Fyzika laserů

Fokkerova-Planckova rovnice pro jeden mód elmag. pole
Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

14. května 2020

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. **F.-P. rovnice pro záření a atom**
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Kvantový popis obecných systémů

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}\,\hat{O} \right\}$$

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}\,\hat{O} \right\}$$

- Statistickému operátoru lze přiřadit zobecněnou (kvazidistribuční) funkci (zjednoduší výpočet středních hodnot operátorů)

Kvantový popis obecných systémů

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}\, \hat{O} \right\}$$

- Statistickému operátoru lze přiřadit zobecněnou (kvazidistribuční) funkci (zjednoduší výpočet středních hodnot operátorů)
- Výpočet střední hodnoty náhodné proměnné pomocí známé distribuční funkce $P(\tilde{o})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) \mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})\, d\tilde{\alpha}$$

$\tilde{\alpha}$ je vektorová proměnná a $\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})$ funkce přiřazená operátoru $\hat{O}$

Kvantový popis obecných systémů

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}\, \hat{O} \right\}$$

- Statistickému operátoru lze přiřadit zobecněnou (kvazidistribuční) funkci (zjednoduší výpočet středních hodnot operátorů)
- Výpočet střední hodnoty náhodné proměnné pomocí známé distribuční funkce $P(\tilde{o})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) \mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})\, d\tilde{\alpha}$$

  $\tilde{\alpha}$ je vektorová proměnná a $\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})$ funkce přiřazená operátoru $\hat{O}$
- Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných – uspořádání operátorů.

Kvantový popis obecných systémů

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\,\hat{O}\right\}$$

- Statistickému operátoru lze přiřadit zobecněnou (kvazidistribuční) funkci (zjednoduší výpočet středních hodnot operátorů)
- Výpočet střední hodnoty náhodné proměnné pomocí známé distribuční funkce $P(\tilde{o})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha})\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})\,d\tilde{\alpha}$$

  $\tilde{\alpha}$ je vektorová proměnná a $\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})$ funkce přiřazená operátoru $\hat{O}$
- Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných – uspořádání operátorů.
- Příkladem kvazidistribuční funkce je Glauberova-Sudarshanova reprezentace statistického operátoru $\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \qquad \langle \hat{O} \rangle = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)\,\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)\,d^2\alpha$$

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$.

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$.
- Normální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vlevo od anihilačních)

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^N_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$.
- Normální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vlevo od anihilačních)

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^N_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- Přiřadíme klasickou funkci komplexních proměnných $\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)$ prostou záměnou $\hat{a}^\dagger$ na α^* a $\hat{a}$ na α:

$$\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^N_{mn} \alpha^{*m} \alpha^n$$

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$.
- Normální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vlevo od anihilačních)

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^N_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- Přiřadíme klasickou funkci komplexních proměnných $\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)$ prostou záměnou $\hat{a}^\dagger$ na α^* a $\hat{a}$ na α:

$$\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o^N_{mn} \alpha^{*m} \alpha^n$$

- Antinormální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vpravo od anihilačních):

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o^A_{mn} \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$.
- Normální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vlevo od anihilačních)

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^N (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- Přiřadíme klasickou funkci komplexních proměnných $\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)$ prostou záměnou $\hat{a}^\dagger$ na α^* a $\hat{a}$ na α:

$$\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^N \alpha^{*m} \alpha^n$$

- Antinormální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vpravo od anihilačních):

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^A \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

- Přiřadíme mu opět funkci komplexních proměnných:

$$\mathcal{O}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^A \alpha^m \alpha^{*n}$$

Obecné uspořádání operátorů

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$

Obecné uspořádání operátorů

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$
- Operátor ve zvoleném uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

Obecné uspořádání operátorů

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$
- Operátor ve zvoleném uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

- Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_f^{r_f}$$

Obecné uspořádání operátorů

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$
- Operátor ve zvoleném uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

- Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_f^{r_f}$$

- Vzájemný vztah zapsaný pomocí uspořádané δ-funkce:

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i)\, d\alpha_i$$

Obecné uspořádání operátorů

- Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_f)$
- Operátor ve zvoleném uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

- Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q^c_{r_1 \cdots r_f} \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_f^{r_f}$$

- Vzájemný vztah zapsaný pomocí uspořádané δ-funkce:

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_f) = \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \cdots, \alpha_f) \prod_{i=1}^{f} \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i)\, d\alpha_i$$

- Pro c-uspořádanou δ-funkci platí:

$$\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) = \mathrm{e}^{-\tilde{a}\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}}}\, \delta(\tilde{\alpha})$$

Kvazidistribuční funkce

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Kvazidistribuční funkce

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

Kvazidistribuční funkce

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Kvazidistribuční funkce

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

- Zobecněné c-uspořádání operátorů $\Rightarrow$ Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

Kvazidistribuční funkce

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Kvazidistribuční funkce

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

- Zobecněné c-uspořádání operátorů $\Rightarrow$ Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

