

# Fyzika laserů

## Kvantová teorie laseru

Kvazidistribuční funkce. Zobecněné uspořádání. Fokkerova-Planckova rovnice.

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky  
České vysoké učení technické  
jan.sulc@fifi.cvut.cz

20. dubna 2021

1. **Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice**
2. **Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice**
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. **Kvantová teorie laseru, F-P rovnice**
11. **F-P rovnice pro záření a atom**
12. **F-P rovnice pro laser**
13. **Statistické vlastnosti laserového záření**

- ▶ Kvantově popisujeme jak prostředí, tak záření.
- ▶ Na rozdíl od poloklasické teorie je možné studovat statistické vlastnosti generovaného záření
  - ▶ Amplituda elektrického pole  $\sim \langle \hat{a} \rangle$
  - ▶ Intenzita záření  $\sim \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$
  - ▶ Stupeň koherence  $\sim$  korelační funkce 2. řádu  $\sim \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t - \tau) \rangle$
- ▶ Použití statistického operátoru, respektive výpočet jeho prvků, je komplikované, protože mód pole má nekonečně mnoho stavů.
- ▶ Od výpočtu středních hodnot pomocí statistického operátoru přejdeme k použití **kvazidistribuční funkce**  $P(\tilde{\alpha})$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) \mathcal{O}^c(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha}$$

- ▶ kde  $\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})$  je zobecněná funkce přiřazená operátoru  $\hat{O}$ .
- ▶ Kvazidistribuční funkce  $P(\tilde{\alpha})$  obsahuje stejnou informaci, jako statistický operátor, není ale stanovena jednoznačně.
- ▶ Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných (uspořádání).
- ▶ Odvodíme rovnici pro časový vývoj kvazidistribuční funkce (F-P rovnice) a tak určíme dynamiku systému.

- ▶ Máme nějakou měřitelnou veličinu  $O$  a jí přísluší operátor  $\hat{O}$  (např. měříme délku tyče podél osy  $x$  s počátkem v bodě  $x = 0$ . Délka tyče bude měřitelná veličina  $L$  s operátorem  $\hat{L} = \hat{x}$  a s přidruženou funkcí  $\mathcal{L}^c = x$ )
- ▶ Stav systému (např. délku tyče za daných podmínek) můžeme popsat různými způsoby. Nás zajímá střední hodnota měřitelné  $\langle O \rangle$ , resp.  $\langle \hat{O} \rangle$  (tedy  $\langle L \rangle = \langle \hat{x} \rangle$ )

Stav systému	Střední hodnota	Příklad $\langle \hat{L} \rangle = \langle \hat{x} \rangle$
$ \psi\rangle$	$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi   \hat{O}   \psi \rangle$	$\langle \hat{L} \rangle = \langle \psi   \hat{x}   \psi \rangle$
$\hat{\rho}$	$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$	$\langle \hat{L} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{x} \}$
$P(\vec{o})$	$\langle \hat{O} \rangle = \int \mathcal{O}^c(\vec{o}) P(\vec{o}) d\vec{o}$	$\langle \hat{L} \rangle = \int x P(\vec{o}) d\vec{o}$

$\vec{o}$  je vektor všech nezávislých proměnných potřebných k popisu (fázového prostoru) systému.

- ▶ V klasické fyzice slouží k určení středních hodnot fyzikálních veličin funkce rozložení (distribuce) pravděpodobnosti. Např. normální rozdělení udávající hustotu pravděpodobnosti naměření délky tyče  $f(x)$ ). Střední délka tyče bude první obecný moment hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$\bar{x} = \int xf(x)dx$$

Vyšší momenty se pak dají využít pro další charakteristiky systému.

- ▶ Totéž bychom chtěli umět pomoci vhodných rozdělovacích funkcí i v kvantové fyzice.

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \mathcal{O}^c(\vec{o})P(\vec{o}) d\vec{o}$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce  $P(\vec{o})$  – reálná zobecněná funkce komplexních argumentů, která obsahuje stejnou informaci o kvantovém statistickém souboru jako statistický operátor.
- ▶ Kvazidistribuční funkce má jednak atributy pravděpodobnostní distribuce, jednak, může nabývat i záporných hodnot nebo být „singulárnější“ než  $\delta$ -funkce.
- ▶ Pokud má kvantový stav popsáný pomocí kvazidistribuční funkce svůj klasický protějšek, je tato funkce nezáporná a „nanejvýš“  $\delta$ -funkce.



