Fyzika laserů

Kvantová teorie laseru

Kvazidistribuční funkce. Zobecněné uspořádání. Fokkerova-Planckova rovnice.

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

5. května 2020

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. **Kvantová teorie laseru, F-P rovnice**
11. F-P rovnice pro záření a atom
12. F-P rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

- Kvantově popisujeme jak prostředí, tak záření.
- Na rozdíl od poloklasické teorie je možné studovat statistické vlastnosti generovaného záření
  - Amplituda elektrického pole $\sim \langle \hat{a} \rangle$
  - Intenzita záření $\sim \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$
  - Stupeň koherence $\sim$ korelační funkce 2. řádu $\sim \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t-\tau) \rangle$
- Použití statistického operátoru, respektive výpočet jeho prvků, je komplikované, protože mód pole má nekonečně mnoho stavů.
- Od výpočtu středních hodnot pomocí statistického operátoru přejdeme k použití kvazidistribuční funkce $P(\tilde{o})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\,\hat{O}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{o})\mathcal{O}^c(\tilde{o})\,d\tilde{o}$$

- kde $\mathcal{O}^c(\tilde{o})$ je zobecněná funkce přiřazená operátoru $\hat{O}$.
- Kvazidistribuční funkce $P(\tilde{o})$ obsahuje stejnou informaci, jako statistický operátor, není ale stanovena jednoznačně.
- Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných (uspořádání).
- Odvodíme rovnici pro časový vývoj kvazidistribuční funkce (F-P rovnice) a tak určíme dynamiku sytému.

Střední hodnota měřitelné veličiny

- Máme nějakou měřitelnou veličinu O a jí přísluší operátor $\hat{O}$ (např. měříme délku tyče podél osy x s počátkem v bodě $x = 0$. Délka tyče bude měřitelná veličina L s operátorem $\hat{L} = \hat{x}$ a s přidruženou funkcí $\mathcal{L}^c = x$)
- Stav systému (např. délku tyče za daných podmínek) můžeme popsat různými způsoby. Nás zajímá střední hodnota měřitelné $\langle O \rangle$, resp. $\langle \hat{O} \rangle$ (tedy $\langle L \rangle = \langle \hat{x} \rangle$)

Stav systému	Střední hodnota	Příklad $\langle \hat{L} \rangle = \langle \hat{x} \rangle$
$\vert\psi\rangle$	$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi \vert \hat{O} \vert \psi \rangle$	$\langle \hat{L} \rangle = \langle \psi \vert \hat{x} \vert \psi \rangle$
$\hat{\varrho}$	$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\varrho}\hat{O} \right\}$	$\langle \hat{L} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\varrho}\hat{x} \right\}$
$P(\tilde{o})$	$\langle \hat{O} \rangle = \int \mathcal{O}^c(\tilde{o}) P(\tilde{o})\, d\tilde{o}$	$\langle \hat{L} \rangle = \int x P(\tilde{o})\, d\tilde{o}$

$\tilde{o}$ je vektor všech nezávislých proměnných potřebných k popisu (fázového prostoru) systému.

Kvazidistribuční funkce

- V klasické fyzice slouží k určení středních hodnot fyzikálních veličin funkce rozložení (distribuce) pravděpodobnosti. Např. normální rozdělení udávající hustotu pravděpodobnosti naměřeni délky tyče $f(x)$). Střední délka tyče bude první obecný moment hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$\bar{x} = \int x f(x) dx$$

  Vyšší momenty se pak dají využít pro další charakteristiky systému.
- Totéž bychom chtěli umět pomocí vhodných rozdělovacích funkcí i v kvantové fyzice.

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \mathcal{O}^c(\tilde{o}) P(\tilde{o})\, d\tilde{o}$$

- Kvazidistribuční funkce $P(\tilde{o})$ – reálná zobecněná funkce komplexních argumentů, která obsahuje stejnou informaci o kvantovém statistickém souboru jako statistický operátor.
- Kvazidistribuční funkce má jednak atributy pravděpodobnostní distribuce, jednak, může nabývat i záporných hodnot nebo být „singulárnější“ než δ-funkce.
- Pokud má kvantový stav popsaný pomocí kvazidistribučni funkce svůj klasický protějšek, je tato funkce nezáporná a „nanejvýš“ δ-funkce.