- Výpočet střední hodnoty operátoru $\hat{M}$:

$$\langle \hat{M} \rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\,\hat{M}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \langle \hat{M} \rangle = \int P^c(\tilde{\alpha}) M^c(\tilde{\alpha})\, d\tilde{\alpha}$$

Kvazidistribuční funkce

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Kvazidistribuční funkce

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$$

- Zobecněné c-uspořádání operátorů $\Rightarrow$ Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

- Výpočet střední hodnoty operátoru $\hat{M}$:

$$\langle\hat{M}\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}\,\hat{M}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \langle\hat{M}\rangle = \int P^c(\tilde{\alpha}) M^c(\tilde{\alpha})\, d\tilde{\alpha}$$

- Normálně uspořádaná kvazidistribuční funkce pro jednomódové pole

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{\pi}\bar{\varrho}^{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha^*)$$

Fokkerova-Planckova rovnice

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

Fokkerova-Planckova rovnice

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj kvazidistribuční funkce – pohybová rovnice pro kvazidisribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ – F-P rovnice

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t]\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0)P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj kvazidistribuční funkce – pohybová rovnice pro kvazidisribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ – F-P rovnice
- Postup odvození z řídící rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \cdots} \quad + \quad \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \cdots}$$

Fokkerova-Planckova rovnice

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t]\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj kvazidistribuční funkce – pohybová rovnice pro kvazidisribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ – F-P rovnice
- Postup odvození z řídící rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \cdots} \quad + \quad \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \cdots}$$

- Obecný tvar F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj kvazidistribuční funkce – pohybová rovnice pro kvazidisribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ – F-P rovnice
- Postup odvození z řídící rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \cdots} \quad + \quad \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \right\}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \cdots}$$

- Obecný tvar F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}^c\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- V mnoha případech má F-C rovnice tvar ($A_i(\tilde{\alpha})$ – drift, $D_{ij}(\tilde{\alpha})$ – difúze):

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left[A_i(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t) \right] + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\left[D_{ij}(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t) \right]$$

- Platí následující přiřazení:

$$\tilde{\mathsf{a}}_0 = (\hat{\mathsf{a}}^\dagger, \hat{\mathsf{a}}), \qquad \tilde{\alpha}_0 = (\alpha^*, \alpha)$$

$$\begin{aligned}
\delta^N(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathsf{a}}_0) &= e^{-\hat{\mathsf{a}}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}}\,\delta(\alpha^*)\,e^{-\hat{\mathsf{a}} \frac{\partial}{\partial \alpha}}\,\delta(\alpha) \\
&\equiv \delta(\alpha^* - \hat{\mathsf{a}}^\dagger)\,\delta(\alpha - \hat{\mathsf{a}}), \\
\langle \beta \mid \delta(\alpha^* - \hat{\mathsf{a}}^\dagger)\,\delta(\alpha - \hat{\mathsf{a}}) \mid \beta \rangle &= \delta(\alpha^* - \beta^*)\,\delta(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Platí následující přiřazení:

$$\tilde{a}_0 = (\hat{a}^\dagger, \hat{a}), \qquad \tilde{\alpha}_0 = (\alpha^*, \alpha)$$

$$\begin{aligned} \delta^N(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) &= e^{-\hat{a}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}}\, \delta(\alpha^*)\, e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}}\, \delta(\alpha) \\ &\equiv \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)\, \delta(\alpha - \hat{a}), \\ \langle \beta \mid \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)\, \delta(\alpha - \hat{a}) \mid \beta \rangle &= \delta(\alpha^* - \beta^*)\, \delta(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

- Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci a markovovské aproximaci pro tlumený harmonický oscilátor buzený vnější (klasickou) silou $v(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= -\mathrm{i}(\omega_c + \Delta\omega)\Big\{ [\hat{a}^\dagger, \hat{\varrho}]\hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{\varrho}] \Big\} - \mathrm{i} v(t) [\hat{a}^\dagger, \hat{\varrho}] - \mathrm{i} v^*(t) [\hat{a}, \hat{\varrho}] + \\ &+ \frac{\gamma}{2} [2\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \gamma\bar{n} [\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}\hat{a}^\dagger] \end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Platí následující přiřazení:

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_0 = (\hat{a}^\dagger, \hat{a}), &\qquad \tilde{\alpha}_0 = (\alpha^*, \alpha) \\
\delta^N(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) &= e^{-\hat{a}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}} \delta(\alpha^*) \, e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \delta(\alpha) \\
&\equiv \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)\, \delta(\alpha - \hat{a}), \\
\langle \beta \mid \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)\, \delta(\alpha - \hat{a}) \mid \beta \rangle &= \delta(\alpha^* - \beta^*)\, \delta(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

- Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci a markovovské aproximaci pro tlumený harmonický oscilátor buzený vnější (klasickou) silou $v(t)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= -\mathrm{i}(\omega_c + \Delta\omega)\left\{ [\hat{a}^\dagger, \hat{\varrho}]\hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{\varrho}] \right\} - \mathrm{i}v(t)[\hat{a}^\dagger, \hat{\varrho}] - \mathrm{i}v^*(t)[\hat{a}, \hat{\varrho}] + \\
&+ \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] + \gamma\bar{n}\left[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}\hat{a}^\dagger\right]
\end{aligned}
$$

- Protože

$$
\frac{1}{\pi}\bar{\varrho}^{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = P_{\mathcal{N}}(\alpha),
$$

stačí jen pravou stranu řídící rovnice převést do antinormálního uspořádání a po formálním přechodu $\tilde{a} \to \tilde{\alpha}$ dostaneme přímo P-F rovnici

- Neuspořádaná řídící rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} &= -\mathrm{i}(\omega_c+\Delta\omega)\Big\{[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}]\hat{a}+\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{\varrho}]\Big\}-\mathrm{i}v(t)[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}]-\mathrm{i}v^*(t)[\hat{a},\hat{\varrho}]+\\ &+\frac{\gamma}{2}[2\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}-\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}]+\gamma\bar{n}[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}\hat{a}+\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}-\hat{\varrho}\hat{a}\hat{a}^\dagger]\end{aligned}$$

- Neuspořádaná řídící rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} &= -\mathrm{i}(\omega_c+\Delta\omega)\Big\{\big[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}\big]\hat{a}+\hat{a}^\dagger\big[\hat{a},\hat{\varrho}\big]\Big\}-\mathrm{i}v(t)\big[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}\big]-\mathrm{i}v^*(t)\big[\hat{a},\hat{\varrho}\big]+\\ &+ \frac{\gamma}{2}\big[2\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}-\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\big]+\gamma\bar{n}\big[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}\hat{a}+\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}-\hat{\varrho}\hat{a}\hat{a}^\dagger\big]\end{aligned}$$

- Využijeme komutačních vztahů (DC 7.1):

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}-\hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}^\dagger},\\ \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}-\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}^\dagger &= -\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}},\\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}} &= \hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}^\dagger-\hat{a}\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}}-\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

- Neuspořádaná řídící rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} &= -\mathrm{i}(\omega_c+\Delta\omega)\Big\{[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}]\hat{a}+\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{\varrho}]\Big\} - \mathrm{i}v(t)[\hat{a}^\dagger,\hat{\varrho}] - \mathrm{i}v^*(t)[\hat{a},\hat{\varrho}] + \\ &+ \frac{\gamma}{2}[2\hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \gamma\bar{n}[\hat{a}^\dagger\hat{\varrho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\varrho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho} - \hat{\varrho}\hat{a}\hat{a}^\dagger]\end{aligned}$$

- Využijeme komutačních vztahů (DC 7.1):

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a} - \hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}^\dagger}, \\ \hat{a}^\dagger\hat{\varrho}^{\mathcal{A}} - \hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}^\dagger &= -\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}}, \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}} &= \hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}} - \hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

- a převedeme řídící rovnici do antinormálního uspořádání (DC 7.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial t} &= -\mathrm{i}\omega_c'\left\{-\hat{a}\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}} + \frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}^\dagger}\hat{a}^\dagger\right\} + \frac{\gamma}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{a}}(\hat{a}\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}) + \frac{\partial}{\partial\hat{a}^\dagger}(\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}\hat{a}^\dagger)\right\} + \\ &+ \gamma\bar{n}\frac{\partial^2\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}\partial\hat{a}^\dagger} + \mathrm{i}v(t)\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}} - \mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial\hat{\varrho}^{\mathcal{A}}}{\partial\hat{a}^\dagger}\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P_{\mathcal{N}}) + \left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P_{\mathcal{N}}) + \\ &+ \gamma\bar{n}\frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha\partial\alpha^*} + \mathrm{i}v(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha} - \mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha^*}\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P_{\mathcal{N}})+\left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P_{\mathcal{N}})+\\ &+ \gamma\bar{n}\frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha\partial\alpha^*}+\mathrm{i}v(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha}-\mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha^*}\end{aligned}$$

- Zavedeme pomalu proměnné amplitudy pole β, β^* a předpokládáme harmonický průběh buzení v rezonanci s LHO $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t},\quad \alpha^*=\beta^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_c' t},\\ p(\beta,\beta^*,t) &= P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P_{\mathcal{N}}) + \left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P_{\mathcal{N}}) + \\ &+ \gamma\bar{n}\frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha\partial\alpha^*} + \mathrm{i}v(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha} - \mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha^*}\end{aligned}$$

- Zavedeme pomalu proměnné amplitudy pole β, β^* a předpokládáme harmonický průběh buzení v rezonanci s LHO $v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}, \quad \alpha^* = \beta^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_c' t}, \\ p(\beta,\beta^*,t) &= P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)\end{aligned}$$

