Fyzika laserů

Koherentní šíření impulzů
Další jevy v poloklasické aproximaci

Jan Šulc

Katedra laserové fyziky a fotoniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

1. dubna 2025

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. **Koherentní šíření impulzů**
8. **Další jevy v poloklasické aproximaci**
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$, $|d_{21}|^2$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí $\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a N. Prostředí je pro rezonanční záření disperzní a nelineární

Signál pomalu proměnný impulz s harmonickou nosnou frekvencí $\omega \gg T_{\text{imp}}^{-1}$ v rezonanci ($\omega = \omega_{21}$) a bez fázové modulace → tři rovnice pro obálku

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

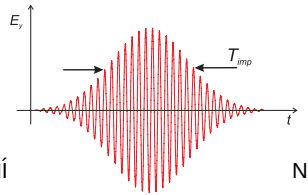
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Rezonanční prostředí je disperzní susceptibilita je funkcí frekvence

Rezonanční prostředí je nelineární v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní)

Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



KOHERENTNÍ

$T_{\text{imp}} \ll T_1,\ T_2$

NEKOHERNTNÍ

$T_{\text{imp}} \gg T_1,\ T_2$

APROXIMACE
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$T_2 \ll T_{\text{imp}} \ll T_1$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Koherentní šíření impulzů (záření v rezonanci)

- Pokud můžeme předpokládat přesnou rezonanci ($\Delta\omega = 0$) a signál bez fázové modulace ($\partial\Phi/\partial t = 0$), potom i $\mathcal{P}_1 = 0$ a šíření rezonančního záření dvouhladinovým prostředím je popsáno soustavou tří rovnic:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Pokud jsou charakteristické časy změn $\mathcal{E}, \mathcal{P}_2, N$ mnohem kratší než obě relaxační doby T_1 a T_2, neuplatňuje se vliv tlumícího systému. Je možné zanedbat relaxační členy s T_1 a T_2.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Koherentní šíření impulzů, Invariant

- Koherentní odezvu prostředí popisují rovnice:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

- Rovnici pro polarizaci vynásobíme výrazem $\mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|^2$:

$$\frac{\mathcal{P}_2}{|\vec{d}_{21}|^2}\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{|\vec{d}_{21}|^2}\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\mathcal{P}_2^2}{|\vec{d}_{21}|^2} = -\frac{1}{\hbar}N\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

- Rovnici pro inverzi vynásobíme N

$$N\frac{\partial N}{\partial t'} = \frac{1}{\hbar}N\mathcal{E}\mathcal{P}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial N^2}{\partial t'} = \frac{1}{\hbar}N\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

- Obě rovnice sečteme, snadno ukážeme, že:

$$\frac{\mathcal{P}_2^2}{|\vec{d}_{21}|^2} + N^2 = \text{konst.} = r^2,$$

je časový invariant.

Koherentní šíření impulzů, Invariant

- Časový invariant:

$$\frac{\mathcal{P}_2^2}{|\vec{d}_{21}|^2} + N^2 = \text{konst.} = r^2,$$

- V rovině $(\mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ vektor $\vec{r} = (\mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ představuje řešení rovnic pro polarizaci a inverzi populace hladin.
- Při šíření impulzu prostředím se zachovává velikost $(\mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ a koncový bod vektoru $\vec{r}$ se pohybuje po kružnici s poloměrem r, který je daný stavem prostředí před příchodem impulzu ($\mathcal{P}_{20}$ a N_0):

$$r^2 = \frac{\mathcal{P}_{20}^2}{|\vec{d}_{21}|^2} + N_0^2,$$

Koherentní šíření impulzů, Plocha impulzu

- Rovnice pro odezvu převedeme do polárních souřadnic. Zavedeme-li novou proměnnou ψ (úhel, který svírá vektor $\vec{r}$ s osou N) transformačními vztahy (DC):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_2}{|\vec{d}_{21}|} &= \frac{\mathcal{P}_{20}}{|\vec{d}_{21}|}\cos\psi - N_0 \sin\psi, \\ N &= \frac{\mathcal{P}_{20}}{|\vec{d}_{21}|}\sin\psi + N_0 \cos\psi, \end{aligned}$$

- Po dosazení do rovnice pro polarizaci nebo inverzi populace hladin zjistíme, že úhel ψ musí vyhovovat rovnici (DC):

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar}\mathcal{E}(t).$$

- Odtud integrací:

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar}\mathcal{E}(t')\,dt',$$

  úhel $\psi(t_0)$ je úhel před příchodem impulzu.
- O úhlu stočení vektoru $(P_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ tedy rozhoduje plocha (integrál průběhu) impulzu.

