nelineární v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní)

Signál pomalu proměnný impuls s harmonickou nosnou frekvencí $\omega \gg T_{\text{imp}}^{-1}$ v rezonanci ($\omega = \omega_{21}$) a bez fázové modulace \rightarrow tři rovnice pro obálku

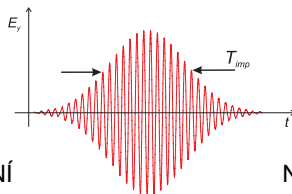
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\ \frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2\end{aligned}$$

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$



KOHERENTNÍ

$$T_{imp} \ll T_1, T_2$$

NEKOHERENTNÍ

$$T_{imp} \gg T_1, T_2$$

APROXIMACE
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$$T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$$

- ▶ Rychlá relaxace rezonančního prostředí
- ▶ Adiabatická eliminace — v každém okamžiku „ustálený stav“
- ▶ Relaxace má větší vliv než změna amplitudy \Rightarrow časové derivace $\equiv 0$
- ▶ Odpovídá rovnicím pro stacionární signál – odezva prostředí sleduje vstup

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{z}, t) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E}(\mathbf{z}, t) N(\mathbf{z}, t)$$

$$N(\mathbf{z}, t) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2(\mathbf{z}, t)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}'} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}(\mathbf{z}, t)}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2(\mathbf{z}, t)}$$

$$\frac{dI(\mathbf{z}, t)}{dz} = \frac{g_0}{1 + I(\mathbf{z}, t)/I_s} I(\mathbf{z}, t)$$

- ▶ Částečná adiabatická eliminace
- ▶ Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

- ▶ Z rovnic vyloučíme polarizaci (DC)

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2(z, t)}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E}(z, t) N(z, t) \Rightarrow \mathcal{P}_2(z, t) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E}(z, t) N(z, t)$$

$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{N_0 - N}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E}(z, t) \mathcal{P}_2(z, t) \Rightarrow \frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \frac{N_0}{T_1} - \frac{N(z, t)}{T_1} - \frac{2\sigma_{21}}{\hbar\omega_{21}} I(z, t) N(z, t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(z, t)}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2(z, t) \Rightarrow \frac{\partial I(z, t)}{\partial z'} = \sigma_{21} N(z, t) I(z, t)$$

- ▶ Amplituda intenzity elektrického pole byla nahrazena intenzitou záření

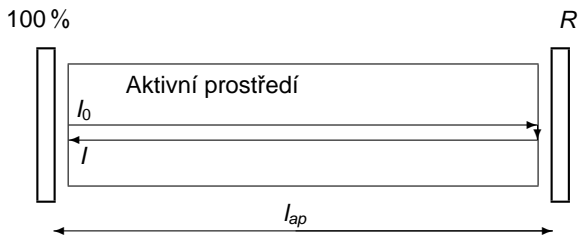
$$\frac{\partial N(z, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z, t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma_{21} I(z, t) N(z, t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z'} = \underbrace{\sigma_{21} I(z, t) N(z, t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

- ▶ Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin
- ▶ Hustota energie $u = I/c$
- ▶ Einstein

$$B_{21} = \frac{c\sigma_{21}}{\hbar\omega_{21}}$$

- ▶ Hustota fotonů $\phi = I/(\hbar\omega_{21}c)$
- ▶ Tok fotonů $F = I/(\hbar\omega_{21})$



- ▶ Necht' je jeden oběh fotonu rezonátorem, doba t_R , mnohem kratší, než charakteristické časy spojené s generací laserového záření
- ▶ Inverze populace hladin necht' je nezávislá na souřadnici a za dobu t_R se příliš nezmění \Rightarrow zisk $g = \sigma_{21} N \approx$ konstanta po dobu t_R

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z'} = \sigma_{21} N I(z, t) \quad \Rightarrow \quad I_{t_R} = I_0 \exp[2gl_{ap}]$$

- ▶ Při započtení ztrát odrazem od zrcadla s reflexivitou R :

$$I_{t_R} = I_0 R \exp[2gl_{ap}] = I_0 \exp[2gl_{ap} + \ln R]$$

- ▶ Změna intenzity na jeden průchod bude:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{t_R} - I_0}{t_R} = \frac{1}{t_R} (I_0 \exp[2gl_{ap} + \ln R] - I_0) = \frac{I_0}{t_R} (\exp[2gl_{ap} + \ln R] - 1)$$