- F-P rovnice je pak separovatelná a vede na Schrödingerovu rovnici pro dvojrozměrný izotropní harmonický oscilátor (DC 7.3-4)

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P_{\mathcal{N}})+\left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P_{\mathcal{N}})+\\ &+ \gamma\bar{n}\frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha\partial\alpha^*}+\mathrm{i}v(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha}-\mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha^*}\end{aligned}$$

- Zavedeme pomalu proměnné amplitudy pole β, β^* a předpokládáme harmonický průběh buzení v rezonanci s LHO $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t},\quad \alpha^*=\beta^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_c' t},\\ p(\beta,\beta^*,t) &= P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)\end{aligned}$$

- F-P rovnice je pak separovatelná a vede na Schrödingerovu rovnici pro dvojrozměrný izotropní harmonický oscilátor (DC 7.3-4)
- Stacionární řešení odpovídající nejnižšímu řádu (DC 7.5-6):

$$p_{00}(\beta,\beta^*)=\frac{1}{\pi\bar{n}}\exp\left[-\frac{1}{\bar{n}}\left|\beta+\frac{2\mathrm{i}v_0}{\gamma}\right|^2\right]\qquad\left(\text{B.B.}\quad \Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\})=\prod_{\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n_\lambda\rangle}}}{\pi\langle n_\lambda\rangle}\right)$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{2}+\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha P_{\mathcal{N}}) + \left(\frac{\gamma}{2}-\mathrm{i}\omega_c'\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(\alpha^* P_{\mathcal{N}}) + \\ &+ \quad \gamma\bar{n}\frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha\partial\alpha^*} + \mathrm{i}v(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha} - \mathrm{i}v^*(t)\frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial\alpha^*}\end{aligned}$$

- Zavedeme pomalu proměnné amplitudy pole β, β^* a předpokládáme harmonický průběh buzení v rezonanci s LHO $v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_c' t}, \quad \alpha^* = \beta^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_c' t}, \\ p(\beta,\beta^*,t) &= P_{\mathcal{N}}(\alpha,\alpha^*,t)\end{aligned}$$

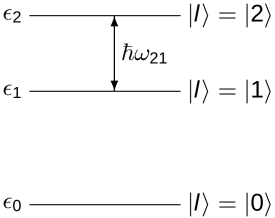
- F-P rovnice je pak separovatelná a vede na Schrödingerovu rovnici pro dvojrozměrný izotropní harmonický oscilátor (DC 7.3-4)
- Stacionární řešení odpovídající nejnižšímu řádu (DC 7.5-6):

$$p_{00}(\beta,\beta^*) = \frac{1}{\pi\bar{n}}\exp\left[-\frac{1}{\bar{n}}\left|\beta+\frac{2\mathrm{i}v_0}{\gamma}\right|^2\right] \qquad \left(\text{B.B.} \quad \Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\}) = \prod_{\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{\langle n_\lambda\rangle}}}{\pi\langle n_\lambda\rangle}\right)$$

- Všechny ostatní vlastní funkce vymizí pro $t \to \infty$

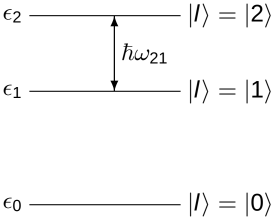
Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



- Řídící rovnice pro statistický operátor $\hat{\varrho}$ v Hilbertově stavovém prostoru všech N atomů má tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} = & \sum_{\lambda=1}^{N} \Bigg\{ \sum_{l} \Bigg(\left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] (|l\rangle\langle l|)_\lambda \hat{\varrho} - \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Bigg) + \\ & + {\sum_{k,l}}' \Big(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Big) \Bigg\},\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Zavedeme nové operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Zavedeme nové operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

- Komutační relace $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = \hat{0}$, $[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}$, $[\hat{M}, \hat{M}^+] = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ (DC 8.1).

- Zavedeme nové operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

- Komutační relace $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = \hat{0}$, $[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}$, $[\hat{M}, \hat{M}^+] = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ (DC 8.1).
- Po dosazením do

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{\lambda=1}^{N} \Bigg\{ \sum_{l} \left(\left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] (|l\rangle\langle l|)_\lambda \hat{\varrho} - \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \right) + \\ &\quad + \sum_{k,l}{}' \left(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \right) \Bigg\}, \end{aligned}$$

- Zavedeme nové operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

- Komutační relace $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = \hat{0}$, $[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}$, $[\hat{M}, \hat{M}^+] = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ (DC 8.1).
- Po dosazením do

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} \quad = \quad & \sum_{\lambda=1}^{N} \Bigg\{ \sum_{l} \left(\left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2}\right] (|l\rangle\langle l|)_\lambda \hat{\varrho} - \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \right) + \\ & + {\sum_{k,l}}' \left(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|l\rangle\langle l|)_\lambda \right) \Bigg\},\end{aligned}$$