Plocha impulzu

- Prochází-li prostředím impulz, trvající krátkou dobu, otočí se uvažovaný vektor $\vec{r}$ o úhel:

$$\theta = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t)\, dt.$$

- Úhel θ bývá označován jako plocha impulzu.

- Impulzy různého tvaru mohou mít stejnou „plochu“.

Plocha impulzu $\theta = \pi$

$$\theta = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t)\, dt.$$

- Je-li plocha impulzu $\theta = \pi$, dochází k maximální změně stavu rezonančního prostředí.

Plocha impulzu $\theta = 2\pi$

$$\theta = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t)\, dt.$$

- Je-li plocha impulzu $\theta = 2\pi$, nezpůsobí průchod prostředím žádnou změnu inverze ani polarizace prostředí.

- Impulz projde a zanechá zesilující nebo zeslabující prostředí beze změny. Neznamená to však obecně, že se nezmění tvar impulzu.

Koherentní šíření impulzů

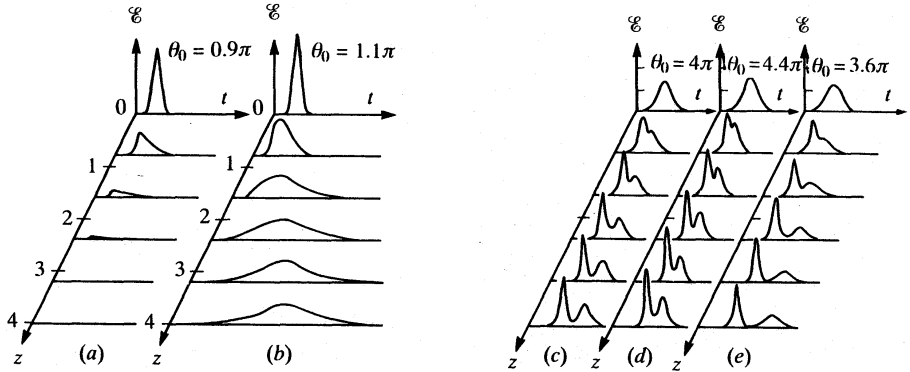


Fig. 16.7 Computer solutions showing the propagation of pulses of various areas. Distance z is measured in units of π/α. In the first example (a) the pulse is absorbed, and in example (b) it is reshaped to a hyperbolic secant form. In (c), (d) and (e) the pulse breaks up into two separate 2π hyperbolic secant pulses. (Reproduced from McCall and Hahn, 1969.)

Rabiova frekvence Ω

$$\Omega = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar}\mathcal{E}(t).$$

- Okamžitá úhlová frekvence otáčení $\Omega = \partial\psi/\partial t$ vektoru $(\mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ je dána amplitudou intenzity elektrického pole a závisí na velikosti maticového elementu dipólového momentu příslušného kvantového přechodu. Tato frekvence bývá označována jako Rabiova frekvence.

Plocha impulzu $\theta = 0$

$$\theta = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t)\, dt.$$

Koherentní šíření impulzů, Samoindukovaná propustnost

- Samoindukovaná propustnost je koherentní jev, při kterém dochází k interakci impulzu rezonančního záření s kvantovými soustavami, přičemž stav kvantových soustav i tvar impulzu jsou před a po průchodu impulzu stejné.
- Uvažujme o absorbujícím dvouhladinovém prostředí s počátečním rozdílem populací hladin $N_0 < 0$ a předpokládejme, že prostředí je ve stacionárním stavu s polarizací $P_{20} = 0$.
- Dosazením za $\mathcal{E}$ z rovnice

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar}\mathcal{E}$$

do vlnové rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

a dostáváme parciální diferenciální rovnici ($\mathcal{P}_{20} \equiv 0$, tj. $\mathcal{P}_2 = -|\vec{d}_{21}|N_0 \sin(\psi)$):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z' \partial t} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c |\vec{d}_{21}|^2 N_0}{2\hbar} \sin(\psi).$$

- Zvláštními řešeními této tzv. sine-Gordonovy rovnice jsou solitony, tj. amplitudové obálky, které se v procesu šíření nemění.