- ▶ Anihilační a kreační operátory  $\hat{a}$  a  $\hat{a}^\dagger$  tvoří „bázi“ – úplný soubor operátorů
  - ▶  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
  - ▶ Koherentní stav  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
  - ▶ Záleží na pořadí  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

- ▶ Taylorův rozvoj obecného operátoru:

- ▶ **Normální** uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^N (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- ▶ **Antinormální** uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^A \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

- ▶ Přiřazené klasická funkce:

- ▶ Normální uspořádání

$$\bar{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^N \alpha^{*m} \alpha^n$$

- ▶ Antinormální uspořádání

$$\bar{O}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^A \alpha^m \alpha^{*n}$$

# Primitivní příklad – operátor počtu fotonů $\hat{n}$

- ▶ Komutační relace  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$
- ▶ Operátor počtu fotonů (excitací)  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ 
  - ▶ **Normální** uspořádání

$$\hat{n} = \sum_{m,n} o_{mn}^N (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \text{tj. } o_{11}^N = 1, \quad \text{ostatní} = 0$$

- ▶ **Antinormální** uspořádání

$$\hat{n} = \sum_{m,n} o_{mn}^A \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1, \quad \text{tj. } o_{00}^A = -1, o_{11}^A = 1, \quad \text{ostatní} = 0$$

- ▶ Přřazené klasické funkce:
  - ▶ Normální uspořádání

$$\bar{n}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^N \alpha^{*m} \alpha^n = |\alpha|^2$$

- ▶ Antinormální uspořádání

$$\bar{n}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^A \alpha^m \alpha^{*n} = |\alpha|^2 - 1$$



- ▶ Statistický operátor  $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$  Glauber-Sudarshanova reprezentace

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

- ▶ Reálná fce komplexní proměnné  $\Phi_{\mathcal{N}}^*(\alpha) = \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$ ,  $\int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) d^2\alpha = 1$
- ▶ Koherentní stav  $|\gamma\rangle$ :

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \gamma)$$

- ▶ Záření černého tělesa:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\}) = \prod_{\lambda} \frac{e^{-\frac{|\alpha|_{\lambda}^2}{\langle n_{\lambda} \rangle}}}{\pi \langle n_{\lambda} \rangle}$$

- ▶ Záření ideálního jednomódového laseru:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \frac{\delta(|\alpha| - |\beta|)}{2\pi|\alpha|}$$

- ▶ Střední hodnota libovolného operátoru  $\hat{O}$  (DC):

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) \mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha$$

- ▶ Normálně uspořádaná kvazidistribuční funkce pro jednomódové pole (DC)

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{\pi} \bar{\rho}^A(\alpha, \alpha^*)$$

- ▶ Uspořádané nekomutující operátory  $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_f)$
- ▶ Obecný operátor ve zvoleném, tzv. c-uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \hat{a}_1^{r_1} \dots \hat{a}_f^{r_f}$$

- ▶ Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_f^{r_f}$$

- ▶ Zpětná transformace  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C}\bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i$$

- ▶  $\delta$ -funkce jsou definovány vztahy:
  - ▶ Pro hermitovský operátor  $\hat{a}$  je:

$$\delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} d\xi$$

- ▶ Pro nehermitovský operátor  $\hat{a}$ :

$$\delta(\alpha - \hat{a})\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} e^{-i\xi^*(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} d^2\xi,$$

- ▶ Výpočet střední hodnoty operátoru  $Q^c$  dovoluje definovat kvazidistribuční funkci příslušející ke zvolenému  $c$ -uspořádání:

$$\begin{aligned}
 \langle Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) \rangle &= \langle \mathcal{C} \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \rangle \\
 &= \left\langle \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i \right\rangle \\
 &= \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \underbrace{\left\langle \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) \right\rangle}_{P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f)} d\alpha_1 \dots d\alpha_f \\
 &= \int \dots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_f \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f).
 \end{aligned}$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce je dána střední hodnotou  $c$ -uspořádané  $\delta$ -funkce:

$$\begin{aligned}
 P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f) &= \langle \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1) \delta(\alpha_2 - \hat{a}_2) \dots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f) \rangle \\
 &= \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1) \dots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f) \}
 \end{aligned}$$

- ▶ V případě jednoho módu elektromagnetického pole je  $P_{\mathcal{N}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$ .