- bude mít řídící rovnice tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} \quad = \quad & \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\ + \quad & \sum_{\lambda=1}^{N} {\sum_{k,l}}' \left(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho}\, (|l\rangle\langle l|)_\lambda \right)\end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^\dagger$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^\dagger$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.
- Pro dané c-uspořádání zavedeme δ^c-funkci:

$$\begin{aligned} \delta^c &= \delta(\mathcal{M}^* - \hat{M}^\dagger)\delta(\mathcal{N}_1 - \hat{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2 - \hat{N}_2)\delta(\mathcal{M} - \hat{M}) \\ &= \mathrm{e}^{-\hat{M}^+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}} \mathrm{e}^{-\hat{M} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}} \delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

- Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^{\dagger}$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.
- Pro dané c-uspořádání zavedeme δ^c-funkci:

$$
\begin{aligned}
\delta^c &= \delta(\mathcal{M}^* - \hat{M}^{\dagger})\delta(\mathcal{N}_1 - \hat{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2 - \hat{N}_2)\delta(\mathcal{M} - \hat{M}) \\
&= \mathrm{e}^{-\hat{M}^{+}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

- Řídící rovnici pro $\hat{\varrho}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{2}\left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2}\right]\hat{N}_l\hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2}\left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2}\right]\hat{\varrho}\hat{N}_l + \\
&+ \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k,l}{}' \Big(w_{lk}(|l\rangle\langle k|)_\lambda\hat{\varrho}(|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph}(|k\rangle\langle k|)_\lambda\hat{\varrho}\,(|l\rangle\langle l|)_\lambda\Big)
\end{aligned}
$$

vynásobíme δ^c z pravé strany a vypočteme stopu

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^\dagger$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.
- Pro dané c-uspořádání zavedeme δ^c-funkci:

$$\begin{aligned}\delta^c &= \delta(\mathcal{M}^* - \hat{M}^\dagger)\delta(\mathcal{N}_1 - \hat{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2 - \hat{N}_2)\delta(\mathcal{M} - \hat{M}) \\ &= \mathrm{e}^{-\hat{M}^+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}} \mathrm{e}^{-\hat{M} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}} \delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\end{aligned}$$

- Řídící rovnici pro $\hat{\varrho}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{k,l}{}' \Big(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho}\, (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Big)\end{aligned}$$

  vynásobíme δ^c z pravé strany a vypočteme stopu
- S pomocí cyklické záměny pod stopou přesuneme $\hat{\varrho}(t)$ nalevo a vytkneme

- Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^\dagger, \hat{N}_1, \hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.
- Pro dané c-uspořádání zavedeme δ^c-funkci:

$$\begin{aligned}\delta^c &= \delta(\mathcal{M}^* - \hat{M}^\dagger)\delta(\mathcal{N}_1 - \hat{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2 - \hat{N}_2)\delta(\mathcal{M} - \hat{M}) \\ &= \mathrm{e}^{-\hat{M}^+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} \mathrm{e}^{-\hat{N}_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}} \mathrm{e}^{-\hat{M} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}} \delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\end{aligned}$$

- Řídící rovnici pro $\hat{\varrho}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2}\right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{k,l}{}' \Big(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho}\, (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Big)\end{aligned}$$

  vynásobíme δ^c z pravé strany a vypočteme stopu
- S pomocí cyklické záměny pod stopou přesuneme $\hat{\varrho}(t)$ nalevo a vytkneme
- Přitom položíme energii základního stavu rovnou nule $\epsilon_0 = 0$, použijeme relaci úplnosti, podmínku $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$ a předpoklad, že $N \sim N_0 \gg N_1, N_2$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Řídící rovnice ($\times\delta^c$, Tr, rotace, $\epsilon_0 = 0$, $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$, $N \sim N_0 \gg N_1, N_2$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\
&+ \sum_{\lambda=1}^{N} {\sum_{k,l}}' \Big(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho}\, (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Big)
\end{aligned}
$$

- Řídící rovnice ($\times\delta^c$, Tr, rotace, $\epsilon_0 = 0$, $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$, $N \sim N_0 \gg N_1, N_2$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} \quad = \quad & \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^{2} \left[\frac{\epsilon_l}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\
+ \quad & \sum_{\lambda=1}^{N} \sum_{k,l}{}' \Big(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle\langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_\lambda \hat{\varrho}\, (|l\rangle\langle l|)_\lambda \Big)
\end{aligned}
$$