Koherentní šíření impulzů, Soliton

- Soliton – řešením sine-Gordonovy rovnice (DC 3.5):[1]

$$\mathcal{E}(z,t) = \frac{2\hbar\alpha}{|\vec{d}_{21}|}\,\mathrm{sech}\left[\alpha\left(t - \frac{z}{v}\right)\right],$$

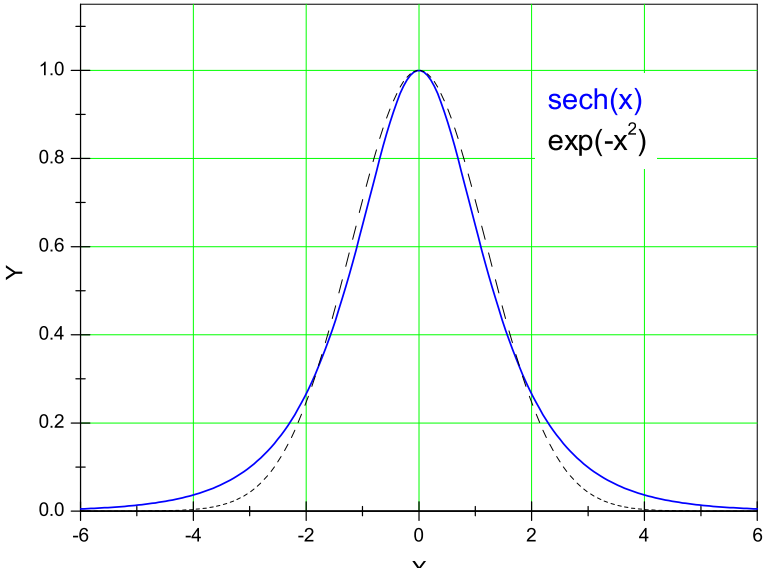
kde:

$$\alpha^2 = -\frac{\mu_0\omega_{21}c|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{2\hbar}\frac{cv}{c-v}.$$

- Protože $\psi(\infty) - \psi(-\infty) = 2\pi$, je impulz solitonovým řešením. Prochází beze změny tvaru prostředím a stav prostředí neovlivňuje.
- Tento jev se nazývá samoindukovanou propustností.
- Uvedené řešení je takzvaný základní soliton nebo soliton 1. řádu a není jediným možným solitonem.
- Všechny $2n\pi$ impulzy (kde n je celé číslo) neovlivňují stav prostředí a vykazují samoindukovanou propustnost.
- Solitony vyšších řádů nemají tak jednoduchou závislost amplitudové obálky na souřadnicích, dokonce se ani jejich obálka nemusí zachovávat během šíření, ale může se vždy po určitých vzdálenostech rekonstruovat.
- Aby tento soliton vznikl, musí být záření v rezonanci s prostředím.

[1] $\mathrm{sech}(x) = 2/(\exp(x) + \exp(-x))$

sech(x)



Koherentní šíření prostředím s nehomogenním rozšířením spektrální čáry

Vzhledem k rozladění frekvencí jednotlivých podsouborů není možné signálovou frekvenci přesně naladit pro všechny podsoubory. I pro popis šíření záření bez fázové modulace je proto nezbytné zahrnout také popis chování reaktivních složky polarizace $\mathcal{P}_1$ a řešit pro všechny podsoubory definovanými rozladěním $\Delta\omega$ systém rovnic:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}(z,t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c_0}{2}\mathcal{P}_2(z,t,\Delta\omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_1(z,t,\Delta\omega) = -\Delta\omega \mathcal{P}_2(z,t,\Delta\omega), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_2(z,t,\Delta\omega) = \Delta\omega \mathcal{P}_1(z,t,\Delta\omega) - \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}(z,t)N(z,t,\Delta\omega), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}N(z,t,\Delta\omega) = \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}(z,t)\mathcal{P}_2(z,t,\Delta\omega). \tag{4}$$

Rovnici (2) násobíme $\mathcal{P}_1$, rovnici (3) násobíme $\mathcal{P}_2$, rovnici (4) násobíme N a sečteme.