- ▶ V okolí prahu je exponent blízko nuly a na exponenciálu lze použít Taylorův rozvoj:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \doteq \frac{I_0}{t_R} (1 + 2gl_{ap} + \ln R - 1) = \frac{I_0}{t_R} (2gl_{ap} + \ln R)$$

- ▶ 2. věta o střední hodnotě

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{t_R} (2gl_{ap} + \ln R) = c\sigma_{21}IN - \frac{I}{t_R} \ln \frac{1}{R}$$

- ▶ Máme **rychlostní rovnici pro fotony**

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21}IN - \frac{I}{t_R} \ln \frac{1}{R}$$

- ▶ Ještě si vzpomeneme na definici doby života fotonu v rezonátoru

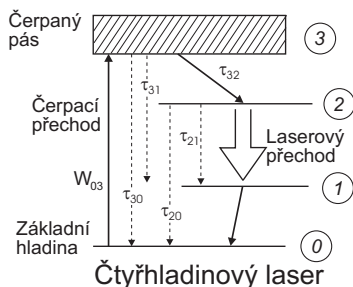
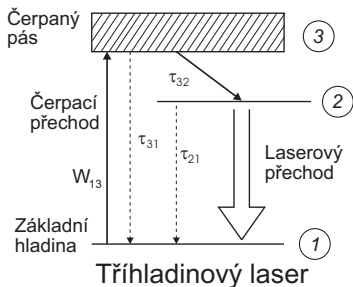
$$\tau_c = \frac{t_R}{-\ln R}$$

- ▶ ... a máme:

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21}IN - \frac{I}{\tau_c}$$

- ▶ Člen $-I/\tau_c$ reprezentuje veškeré ztráty fotonů v rezonátoru
- ▶ Jde to i jinak. . .
- ▶ Vždy platí určitá omezení:
 - ▶ Inverze se příliš nemění podél rezonátoru
 - ▶ Relativně malé zesílení a ztráty – za jeden oběh se příliš nemění intenzita záření
 - ▶ Charakteristická doba změny intenzity $\gg t_R$ (krátký rezonátor)
 - ▶ Rovinná vlna

- Schéma optického čerpání pevnolátkových laserů



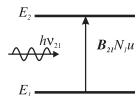
- Pro činnost laseru mají zásadní význam dvě hladiny: excitovaná horní laserová úroveň ② a spodní laserová úroveň ①.

Elementární procesy absorpce a emise fotonu

- ▶ Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu

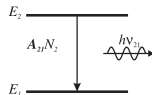
- ▶ **Absorpce** fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{abs } m \rightarrow n} = -\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{abs } m \rightarrow n} = -B_{mn}N_m u$$



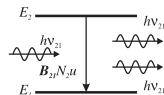
- ▶ **Spontánní emise** fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{spont } n \rightarrow m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{spont } n \rightarrow m} = -A_{nm}N_n$$



- ▶ **Stimulovaná emise** fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{stim. em. } n \rightarrow m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{stim. em. } n \rightarrow m} = -B_{nm}N_n u$$

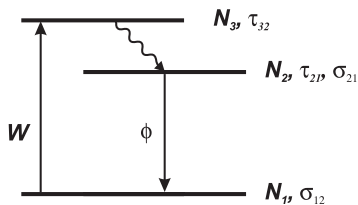


- ▶ Rychlost přechodu (změna populace hladiny za jednotku času)

$$\frac{dN}{dt} = BNu = \sigma_{21}N \frac{I}{h\nu} = c\sigma_{21}N\phi = \sigma_{21}NF$$

u – hustota energie [J/m^3], I – intenzita záření [W/m^2], ϕ – hustota fotonů [m^{-3}],
 F – fotonový tok [$1/\text{sm}^2$]

Rychlostní rovnice pro 3-hladinový systém



$$\frac{dN_3}{dt} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

- ▶ Rychlá relaxace hladiny 3 $\Rightarrow N_3 \ll N_1, N_2, \frac{N_3}{\tau_{32}} = W$
- ▶ Inverze populace hladin $N = N_2 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{21}} N_1 = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_2}{dt} - \frac{g_2}{g_1} \frac{dN_1}{dt} = W \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) - \frac{N_2}{\tau_{21}} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) - \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \sigma_{21} c \phi \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