Klasická distribuce pravděpodobnosti

- Anihilační a kreační operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ tvoří „bázi“ – úplný soubor operátorů
  - $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
  - Koherentní stav $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
  - Záleží na pořadí $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$
- Taylorův rozvoj obecného operátoru:
  - Normální uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^N_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

  - Antinormální uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^A_{mn} \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

- Přiřazené klasická funkce:
  - Normální uspořádání

$$\bar{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^N_{mn} \alpha^{*m} \alpha^n$$

  - Antinormální uspořádání

$$\bar{O}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^A_{mn} \alpha^m \alpha^{*n}$$

Primitivní příklad – operátor počtu fotonů $\hat{n}$

- Komutační relace $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$
- Operátor počtu fotonů (excitací) $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$
  - Normální uspořádání

$$\hat{n} = \sum_{m,n} o^N_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \text{tj.} \quad o^N_{11} = 1, \quad \text{ostatní} = 0$$

  - Antinormální uspořádání

$$\hat{n} = \sum_{m,n} o^A_{mn} \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1, \quad \text{tj.} \quad o^A_{00} = -1, o^A_{11} = 1, \quad \text{ostatní} = 0$$

- Přiřazené klasická funkce:
  - Normální uspořádání

$$\bar{n}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^N_{mn} \alpha^{*m} \alpha^n = |\alpha|^2$$

  - Antinormální uspořádání

$$\bar{n}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^A_{mn} \alpha^m \alpha^{*n} = |\alpha|^2 - 1$$

Kvazidistribuční funkce pro jeden mód elmag. pole

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Glauber-Sudarshanova reprezentace

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

  - Reálná fce komplexní proměnné $\Phi^*_{\mathcal{N}}(\alpha) = \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$, $\int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)\, d^2\alpha = 1$
  - Koherentní stav $|\gamma\rangle$:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \gamma)$$

  - Záření černého tělesa:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\}) = \prod_{\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n_\lambda\rangle}}}{\pi\langle n_\lambda\rangle}$$

  - Záření ideálního jednomódového laseru:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \frac{\delta(|\alpha| - |\beta|)}{2\pi|\alpha|}$$

- Střední hodnota libovolného operátoru $\hat{O}$ (DC):

$$\langle\hat{O}\rangle = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)\, \mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)\, d^2\alpha$$

- Normálně uspořádaná kvazidistribuční funkce pro jednomódové pole (DC)

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{\pi}\bar{\varrho}^{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha^*)$$

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$
- Obecný operátor ve zvoleném, tzv. c-uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

- Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_f^{r_f}$$

- Zpětná transformace $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) = \hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i)\, d\alpha_i$$

- δ-funkce jsou definovány vztahy:
    - Pro hermitovský operátor $\hat{a}$ je:

$$\delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(\alpha - \hat{a})}\, d\xi$$

    - Pro nehermitovský operátor $\hat{a}$:

$$\delta(\alpha - \hat{a})\delta(\alpha^\star - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(\alpha - \hat{a})} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^\star(\alpha^\star - \hat{a}^\dagger)}\, d^2\xi,$$

Kvazidistribuční funkce pro zvolené uspořádání

- Výpočet střední hodnoty operátoru Q^c dovoluje definovat kvazidistribuční funkci příslušející ke zvolenému c-uspořádání:

$$
\begin{aligned}
\langle Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f)\rangle &= \langle \mathcal{C}\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f)\rangle \\
&= \left\langle \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i \right\rangle \\
&= \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \underbrace{\left\langle \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) \right\rangle}_{P_{\mathcal{C}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_f)} d\alpha_1 \cdots d\alpha_f \\
&= \int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_f \, \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) P_{\mathcal{C}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_f).
\end{aligned}
$$

- Kvazidistribuční funkce je dána střední hodnotou c-uspořádané δ-funkce:

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{C}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) &= \langle \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1)\delta(\alpha_2 - \hat{a}_2) \cdots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f)\rangle \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)\, \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1) \cdots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f)\right\}
\end{aligned}
$$

- V případě jednoho módu elektromagnetického pole je $P_{\mathcal{N}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$.

Časový vývoj kvazidistribuční funkce

- $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f)$ – uspořádaný vektor operátorů kvantového systému ve Schrödingerově obrazu.
- $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_f)$ – příslušný vektor komplexních proměnných
- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné $\hat{M}$

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časově proměnná kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t) = \mathrm{Tr}\{ \varrho^S(t)\, \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) \}$$

- Počáteční podmínka $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}(t_0)$
- Časový vývoj střední hodnoty $\hat{M}(t) = M^c(\tilde{a}, t)$ operátoru je možné stanovit, je-li znám časový vývoj kvazidistribuční funkce $P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}, t)$ spolu s počáteční podmínkou.
- Potřebujeme pohybovou rovnici pro kvazidistribuční funkci $\Rightarrow$

Fokkerova-Planckova rovnice

- Postup odvození z řídící rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \cdots} \quad + \quad \boxed{P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \cdots}$$

- Vyjdeme ze známé řídící rovnice pro obecný markovovský systém:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\varrho}^S(t)}{dt} \quad &= \quad \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}, \hat{\varrho}^S(t)] - \sum_{i,j}\delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ &\times \left\{\left[\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}^S - \hat{Q}_j^S\,\hat{\varrho}^S\hat{Q}_i^S\right]w_{ij}^+ - \left[\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\right]w_{ji}^-\right\}\end{aligned}$$