- Výsledná rovnice má tvar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} \quad = \quad & \mathrm{Tr} \Big\{ \hat{\varrho}(t) \Big[-\Gamma_0 N \delta^c + \left(\frac{\epsilon_1}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_1}{2} \right) \delta^c \hat{N}_1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_1}{2} \right) \hat{N}_1 \delta^c + \\
+ \quad & \left(\frac{\epsilon_2}{\mathrm{i}\hbar} - \frac{\Gamma_2}{2} \right) \delta^c \hat{N}_2 - \left(\frac{\epsilon_2}{\mathrm{i}\hbar} + \frac{\Gamma_2}{2} \right) \hat{N}_2 \delta^c + \\
+ \quad & \sum_{\lambda} \Big(w_{12} (|\,2\rangle\langle 1\,|)_\lambda \delta^c (|\,1\rangle\langle 2\,|)_\lambda + w_{21} (|\,1\rangle\langle 2\,|)_\lambda \delta^c (|\,2\rangle\langle 1\,|)_\lambda + \\
+ \quad & w_{01} (|\,1\rangle\langle 0\,|)_\lambda \delta^c (|\,0\rangle\langle 1\,|)_\lambda + w_{10} (|\,0\rangle\langle 1\,|)_\lambda \delta^c (|\,1\rangle\langle 0\,|)_\lambda + \\
+ \quad & w_{02} (|\,2\rangle\langle 0\,|)_\lambda \delta^c (|\,0\rangle\langle 2\,|)_\lambda + w_{20} (|\,0\rangle\langle 2\,|)_\lambda \delta^c (|\,2\rangle\langle 0\,|)_\lambda + \\
- \quad & \Gamma_{12}^{ph} (|\,1\rangle\langle 1\,|)_\lambda \delta^c (|\,2\rangle\langle 2\,|)_\lambda - \Gamma_{12}^{ph} (|\,2\rangle\langle 2\,|)_\lambda \delta^c (|\,1\rangle\langle 1\,|)_\lambda \Big) \Big] \Big\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^{2}\left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar}-\frac{\Gamma_l}{2}\right]\hat{N}_l\hat{\varrho}-\sum_{l=0}^{2}\left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar}+\frac{\Gamma_l}{2}\right]\hat{\varrho}\hat{N}_l+\\ &+\sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k,l}{}'\left(w_{lk}(|l\rangle\langle k|)_\lambda\hat{\varrho}(|k\rangle\langle l|)_\lambda-\Gamma_{lk}^{ph}(|k\rangle\langle k|)_\lambda\hat{\varrho}\,(|l\rangle\langle l|)_\lambda\right)\end{aligned}$$

- Výsledná rovnice má tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_C}{\partial t} &= \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\varrho}(t)\Big[-\Gamma_0 N\delta^c+\left(\frac{\epsilon_1}{i\hbar}-\frac{\Gamma_1}{2}\right)\delta^c\hat{N}_1-\left(\frac{\epsilon_1}{i\hbar}+\frac{\Gamma_1}{2}\right)\hat{N}_1\delta^c+\\ &+\left(\frac{\epsilon_2}{i\hbar}-\frac{\Gamma_2}{2}\right)\delta^c\hat{N}_2-\left(\frac{\epsilon_2}{i\hbar}+\frac{\Gamma_2}{2}\right)\hat{N}_2\delta^c+\\ &+\sum_\lambda\Big(w_{12}(|\,2\rangle\langle 1\,|)_\lambda\delta^c(|\,1\rangle\langle 2\,|)_\lambda+w_{21}(|\,1\rangle\langle 2\,|)_\lambda\delta^c(|\,2\rangle\langle 1\,|)_\lambda+\\ &+w_{01}(|\,1\rangle\langle 0\,|)_\lambda\delta^c(|\,0\rangle\langle 1\,|)_\lambda+w_{10}(|\,0\rangle\langle 1\,|)_\lambda\delta^c(|\,1\rangle\langle 0\,|)_\lambda+\\ &+w_{02}(|\,2\rangle\langle 0\,|)_\lambda\delta^c(|\,0\rangle\langle 2\,|)_\lambda+w_{20}(|\,0\rangle\langle 2\,|)_\lambda\delta^c(|\,2\rangle\langle 0\,|)_\lambda+\\ &-\Gamma_{12}^{ph}(|\,1\rangle\langle 1\,|)_\lambda\delta^c(|\,2\rangle\langle 2\,|)_\lambda-\Gamma_{12}^{ph}(|\,2\rangle\langle 2\,|)_\lambda\delta^c(|\,1\rangle\langle 1\,|)_\lambda\Big)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

- Členy s $(|\,0\rangle\langle 0\,|)_\lambda$ vypadly, protože $(|\,0\rangle\langle 0\,|)_\lambda$ komutuje s δ^c, resp. s $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}$ a $\hat{M}^\dagger$, a protože $(|\,l\rangle\langle l\,|)_\lambda$ byly jen u Γ_{lk}^{ph}, tak tam zůstaly jen $\Gamma_{12}^{ph}=\Gamma_{21}^{ph}$.