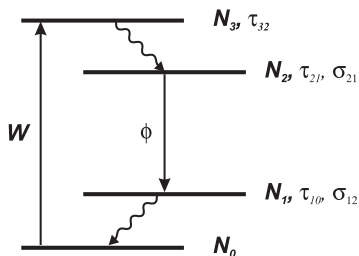
- ▶ Celkový počet částic $N_{tot} = N_1 + N_2$

$$N_1 = \frac{N_{tot} - N}{1 + g_2/g_1}, \quad N_2 = \frac{N_{tot} g_2/g_1 + N}{1 + g_2/g_1}$$

- ▶ Zavedeme $\kappa = 1 + g_2/g_1$ (pro $g_1 = g_2 \Rightarrow \kappa = 2$). Dostaneme:

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{\kappa W - \frac{N_{tot}}{\tau_{21}} (\kappa - 1)}_{W'} - \frac{N}{\tau_{21}} - \kappa \sigma_{21} c \phi N$$

Rychlostní rovnice pro 4-hladinový systém



$$\frac{dN_3}{dt} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{dN_0}{dt} = -W + \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

- ▶ Rychlá relaxace hladiny 1 a 3 $\Rightarrow N_1, N_3 \ll N_0, N_2$

$$\frac{N_3}{\tau_{32}} = W, \quad \frac{N_1}{\tau_{10}} = \frac{N_2}{\tau_{21}} + c \sigma_{21} N_2 \phi - c \sigma_{12} N_1 \phi$$

- ▶ Inverze populace hladin $N \doteq N_2$, celkový počet částic $N_{tot} = N_0 + N_2 = N_0 + N$

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - c \sigma_{21} N \phi$$

$$\frac{dN_0}{dt} = -\frac{\partial N}{\partial t} = -W + \frac{N}{\tau_{21}} + c \sigma_{21} N \phi$$

- ▶ Pro 4-hladinový systém položíme $\kappa = 1$:

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \kappa c \sigma_{21} N \phi$$

- ▶ Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím
- ▶ Změna počtu (hustoty) fotonů v rezonátoru způsobená absorpcí a stimulovanou emisí odpovídá (až na znaménko) změně populace (hustoty populace) hladiny N_2

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{abs., stim. e.}} = c\sigma_{21}N_2\phi - c\sigma_{12}N_1\phi = c\sigma_{21}N\phi$$

- ▶ Částečně může přispívat k fotonům v rezonátoru i spontánní emise ($k \sim 0$)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{spont. e.}} = k\frac{N_2}{\tau_{21}}$$

- ▶ Část fotonů unikne – doba života fotonů v rezonátoru τ_c je konečná (fotony unikají výstupním zrcadlem, v důsledku ztrát. . .)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{rezonátor}} = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

- ▶ Dohromady dostaneme:

$$\frac{d\phi}{dt} = c\sigma_{21}N\phi - \frac{\phi}{\tau_c} + k\frac{N_2}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma_{21}}{\hbar\omega_{21}}NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c\sigma_{21}NI - \frac{I}{\tau_c}$$

- N hustota inverze populace hladin v aktivním prostředí
 I intenzita záření v rezonátoru
 W čerpací rychlost (rychlost excitace horní laserové hladiny vlivem čerpání)
 σ_{21} účinný průřez pro stimulovanou emisi
 κ faktor redukce inverze populace hladin
 τ_{21} doba života kvantové soustavy na horní laserové hladině
 τ_c doba života fotonu v rezonátoru
 μ koeficient zaplnění rezonátoru aktivním prostředím
 c rychlost světla v aktivním prostředí
 ω_{21} úhlová frekvence laserového záření

$$\sigma_{21} = \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 T_2}{\hbar c \epsilon_0}, \quad \tau_{21} \approx T_1$$

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma_{21}}{\hbar\omega_{21}}NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c\sigma_{21}NI - \frac{I}{\tau_c}$$

$$\kappa = \begin{cases} 1 + \frac{g_2}{g_1}, & 3 - \text{hladinový systém, } g_i \text{ je degenerace } i - \text{té hladiny} \\ 1, & 4 - \text{hladinový systém} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\text{optická délka aktivního prostředí}}{\text{optická délka rezonátoru}} = \frac{L_{ap}n_{ap}}{L_r + L_{ap}(n_{ap} - 1)}$$

$$\tau_c = \frac{\tau_R}{L - \ln R}$$

- L_r a L_{ap} délka rezonátoru a aktivního prostředí
- n_{ap} index lomu aktivního prostředí
- τ_R doba oběhu rezonátoru
- R reflexivita výstupního zrcadla rezonátoru
- L další ztráty rezonátoru (absorpce optických prvků, difrakční ztráty, ...)