- Levou i pravou stranu řídící rovnice vynásobíme zobecněnou δ^c-funkcí operátorových proměnných $\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0)$ a vyjádříme stopu $\mathrm{Tr}_S\left\{\right\}$ na obou stranách rovnosti:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}_S\left\{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}, \hat{\varrho}^S(t)]\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0)\right\} - \sum_{i,j}\delta(\omega_i, -\omega_j)\times$$
$$\times\,\mathrm{Tr}_S\left\{\left(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}^S\,\delta^c - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_i^S\delta^c\right)w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S\delta^c - \hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\delta^c\right)w_{ji}^-\right\}$$

- Máme:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0,t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}_S\left\{\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H},\hat{\varrho}^S(t)]\delta^c(\tilde{\alpha}_0-\tilde{a}_0)\right\} - \sum_{i,j}\delta(\omega_i,-\omega_j)\times$$
$$\times\,\mathrm{Tr}_S\Big\{\left(\hat{Q}_i^S\hat{Q}_j^S\hat{\varrho}^S\,\delta^c - \hat{Q}_j^S\hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_i^S\delta^c\right)w_{ij}^+ - \left(\hat{Q}_i^S\hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S\delta^c - \hat{\varrho}^S\,\hat{Q}_j^S\hat{Q}_i^S\delta^c\right)w_{ji}^-\Big\}$$

- Provedeme cyklické permutace pod stopou ($\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$), aby na prvním místě byl statistický operátor $\hat{\varrho}^S(t)$ (DC):

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0,t)}{\partial t} \quad &= \quad \mathrm{Tr}_S\Bigg\{\hat{\varrho}^S(t)\Bigg(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\delta^c,\hat{H}\right] - \sum_{i,j}\delta(\omega_i+\omega_j)\times \\ &\qquad \times\Big\{\left[\delta^c,\hat{Q}_i^S\right]\hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S\left[\delta^c,\hat{Q}_i^S\right]w_{ji}^-\Big\}\Bigg)\Bigg\}\end{aligned}$$

- Např.:

$$\mathrm{Tr}_S\left\{[\hat{H},\hat{\varrho}^S(t)]\delta^c(\tilde{\alpha}_0-\tilde{a}_0)\right\} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{H}\hat{\varrho}^S(t)\delta^c - \hat{\varrho}^S(t)\hat{H}\delta^c\right\} =$$
$$= \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\delta^c\hat{H} - \hat{\varrho}^S(t)\hat{H}\delta^c\right\} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\left(\delta^c\hat{H}-\hat{H}\delta^c\right)\right\} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\left[\delta^c,\hat{H}\right]\right\}$$

Odvození z řídící rovnice

- Máme:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathrm{a}}_0), \hat{H}\right] - \sum_{i,j}\delta(\omega_i + \omega_j) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\left\{\left[\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathrm{a}}_0), \hat{Q}_i^S\right]\hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S\left[\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathrm{a}}_0), \hat{Q}_i^S\right] w_{ji}^-\right\}\right)\right\}$$

- Ve zobecněné δ-funkci $\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathrm{a}}_0)$ oddělíme operátor a číslo
- Zobecněné δ-funkce lze upravit:

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha - \hat{\mathrm{a}}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(\alpha - \hat{\mathrm{a}})}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\hat{\mathrm{a}}}\,d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\xi\hat{\mathrm{a}})^n}{n!}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\hat{\mathrm{a}})^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\alpha})\,d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\hat{\mathrm{a}}\frac{\partial}{\partial\alpha}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\alpha}\,d\xi = \mathrm{e}^{-\hat{\mathrm{a}}\frac{\partial}{\partial\alpha}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\alpha}\,d\xi = \mathrm{e}^{-\hat{\mathrm{a}}\frac{\partial}{\partial\alpha}}\,\delta(\alpha)
\end{aligned}$$

- Pro c-uspořádanou δ-funkci platí:

$$\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathsf{a}}_0) = \mathrm{e}^{-\tilde{\mathsf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}\,\delta(\tilde{\alpha}_0)$$

- Rovnice nabývá tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \mathrm{Tr}_S\Bigg\{\hat{\varrho}^S(t)\Bigg(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left[\mathrm{e}^{-\tilde{\mathsf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{H}\right] - \sum_{i,j}\delta(\omega_i + \omega_j) \times \\
&\quad \times \Big(\left[\mathrm{e}^{-\tilde{\mathsf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S\right]\hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S\left[\mathrm{e}^{-\tilde{\mathsf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S\right] w_{ji}^-\Big)\Bigg)\delta(\tilde{\alpha}_0)\Bigg\} \\
&\equiv \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\mathsf{a}}_0\right)\delta(\tilde{\alpha}_0)\right\},
\end{aligned}$$

kde $\mathcal{L}$ je operátorová funkce.