Koherentní šíření prostředím s nehomogenním rozšířením spektrální čáry

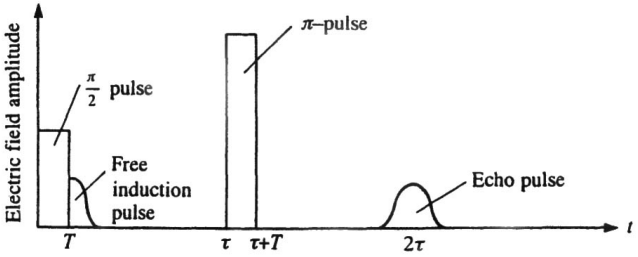
- Z rovnic (2) až (4), je možné určit invariant ve tvaru součtu (DC 3.7):

$$\left(\frac{\mathcal{P}_1(z,t,\Delta\omega)}{|\vec{d}_{21}|}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{P}_2(z,t,\Delta\omega)}{|\vec{d}_{21}|}\right)^2 + N(z,t,\Delta\omega)^2 = R^2.$$

- Ve třírozměrné reprezentaci je řešení možné hledat jako vektor $\vec{R} = (\mathcal{P}_1/|\vec{d}_{21}|, \mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|, N)$ pohybující se po povrchu koule.
- Řešení bude jen funkcí úhlu ψ, který svírá vektor $\vec{R}$ s osou z, a úhlu δ, který svírá vektor $(\mathcal{P}_1/|\vec{d}_{21}|, \mathcal{P}_2/|\vec{d}_{21}|)$ v rovině $z = 0$ s osou x.
- Pohyb tohoto vektoru má dvě složky: rotaci kolem osy z úhlovou frekvencí $\Delta\omega$ a otáčení kolem osy kolmé k z a k okamžitému směru průmětu $\vec{R}$ do roviny x, y.

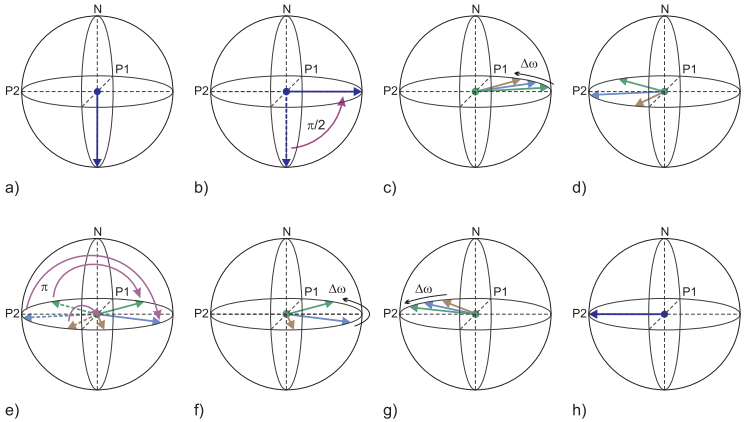
Fotonové echo

- Fotonové echo je impulz optického záření, který vysílá rezonanční prostředí s nehomogenně rozšířenou spektrální čarou jako zpožděnou odezvu na dva za sebou jdoucí velmi krátké impulzy optického záření.
- Podmínkou pro vznik fotonového echa je, aby zpoždění druhého impulzu vzhledem k prvnímu bylo velmi malé ve srovnání s relaxačními časy T_1 i T_2.
- Jev je nejvýraznější, když je plocha prvního impulzu rovna $\pi/2$ (impulz vybudí maximální dipólový moment u všech kvantových soustav – atomů) a současně plocha druhého impulzu je rovna π.



- V reálných experimentech bývá makroskopická polarizace v době fotonového echa menší díky relaxačním procesům, které při konečných hodnotách T_2 vždy probíhají.