- ▶ V rovnici pro inverzi

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma_{21}}{\hbar\omega_{21}}NI$$

- ▶ využijeme obecný vztah pro saturační intenzitu záření v daném aktivním prostředí

$$I_s = \frac{\hbar\omega_{21}}{\kappa\sigma_{21}\tau_{21}}$$

- ▶ ... dostaneme

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_{21}}$$

- ▶ Pozor na čerpací rychlost $W = W(N)$!

- ▶ Čerpací rychlost W udává počet přechodů kvantových soustav aktivního prostředí na horní laserovou hladinu v důsledku čerpání za jednotku času v jednotce objemu
- ▶ Čerpací rychlost obecně závisí na populaci absorbující hladiny, tedy i inverzi populace hladin a tedy i na čase
- ▶ Za předpokladu, že se populace absorbující hladiny příliš nemění (čtyř hladinové schéma čerpání), můžeme předpokládat nezávislost W na N
- ▶ Uvažujeme optické čerpání

$$W(t) = \eta \frac{P_{abs}(t)}{\hbar\omega_p V_{ap}},$$

kde P_{abs} je absorbovaný výkon čerpacího záření, V_{ap} je objem aktivního prostředí, ω_p je frekvence čerpacího záření a η zahrnuje všechny možné ztrátové procesy čerpání (kvantovou účinnost čerpání, překrytí čerpacího a laserového svazku a pod.).

- ▶ V takovém případě je čerpací rychlost přímo úměrná čerpacímu výkonu

- ▶ V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s} \frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

- ▶ Z rovnice pro inverzi dostaneme:

$$I_0 = \left(\frac{W \tau_{21}}{N_0} - 1 \right) I_s$$

- ▶ Aby byla ustálená hodnota $I_0 > 0$, musí čerpací rychlost přesahovat určité minimum – práh:

$$W_0 = \frac{N_0}{\tau_{21}}, \quad \text{přitom z rovnice pro intenzitu} \Rightarrow N_0 = \text{const.} = \frac{1}{\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

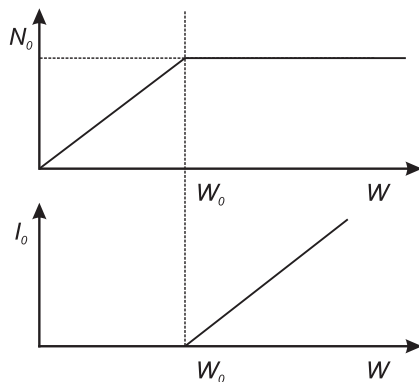
- ▶ Potom nad prahem generace ($I_0 > 0$, $W > W_0$):¹

$$I_0 = \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right) I_s = (W - W_0) \frac{I_s}{W_0} \quad \text{a} \quad W_0 = \frac{1}{\tau_{21} \tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

- ▶ Pod prahem generace ($I_0 = 0$, $W < W_0$) roste N_0 s čerpáním:

$$N_0 = W \tau_{21}$$

¹Pokud $(W/W_0 - 1) = 1$, tj. pro $W = 2W_0$, bude střední intenzita uvnitř rezonátoru $I_0 = I_s$.



$$N_0 = \begin{cases} W\tau_{21} & \text{pro } W \leq W_0 \\ 1/\tau_c \sigma_{21} \mu C & \text{pro } W \geq W_0 \end{cases}$$

$$I_0 = \begin{cases} 0 & \text{pro } W \leq W_0 \\ I_s (W - W_0) / W_0 & \text{pro } W \geq W_0 \end{cases}$$

- ▶ Stacionární intenzita uvnitř rezonátoru

$$I_0 = \frac{I_s}{W_0} (W - W_0)$$

- ▶ V případě, že je zrcadlo málo propustné (R se blíží k 1), pak pro intenzitu generovaného laserového záření I_{out} platí (DC 4.1):

$$I_{out} \doteq \frac{1 - R}{2} I_0.$$

- ▶ Pro nízké hodnoty populace excitovaných hladin, kdy je rychlost buzení jen nepatrně závislá na jejich obsazení, bude čerpací rychlost přímo úměrná výkonu čerpacího záření. Např.:

$$W(t) = \eta_{pmp} \frac{P_{in}(t)}{V_{ap} \hbar \omega_p}$$

- ▶ Dostaneme lineární výstupní výkonovou charakteristiku laseru (DC 4.2):

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

- ▶ P_{out} , P_{in} a P_{th} je postupně výstupní výkon generovaného záření, výkon buzení a prahový výkon buzení a σ_s je tzv. diferenciální účinnost laseru, nebo také strmost výstupní charakteristiky.