- Uplatníme komutační relace a tuto operátorovou funkci zapíšeme ve zvoleném c-uspořádání jako $\mathcal{L}^c$. Potom:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\,\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\mathsf{a}}_0\right)\delta(\tilde{\alpha}_0)\right\}$$

- Máme:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\,\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\mathbf{a}}_0\right)\delta(\tilde{\alpha}_0)\right\}$$

Využijeme formální zpětné transformace $\mathcal{C}$: funkce $\rightarrow$ operátorová funkce

$$= \mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\int \mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right)\delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\mathbf{a}}_0)\,d\tilde{\beta}_0\,\delta(\tilde{\alpha}_0)\right\}$$

Stopa působí jen na operátory

$$= \int d\tilde{\beta}_0\,\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right)\underbrace{\mathrm{Tr}_S\left\{\hat{\varrho}^S(t)\delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\mathbf{a}}_0)\right\}}_{P_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta}_0, t)}\,\delta(\tilde{\alpha}_0)$$

Vložíme šikovnou jedničku...

$$= \int d\tilde{\beta}_0\,\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right)\underbrace{\mathrm{e}^{\tilde{\beta}_0\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}}\,\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}_0\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}}}_{=1}\,\delta(\tilde{\alpha}_0)P_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta}_0, t)$$

Využijeme platnost vztahu $\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}}}\,\delta(\tilde{\alpha}) = \delta(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})$

$$= \int d\tilde{\beta}_0\,\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right)\mathrm{e}^{\tilde{\beta}_0\frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}_0}}\,P_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta}_0)\,\delta(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

a integrujeme podle $\tilde{\beta}_0$ ...

- Ještě jednou, máme:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \int d\tilde{\beta}_0 \, \underbrace{\mathcal{L}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0\right) \mathrm{e}^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}}_{\bar{\mathcal{L}}^c(\partial/\partial\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0)} P_{\mathcal{C}}(\tilde{\beta}_0)\, \delta(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

- a po integraci přes $\tilde{\beta}_0$() dostaneme hledanou Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right) P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Funkce $\bar{\mathcal{L}}^c$ obsahuje diferenciální operátory $\partial/\partial\tilde{\alpha}_0$ v argumentu funkce exp(), tj. obecně jede od diferenciální operátor libovolného řádu. Fokkerova-Planckova rovnice je tedy parciální diferenciální rovnice libovolného řádu.

Fokkerova-Planckova rovnice

- Fokkerova-Planckova rovnice pro určení časového vývoje kvazidistribuční *funkce* je ekvivalentem řídící rovnice pro statistický *operátor*.
- Je to v podstatě Boltzmanova rovnice pro distribuční funkci, vztažená na kvantové systémy.
- Na rozdíl od klasické Fokkerovy-Planckovy rovnice může pravá strana této rovnice obsahovat i derivace vyššího řádů než druhého.
- V mnoha důležitých případech (např. pro tlumený harmonický oscilátor) má tato rovnice tvar:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha},t)}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[A_i(\tilde{\alpha})P_C(\tilde{\alpha},t)\right] + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\left[D_{ij}(\tilde{\alpha})P_C(\tilde{\alpha},t)\right]$$

  - sumy probíhají přes jednotlivé složky vektoru $\tilde{\alpha}$;
  - pravá strana obsahuje nejvýše derivace druhého řádu;
  - veličiny $A_i(\tilde{\alpha})$ a $D_{ij}(\tilde{\alpha})$ označují příslušné driftové (související s posuvem maxima kvazidistribuční funkce) a difúzní (související s rozplýváním kvazidistribuční funkce) koeficienty.

Shrnutí

- Plně kvantový popis interakce záření s látkou vyžaduje modifikaci modifikaci aparátu pro popis stavu kvantové soustavy – matice statistického operátoru by měla pro pole nekonečně mnoho prvků ⇒ Kvazidistribuční fce
$$P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$
- Zvolené zobecněné c-uspořádání operátorů je třeba dodržovat
$$\hat{M} = M^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \int \cdots \int \bar{M}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i)\, d\alpha_i$$
- Výpočet střední hodnoty operátoru měřitelné $\hat{M}$ pomocí přidružené klasické funkce $M^c(\tilde{\alpha}_0)$
$$\langle \hat{M} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)$$
- Pohybová rovnice pro kvazidistribuční funkci $P_{\mathcal{C}}(\vec{\alpha})$ – Fokkerova-Planckova rovnice
$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right) P_{\mathcal{C}}(\tilde{\alpha}_0, t)$$
- Parciální diferenciální rovnice vysokého řádu je v mnoha praktických případech redukovatelná na rovnici druhého řádu.
- Příště: F-P rovnice pro pole a atom

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/