Fotonové echo



Vznik fotonového echa. a) počáteční stav. b) stav po průchodu $\pi/2$-impulzu. c), d) po $\pi/2$-impulzu se složky polarizace s různým rozladěním otáčejí úhlovou rychlostí $\Delta\omega$, dochází ke stále většímu rozfázování. e) π-impulz způsobí otočení všech složek polarizace kolem osy $\mathcal{P}_1$ o π. f) Výsledný účinek π-impulzu. f), g), h) po π-impulzu složky dále rotují stejnou úhlovou rychlostí a stejným směrem. Složky s větším $\Delta\omega$ rotující rychleji jsou po průchodu impulzu více zpožděné a dobíhají složky pomalejší s menším $\Delta\omega$.

Fotonové echo

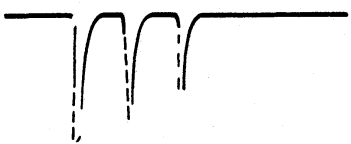


Fig. 16.4 Results of an echo experiment displayed on an oscilloscope. The first two pulses, which are separated by 137 ns, are the excitation pulses, and the third pulse is the echo. The first two photoelectric pulses have been attenuated to make all three of them comparable in size. (Reproduced from Abella, Kurnit and Hartmann, 1966.)

Optická nutace

- Optická nutace je modulace intenzity optického záření, k níž dochází při průchodu impulzu rezonančního optického záření, jestliže má impulz strmou náběžnou hranu
- Modulační frekvence roste s rostoucí amplitudou intenzity elektrického pole elektromagnetické vlny
- Předpokládáme, že do prostoru zaplněného souborem stejných kvantových soustav vstupuje velmi strmý optický impulz. Aproximujeme jej skokovou funkcí:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z,t) &= \mathcal{E}_0 \text{ pro } t \geq 0 \\ &= 0 \text{ pro } t < 0 \end{aligned}$$

- Signál bez fázové modulace. Odezva prostředí v čase $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} &= -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}_0 N \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_0 \mathcal{P}_2 \end{aligned}$$

- Derivujeme první rovnici, dosadíme druhou, dostáváme:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_2}{\partial t^2} = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}\mathcal{E}_0^2 \mathcal{P}_2.$$

Optická nutace

- Máme:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}_2}{\partial t^2} = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}\mathcal{E}_0^2 \mathcal{P}_2.$$

- Uvážíme-li, že v čase $t = 0$ je $N = N_0$ a $\mathcal{P}_2 = 0$, má řešení tvar:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= N_0 |\vec{d}_{21}| \sin(\Omega_0 t) \\ N &= N_0 \cos(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

  kde $\Omega_0 = \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar}\mathcal{E}_0$ je Rabiova frekvence

- Polarizace prostředí, resp. složka $\mathcal{P}_2$ má frekvenční modulaci danou Rabiovou frekvencí
- Výstupní signál bude v tomto rytmu promodulován.

Optická nutace

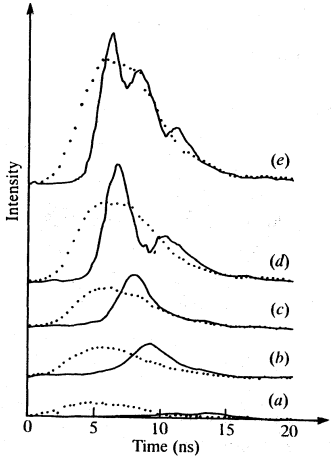
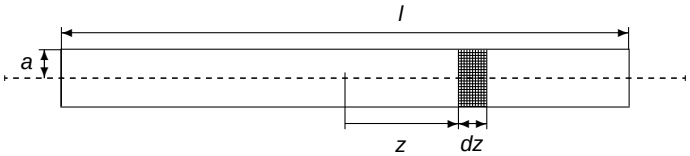


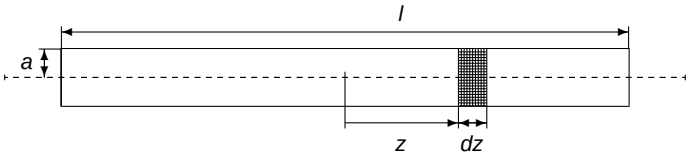
Fig. 16.8 Results of pulse propagation measurements in rubidium vapor, showing pulse breakup. Input pulses are shown by dotted lines and output pulses by solid lines. The input pulse areas increase progressively from (*a*) to (*e*). (Reproduced from Slusher and Gibbs, 1972.)