- Dále se budeme zabývat členem:

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)\delta^c\hat{N}_1\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times\right.$$
$$\left.\times\hat{N}_1\mathrm{e}^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\right\}\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{M})\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2).$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Dále se budeme zabývat členem:

$$\mathrm{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\delta^c\hat{N}_1\} = \mathrm{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times$$
$$\times\hat{N}_1\mathrm{e}^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\}\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{M})\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2).$$

- S využitím vztahu:

$$\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}} = \hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}$$

- Dále se budeme zabývat členem:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\delta^c\hat{N}_1\} \quad = \quad & \mathrm{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times \\ & \times\hat{N}_1\mathrm{e}^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\}\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{M})\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2).\end{aligned}$$

- S využitím vztahu:

$$\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}} = \hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}$$

- můžeme předchozí výraz upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\delta^c N_1\} \quad = \quad & \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\varrho}(t)\,\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\left(\hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}\right)\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times \\ & \times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\Big\} = \\ = \quad & \mathrm{Tr}\Big\{\hat{\varrho}(t)\,\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times \\ & \times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\Big\} + \\ + \quad & \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\,\mathrm{Tr}\Big\{\hat{\varrho}(t)\,\mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\mathrm{e}^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\hat{M}\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times \\ & \times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\Big\}\end{aligned}$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$
\begin{aligned}
f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\
f(0) &= \hat{N}_1,
\end{aligned}
$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} =$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} =$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1,\hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \\ &= \left\{[\hat{N}_1,\hat{M}] = \hat{M}\right\} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \hat{M}. \end{aligned}$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1,\hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \\ &= \left\{[\hat{N}_1,\hat{M}] = \hat{M}\right\} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \hat{M}. \end{aligned}$$

- Integrací podle ξ dostaneme:

$$\int_0^{\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi'}d\xi' = \int_0^{\xi}\hat{M}d\xi' \quad\Rightarrow\quad f(\xi) - f(0) = \hat{M}\xi \quad\Rightarrow\quad f(\xi) = \hat{N}_1 + \xi\hat{M}.$$

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \\ &= \left\{[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}\right\} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \hat{M}. \end{aligned}$$

- Integrací podle ξ dostaneme:

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi'} d\xi' = \int_0^{\xi} \hat{M} d\xi' \quad \Rightarrow \quad f(\xi) - f(0) = \hat{M}\xi \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \hat{N}_1 + \xi\hat{M}.$$

- Dosadíme-li za $\xi = \partial/\partial\mathcal{M}$,

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1 e^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1 e^{\xi\hat{M}} + e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}e^{\xi\hat{M}} = e^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]e^{\xi\hat{M}} = \\ &= \left\{[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}\right\} = e^{-\xi\hat{M}}\hat{M}e^{\xi\hat{M}} = \hat{M}. \end{aligned}$$

- Integrací podle ξ dostaneme:

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi'} d\xi' = \int_0^{\xi} \hat{M} d\xi' \quad \Rightarrow \quad f(\xi) - f(0) = \hat{M}\xi \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \hat{N}_1 + \xi\hat{M}.$$

- Dosadíme-li za $\xi = \partial/\partial\mathcal{M}$,

Pomocný výraz

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}}, \\ f(0) &= \hat{N}_1, \end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}\mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} + \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \\ &= \left\{[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}\right\} = \mathrm{e}^{-\xi\hat{M}}\hat{M}\mathrm{e}^{\xi\hat{M}} = \hat{M}. \end{aligned}$$

- Integrací podle ξ dostaneme:

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi'} d\xi' = \int_0^{\xi} \hat{M} d\xi' \quad \Rightarrow \quad f(\xi) - f(0) = \hat{M}\xi \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = \hat{N}_1 + \xi\hat{M}.$$

- Dosadíme-li za $\xi = \partial/\partial\mathcal{M}$, je relace

$$\mathrm{e}^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\hat{N}_1\mathrm{e}^{+\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}} = \hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}$$

dokázána.

- V rozvoji pro exponenciální funkci použijeme jen první dva členy:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} = 1 + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2},$$

derivace vyšších řádů mohou být zanedbány jako úměrné $1/\mathcal{N}_1$.

- V rozvoji pro exponenciální funkci použijeme jen první dva členy:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} = 1 + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2},$$

derivace vyšších řádů mohou být zanedbány jako úměrné $1/\mathcal{N}_1$.
- Tak se od F-P rovnice s obecně libovolným řádem derivací dostaneme k rovnici jen druhého řádu...

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}(\Gamma_{21} + i\omega_{21})\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}(\Gamma_{21} - i\omega_{21})\mathcal{M}^\star - \\ & -\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}(-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}(-w_{21}\mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}(-w_{21}\mathcal{M}^\star) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1) \Bigg\} P_c\end{aligned}$$

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\big(\Gamma_{21} + i\omega_{21}\big)\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}\big(\Gamma_{21} - i\omega_{21}\big)\mathcal{M}^\star - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\big(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\big(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\big(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\big(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\big(- w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}\big(- w_{21}\mathcal{M}\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}\big(- w_{21}\mathcal{M}^\star\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}\big(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) \Bigg\} P_c
\end{aligned}
$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\left(\Gamma_{21} + i\omega_{21}\right)\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}\left(\Gamma_{21} - i\omega_{21}\right)\mathcal{M}^\star - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\left(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\right) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\left(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\left(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\left(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\left(-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}\left(-w_{21}\mathcal{M}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}\left(-w_{21}\mathcal{M}^\star\right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}\left(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) \Bigg\} P_c
\end{aligned}
$$