- ▶ Výstupní intenzita:

$$I_{out} = \frac{1 - R}{2} \frac{I_s}{W_0} \left(\eta_{pmp} \frac{P_{in}}{V_{ap} \hbar \omega_p} - W_0 \right)$$

- ▶ Tj. (S_l – příčný průřez laserového svazku):

$$P_{out} = I_{out} S_l = \underbrace{\eta_{pmp} \frac{1 - R}{2 V_{ap} \hbar \omega_p} \frac{S_l I_s}{W_0}}_{\sigma_s} \left(P_{in} - \underbrace{\frac{W_0 V_{ap} \hbar \omega_p}{\eta_{pmp}}}_{P_{th}} \right)$$

- ▶ Strmost ($V_{ap} = S_{ap} L_{ap}$, $t_R = 2L_{ap}/c\mu$, $1 - R \approx -\ln R$):

$$\sigma_s = \frac{\eta_{pmp}(1 - R)}{2 V_{ap} \hbar \omega_p} \frac{S_l I_s}{W_0} = \eta_{pmp} \frac{(1 - R) \tau_{21} \tau_c \mu c \sigma_{21}}{2 V_{ap} \hbar \omega_p} \frac{S_l \hbar \omega_{21}}{\kappa \sigma_{21} \tau_{21}} = \frac{\eta_{pmp}}{\kappa} \frac{S_l}{S_{ap}} \frac{-\ln R}{L - \ln R} \frac{\omega_{21}}{\omega_p}$$

- ▶ Práh:

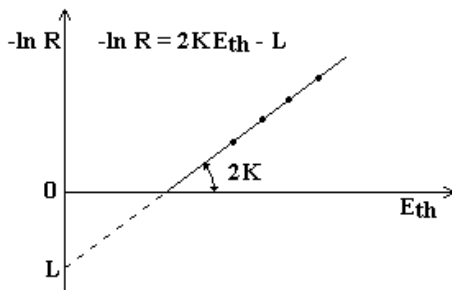
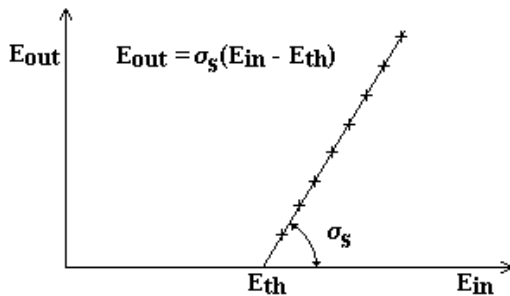
$$P_{th} = \frac{W_0 V_{ap} \hbar \omega_p}{\eta_{pmp}} = \frac{V_{ap} \hbar \omega_p}{\eta_{pmp} \tau_{21} \tau_c \mu c \sigma_{21}} = S_{ap} \frac{L - \ln R}{\eta_{pmp}} \frac{\hbar \omega_p}{2 \tau_{21} \sigma_{21}}$$

- ▶ Vztah mezi Einsteinovými koeficienty:

$$A_{21} = \frac{2 \hbar \omega_{21}^3}{\pi c^3} B_{21}, \quad A_{21} = 1/\tau_{21}, \quad B_{21} = \frac{c \sigma_{21}}{\hbar \omega_{21}} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{21} \sigma_{21}} = \frac{2}{\pi c^2} n_{ref}^2 \omega_{21}^2$$

- ▶ Určení pasivních ztrát (Metoda Findlay-Clay): $-\ln R = 2KP_{th} - L$

Určení pasivních ztrát (Metoda Findlay-Clay)



- ▶ Šíření impulzů rezonančním prostředím v poloklasické aproximaci

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\ \frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2\end{aligned}$$








- ▶ Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_{21}} \\ \frac{dI}{dt} &= \mu c \sigma_{21} N I - \frac{I}{\tau_c}\end{aligned}$$

- ▶ Stacionární řešení. Prahová podmínka. Výstupní výkonová charakteristika laseru.

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

- ▶ Příště: Přechodové jevy v režimu volné generace. Metody generace nanosekundových impulsů. Q-spínání. Spínání ziskem

-  SALEH, B. E. A.– TEICH, M. C.: *Základy fotoniky - 3.díl*, Matfyzpress, Praha, 1995 (<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/fotonika/Fotonika-3-text.pdf>)
-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>