Zesilování spontánní emise v dlouhém sloupci



- Aktivní prostředí laseru má tvar válcové tyče o poloměru a a délce l a platí $l \gg a$. Pro reálný systém obvykle $a/l \approx 10^{-2}$
- Osa z je umístěna v ose tyče, $z = 0$ ve středu tyče
- Tyč je rovnoměrně vyplněna kvantovými soustavami s laserovým přechodem mezi energetickými hladinami E_2 a E_1 s rezonanční kruhovou frekvencí ω_{21}
- Je zajištěna rychlá depopulace dolní laserové hladiny, takže její populace $N_1 \doteq 0$ Populace horní energetické hladiny N_2 je pak rovna inverzi populace hladin N

Zesilování spontánní emise v dlouhém sloupci



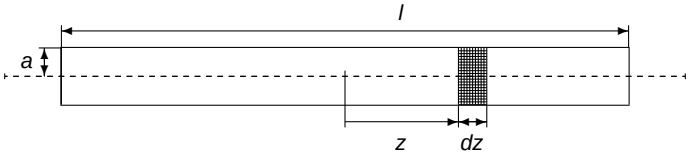
- Je-li T_1 doba života na horní hladině a jediný mechanismus depopulace této hladiny je spontánní emise, potom spontánní emise z elementu objemu $\Delta V = \pi a^2 \Delta z$ odnáší výkon (energii za jednotku času):

$$\Delta Q = \frac{N \hbar \omega_{21}}{T_1} \Delta V$$

- Výkon je vyzařovaný z každého elementárního objemu do plného úhlu 4π
- Výkon je vyzařovaný ve směru osy z do prostorového úhlu $\pi a^2 / l^2$ bude zesilován
- Příspěvek k celkové plošné hustotě výkonu na výstupu:

$$\Delta I = \underbrace{\frac{1}{\pi a^2} \frac{\pi a^2}{l^2} \frac{1}{4\pi} \Delta Q}_{\substack{\text{Intenzita záření vyzářená} \\ \text{z elementu } dz \text{ ve směru } z}} \times \underbrace{e^{g\left(\frac{l}{2} - z\right)}}_{\text{zesílení}}$$

Zesilování spontánní emise v dlouhém sloupci



- Výsledná intenzita zesílené spontánní emise na výstupní apertuře bude dána integrací podél celého aktivního prostředí:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Delta I \; = \frac{N\hbar\omega_{21}}{T_1}\frac{a^2}{4l^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-gl}}{g}\,\mathrm{e}^{gl} \approx I_s\frac{a^2}{4l^2}\,\mathrm{e}^{gl},$$

  kde $g = \sigma N$ a $I_s = \hbar\omega_{21}/\sigma T_1$ (zanedbali jsme e^{-gl} vzhledem k 1).
- V případě, že je splněna nerovnost (tzv. „měkký práh“):

$$\frac{a^2}{4l^2}\mathrm{e}^{gl} \gg 1,$$

  dochází na výstupu k významnému převážení stimulované emise nad spontánní
- Podstatná část energie uložené ve vnitřních stavech kvantových soustav se vyvazuje prostřednictvím stimulované emise
- Platí pokud je součinitel zisku je všude stejný, $g(z) =$ konst., přesnější výsledek poskytnou prostorově závislé rychlostní rovnice.

Prostorově závislé řešení

- Prostorově závislé rychlostní rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{N\sigma}{\hbar\omega_{21}}\left(I^{+}+I^{-}\right)-\frac{N}{T_1}+w, \\
\frac{\partial I^{+}}{\partial z} &= N\sigma I^{+}+\frac{\hbar\omega_{21}N}{T_1}\frac{a^2}{4l^2}, \\
\frac{\partial I^{-}}{\partial z} &= -N\sigma I^{-}-\frac{\hbar\omega_{21}N}{T_1}\frac{a^2}{4l^2},
\end{aligned}$$