- ▶  $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f)$  – uspořádaný vektor operátorů kvantového systému ve Schrödingerově obrazu.
- ▶  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_f)$  – příslušný vektor komplexních proměnných
- ▶ Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné  $\hat{M}$

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_C(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- ▶ Časově proměnná kvazidistribuční funkce:

$$P_C(\tilde{\alpha}_0, t) = \text{Tr} \left\{ \varrho^S(t) \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) \right\}$$

- ▶ Počáteční podmínka  $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{a}(t_0)$
- ▶ Časový vývoj střední hodnoty  $\hat{M}(t) = M^c(\tilde{a}, t)$  operátoru je možné stanovit, je-li znám časový vývoj kvazidistribuční funkce  $P_C(\tilde{\alpha}, t)$  spolu s počáteční podmínkou.
- ▶ Potřebujeme pohybovou rovnici pro kvazidistribuční funkci  $\Rightarrow$

## Fokkerova-Planckova rovnice

- ▶ Postup odvození z řídicí rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \dots} + \boxed{P_C(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{\mathbf{a}}) \}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_C}{\partial t} = \dots}$$

- ▶ Vyjdeme ze známé řídicí rovnice pro obecný markovovský systém:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}^S(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ &\times \left\{ \left[ \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \right] w_{ij}^+ - \left[ \hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right] w_{ji}^- \right\} \end{aligned}$$

- ▶ Levou i pravou stranu řídicí rovnice vynásobíme zobecněnou  $\delta^c$ -funkcí operátorových proměnných  $\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathbf{a}}_0)$  a vyjádříme stopu  $\text{Tr}_S \{ \}$  na obou stranách rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathbf{a}}_0) \right\} - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \times \\ &\times \text{Tr}_S \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \delta^c - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \delta^c \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \delta^c - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \delta^c \right) w_{ji}^- \right\} \end{aligned}$$

- Máme:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\} - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \times \\ \times \text{Tr}_S \left\{ (\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \delta^c - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \delta^c) w_{ij}^+ - (\hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \delta^c - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \delta^c) w_{ji}^- \right\}$$

- Provedeme cyklické permutace pod stopou ( $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$ ), aby na prvním místě byl statistický operátor  $\hat{\rho}^S(t)$  (DC):

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \left( \frac{1}{i\hbar} [\delta^c, \hat{H}] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ [\delta^c, \hat{Q}_i^S] \hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S [\delta^c, \hat{Q}_i^S] w_{ji}^- \right\} \right) \right\}$$

- Např.:

$$\text{Tr}_S \left\{ [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{H} \hat{\rho}^S(t) \delta^c - \hat{\rho}^S(t) \hat{H} \delta^c \right\} = \\ = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \delta^c \hat{H} - \hat{\rho}^S(t) \hat{H} \delta^c \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) (\delta^c \hat{H} - \hat{H} \delta^c) \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) [\delta^c, \hat{H}] \right\}$$

- Máme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \left( \frac{1}{i\hbar} [\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0), \hat{H}] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ [\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0), \hat{Q}_i^S] \hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S [\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0), \hat{Q}_i^S] w_{ji}^- \right\} \right) \right\} \end{aligned}$$

- Ve zobecněné  $\delta$ -funkci  $\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0)$  oddělíme operátor a číslo
- Zobecněné  $\delta$ -funkce lze upravit:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha - \hat{a}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} e^{i\xi\hat{a}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi\hat{a})^n}{n!} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hat{a})^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} (e^{-i\xi\alpha}) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{-i\xi\alpha} d\xi = e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} d\xi = e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \delta(\alpha) \end{aligned}$$

- ▶ Pro c-uspořádanou  $\delta$ -funkci platí:

$$\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0) = e^{-\tilde{\alpha}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} \delta(\tilde{\alpha}_0)$$

- ▶ Rovnice nabývá tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \left( \frac{1}{i\hbar} [e^{-\tilde{\alpha}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{H}] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( [e^{-\tilde{\alpha}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S] \hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S [e^{-\tilde{\alpha}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S] w_{ji}^- \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\} \\ &\equiv \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \mathcal{L} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}, \end{aligned}$$

kde  $\mathcal{L}$  je operátorová funkce.