- $R_i = Nw_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\left(\Gamma_{21} + i\omega_{21}\right)\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}\left(\Gamma_{21} - i\omega_{21}\right)\mathcal{M}^\star - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\left(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\right) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\left(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\left(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\left(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\left(-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1\right) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}\left(-w_{21}\mathcal{M}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}\left(-w_{21}\mathcal{M}^\star\right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}\left(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right) \Bigg\} P_c
\end{aligned}
$$

- $R_i = N w_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- $\Gamma_1\mathcal{N}_1$, $\Gamma_2\mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\big(\Gamma_{21} + i\omega_{21}\big)\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}\big(\Gamma_{21} - i\omega_{21}\big)\mathcal{M}^\star - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\big(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\big(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\big(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\big(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\big(-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}\big(-w_{21}\mathcal{M}\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}\big(-w_{21}\mathcal{M}^\star\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}\big(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big)\Bigg\} P_c
\end{aligned}
$$

- $R_i = N w_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- $\Gamma_1\mathcal{N}_1$, $\Gamma_2\mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise
- $w_{12}\mathcal{N}_2$ stimulovaná emise z hladiny 2 na hladinu 1

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial t} = \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\big(\Gamma_{21} + i\omega_{21}\big)\mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^\star}\big(\Gamma_{21} - i\omega_{21}\big)\mathcal{M}^\star - \\
& - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\big(R_1 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\big(R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\big(R_1 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 + w_{12}\mathcal{N}_2\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\big(R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\big(-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^\star}\Gamma_1\mathcal{M}^\star + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}\big(-w_{21}\mathcal{M}\big) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^\star}\big(-w_{21}\mathcal{M}^\star\big) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^\star}\big(R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}]\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\big) \Bigg\} P_c
\end{aligned}
$$

- $R_i = Nw_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- $\Gamma_1\mathcal{N}_1$, $\Gamma_2\mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise
- $w_{12}\mathcal{N}_2$ stimulovaná emise z hladiny 2 na hladinu 1
- $w_{21}\mathcal{N}_1$ absorpce pro přechod $1 \rightarrow 2$

Shrnutí

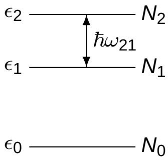
- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)

Shrnutí

- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:

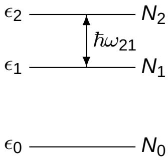
Shrnutí

- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:
  1. Látku tvoří N stejných, vzájemně neinteragujících, *tříhladinových* kvantových soustav; každá má svůj tlumící rezervoár, všechny rezervoáry mají stejnou teplotu



Shrnutí

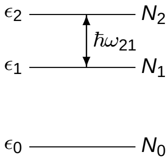
- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:
  1. Látku tvoří N stejných, vzájemně neinteragujících, *tříhladinových* kvantových soustav; každá má svůj tlumící rezervoár, všechny rezervoáry mají stejnou teplotu



  2. Tříhladinové KS = v základní stavu s populací N_0 se nachází většina KS, pracovní přechod je mezi první a druhou excitovanou hladinou s populací N_1 a N_2, přitom $N \sim N_0 \gg N_1,\, N_2 \gg 1$

Shrnutí

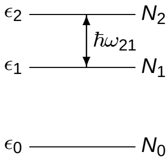
- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:
  1. Látku tvoří N stejných, vzájemně neinteragujících, *tříhladinových* kvantových soustav; každá má svůj tlumící rezervoár, všechny rezervoáry mají stejnou teplotu



  2. Tříhladinové KS = v základní stavu s populací N_0 se nachází většina KS, pracovní přechod je mezi první a druhou excitovanou hladinou s populací N_1 a N_2, přitom $N \sim N_0 \gg N_1,\, N_2 \gg 1$
  3. Na pravé straně F-P rovnice jsme zanedbali derivace vyššího než druhého řádu

Shrnutí

- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnice pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:
  1. Látku tvoří N stejných, vzájemně neinteragujících, *tříhladinových* kvantových soustav; každá má svůj tlumící rezervoár, všechny rezervoáry mají stejnou teplotu



  2. Tříhladinové KS = v základní stavu s populací N_0 se nachází většina KS, pracovní přechod je mezi první a druhou excitovanou hladinou s populací N_1 a N_2, přitom $N \sim N_0 \gg N_1, N_2 \gg 1$
  3. Na pravé straně F-P rovnice jsme zanedbali derivace vyššího než druhého řádu
- Příště: Hamiltonián plně kvantové interakce rezonančního záření s látkou a Fokkerova-Planckova rovnice pro laser

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/