- $I^{+}=I^{+}(z,t)$, resp. $I^{-}=I^{-}(z,t)$ jsou intenzity záření postupujícího ve směru, resp. proti směru osy z
- $w=w(t)$ je buzení, o němž předpokládáme, že je prostorově homogenní
- Zesílená spontánní emise vystupuje z obou konců tyče symetricky, proto $I^{+}(z,t)=I^{-}(-z,t)$, speciálně $I^{+}(0,t)=I^{-}(0,t)$
- V případě kontinuálního buzení je možné nalézt prostorově závislé stacionární řešení

Prostorově závislé řešení

- Z rovnice pro inverzi

$$0 \equiv \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N}{T_1}\frac{\left(I^+ + I^-\right)}{I_s} - \frac{N}{T_1} + w$$

dostaneme:

$$N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{I^+(z)+I^-(z)}{I_s}},$$

kde $N_0 = wT_1$ je hodnota inverze v nepřítomnosti zesilovaného záření

- Zavedeme bezrozměrné intenzity substitucí $J^+(z) = I^+(z)/I_s$, $J^-(z) = I^-(z)/I_s$ a označíme $D = a^2/(4l^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ^+}{dz} &= \frac{g_0(J^+ + D)}{1 + J^+ + J^-} \\ \frac{dJ^-}{dz} &= -\frac{g_0(J^- + D)}{1 + J^+ + J^-} \end{aligned}$$

kde $g_0 = \sigma N_0$ je součinitel zesílení slabého signálu.

- Platí:

$$\frac{dJ^+}{dz} = -\frac{J^+ + D}{J^- + D}\frac{dJ^-}{dz} \quad \Rightarrow \text{(DC)}$$

$$(J^+ + D)(J^- + D) = \text{konst.} \equiv b^2 \quad \text{invariant soustavy}$$

Prostorově závislé řešení

- Budeme hledat J^+, J^- ve tvaru:

$$\begin{aligned} J^+(z) &= b\,\mathrm{e}^{u(z)} - D \\ J^-(z) &= b\,\mathrm{e}^{-u(z)} - D \end{aligned}$$

- Dosadíme do

$$\begin{aligned} \frac{dJ^+}{dz} &= \frac{g_0(J^+ + D)}{1 + J^+ + J^-} \\ \frac{dJ^-}{dz} &= -\frac{g_0(J^- + D)}{1 + J^+ + J^-} \end{aligned}$$

a integrujeme

- Dostaneme:[2]

$$(1 - 2D)u(z) + 2b \sinh u(z) = g_0 z$$

- Využitím okrajových podmínek $J^+(-l/2) = J^-(l/2) = 0$, dostaneme transcendentní rovnici pro b (DC 4.7):

$$(1 - 2D) \ln\left(\frac{b}{D}\right)^2 + 2D\left[\left(\frac{b}{D}\right)^2 - 1\right] = g_0 l$$

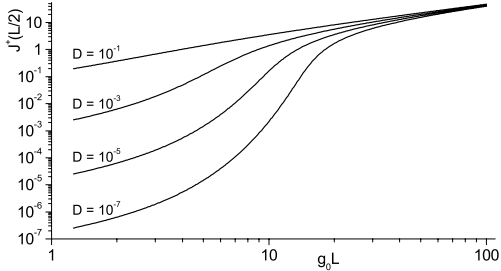
[2] $\sinh x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$

Prostorově závislé řešení

- Vyjádříme b^2 pomocí invariantu soustavy a okrajových podmínek
- Dostaneme transcendentní rovnici, udávající výstupní intenzitu např. ve směru osy z, v závislosti na rychlosti buzení a délce aktivního prostředí (DC 4.8):

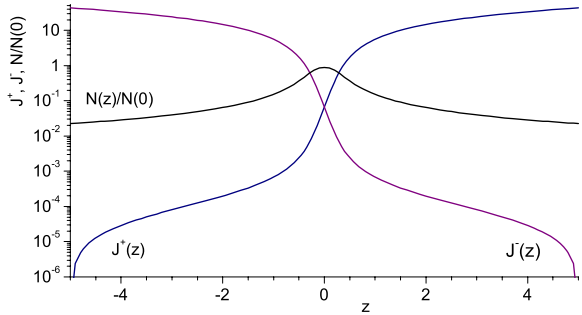
$$(1-2D)\ln\left[\frac{J^+\left(\frac{l}{2}\right)}{D}+1\right]+2J^+\left(\frac{l}{2}\right)=g_0 l=\sigma w T_1 l.$$