- ▶ Uplatníme komutační relace a tuto operátorovou funkci zapíšeme ve zvoleném c-uspořádání jako  $\mathcal{L}^c$ . Potom:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}$$



► Máme:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}$$

Využijeme formální zpětné transformace  $\mathcal{C}$  : funkce  $\rightarrow$  operátorová funkce

$$= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \int \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) d\tilde{\beta}_0 \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}$$

Stopa působí jen na operátory

$$= \int d\tilde{\beta}_0 \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \underbrace{\text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\}}_{P_C(\tilde{\beta}_0, t)} \delta(\tilde{\alpha}_0)$$

Vložíme šikovnou jedničku...

$$= \int d\tilde{\beta}_0 \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \underbrace{e^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} e^{-\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}}_{=1} \delta(\tilde{\alpha}_0) P_C(\tilde{\beta}_0, t)$$

Využijeme platnost vztahu  $e^{-\tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}}} \delta(\tilde{\alpha}) = \delta(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})$

$$= \int d\tilde{\beta}_0 \mathcal{L}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) e^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} P_C(\tilde{\beta}_0) \delta(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

a integrujeme podle  $\tilde{\beta}_0 \dots$

- ▶ Ještě jednou, máme:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \int d\tilde{\beta}_0 \underbrace{\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right)}_{\tilde{\mathcal{L}}^c(\partial/\partial \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0)} e^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} P_C(\tilde{\beta}_0) \delta(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

- ▶ a po integraci přes  $\tilde{\beta}_0()$  dostaneme hledanou Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{L}}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right) P_C(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- ▶ Funkce  $\tilde{\mathcal{L}}^c$  obsahuje diferenciální operátory  $\partial/\partial \tilde{\alpha}_0$  v argumentu funkce  $\exp()$ , t.j. obecně jde o diferenciální operátor libovolného řádu. Fokkerova-Planckova rovnice je tedy parciální diferenciální rovnice libovolného řádu.

- ▶ Fokkerova-Planckova rovnice pro určení časového vývoje kvazidistribuční funkce je ekvivalentem řídicí rovnice pro statistický operátor.
- ▶ Je to v podstatě Boltzmannova rovnice pro distribuční funkci, vztažená na kvantové systémy.
- ▶ Na rozdíl od klasické Fokkerovy-Planckovy rovnice může pravá strana této rovnice obsahovat i derivace vyššího řádů než druhého.
- ▶ V mnoha důležitých případech (např. pro tlumený harmonický oscilátor) má tato rovnice tvar:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [A_i(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t)] + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} [D_{ij}(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t)]$$

- ▶ sumy probíhají přes jednotlivé složky vektoru  $\tilde{\alpha}$ ;
- ▶ pravá strana obsahuje nejvýše derivace druhého řádu;
- ▶ veličiny  $A_i(\tilde{\alpha})$  a  $D_{ij}(\tilde{\alpha})$  označují příslušné driftové (související s posuvem maxima kvazidistribuční funkce) a difúzní (související s rozplýváním kvazidistribuční funkce) koeficienty.

- ▶ Plně kvantový popis interakce záření s látkou vyžaduje modifikaci aparátu pro popis stavu kvantové soustavy – matice statistického operátoru by měla pro pole nekonečně mnoho prvků  $\Rightarrow$  Kvazidistribuční funkce

$$P_C(\tilde{\alpha}_0, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{\mathbf{a}}) \}$$

- ▶ Zvolené zobecněné  $c$ -uspořádání operátorů je třeba dodržovat

$$\hat{M} = M^c(\hat{\mathbf{a}}_1, \dots, \hat{\mathbf{a}}_f) = \int \dots \int \bar{M}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{\mathbf{a}}_i) d\alpha_i$$






- ▶ Výpočet střední hodnoty operátoru měřitelné  $\hat{M}$  pomocí přidružené klasické funkce  $M^c(\tilde{\alpha}_0)$

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{\mathbf{a}}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_C(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- ▶ Pohybová rovnice pro kvazidistribuční funkci  $P_C(\tilde{\alpha})$  – Fokkerova-Planckova rovnice

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{L}}^c \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) P_C(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- ▶ Parciální diferenciální rovnice vysokého řádu je v mnoha praktických případech redukovatelná na rovnici druhého řádu.
- ▶ Příště: F-P rovnice pro pole a atom

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>