- Rychlost buzení, při které se při dané délce významně zvyšuje strmost této závislosti, bývá nazývána „měkký práh“ – stimulovaná emise vyvazuje z aktivního prostředí podstatnou část energie, vkládané do vnitřních stavů kvantových soustav



Závislost normované výstupní intenzity záření J^+ na součinu $g_0 l=\sigma T_1 w l$

Prostorově závislé řešení



Závislost normované intenzity záření J^+, J^- a normované inverze $N/N(0)$ na prostorové souřadnici z. Parametr $D = 10^{-4}$, délka $l = 10\,cm$, $g_0 = 10\,cm^{-1}$

- Divergence výstupního svazku je dána geometrií aktivního prostředí
- Je tím menší, čím je menší apertura a čím je delší aktivní prostředí

Laser bez rezonátoru

- Ke generaci záření na principu stimulované emise může docházet i v případě, kdy není použit laserový rezonátor
- Laserová generace je v takovém případě založena na zesilování spontánní emise v prostředí, které má tvar dlouhého sloupce, jehož zisk je dostatečně velký k tomu, aby se spontánní záření vysílané ve směru osy sloupce zesílilo při jednom průchodu natolik, že dochází k saturaci zesílení
- Stupeň koherence i rozbíhavost svazku jsou dány geometrickými vlastnostmi prostoru, které aktivní prostředí zaplňuje
- Záleží-li na vysokém stupni koherence a nízké rozbíhavosti, musí být poměr příčného rozměru sloupce a délky sloupce co nejmenší.
- Lasery bez zrcadel se realizují zejména tehdy,
  - když je doba života na horní energetické hladině krátká (když je doba oběhu záření v rezonátoru srovnatelná s dobou života excitovaného stavu),
  - když nelze realizovat optický rezonátor.
- Běžně se setkáváme s dusíkovým laserem (337 nm) a excimerovými lasery, které pracují v ultrafialové oblasti a jsou buzeny pulzním elektrickým výbojem nebo svazky rychlých elektronů

Laser bez rezonátoru

- Přírodním úkazem je „vesmírný“ nebo „interstelární“ laser, kde nerovnovážné mezihvězdné plazma slouží jako aktivní prostředí. Vysvětlují se tím pozorované intenzivní vodíkové čáry, přicházející z některých směrů mezihvězdného prostoru
- Předmětem intenzivního teoretického i experimentálního zkoumání jsou rentgenové lasery. Řešení zrcadel pro tuto oblast není jednoduchým problémem. Všechny dosavadní realizace rentgenových laserů byly založeny na principu zesílené spontánní emise.
- Laserová generace bez zrcadel však může mít i negativní následky. Zesilování spontánní emise v jiném, než osovém směru může představovat ztráty na energii uložené v aktivním prostředí a to zejména ve velkoobjemových laserových zesilovačích nebo v laserech pracujících v režimu Q-spínání, kde je cíleně dosahováno vysokého zisku.

Shrnutí

- Koherentní šíření impulzů rezonančním prostředím
  - Invariant šíření
$$\frac{\mathcal{P}_2^2}{|\vec{d}_{21}|^2} + N^2 = \text{konst.} = r^2,$$
  - Plocha impulzu a Rabiova frekvence
$$\theta = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t)\, dt.$$
$$\Omega = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{|\vec{d}_{21}|}{\hbar} \mathcal{E}(t).$$
  - Samoindukovaná propustnost s sine-Gordonova rovnice
  - Fotonové echo a optická nutace
- Superradiace a superluminiscence
- Zesílená spontánní emise (ZSE, ASE)
- Lasery na bázi ZSE a měkký práh
$$\frac{a^2}{4l^2} e^{gl} \gg 1,$$
- Příště: Přitahováni frekvencí. Spektrum laserového záření. Modelocking

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- LEONARD MANDEL, EMIL WOLF : *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, New York, 1995
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
  http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/
- LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/