# Fyzika laserů
# Kvantové generátory optického záření 2
## Přitahováni frekvencí. Spektrum laserového záření. Modelocking

Jan Šulc

Katedra laserové fyziky a fotoniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

15. dubna 2025

# Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. **Spektrum laseru a režim synchronizace módů**
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

# Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

**Záření** elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

**Prostředí** soubor dvouhladinových kvantových soustav $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$, $|d_{21}|^2$

**Interakce záření s hmotou** prostřednictvím polarizace prostředí $\hat{W} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$

**Odezva prostředí** 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a $N$. Prostředí je pro rezonanční záření disperzní a nelineární

**Signál** pomalu proměnný impulz s harmonickou nosnou frekvencí $\omega \gg T_{\text{imp}}^{-1}$ v rezonanci ($\omega = \omega_{21}$) a bez fázové modulace → tři rovnice pro obálku

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

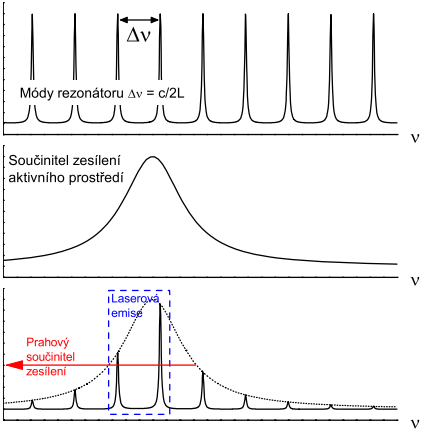
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

**Rezonanční prostředí je disperzní** susceptibilita je funkcí frekvence

**Rezonanční prostředí je nelineární** v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní)

# Spektrum laserového záření

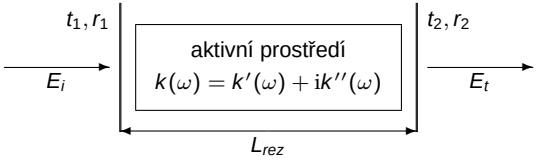
- Je dáno průnikem módů rezonátoru s emisní křivkou aktivního prostředí




- Diskrétní spektrum – módy
- Rozšíření čáry
- Synchronizace módů – „zázněje“

# Přitahováni frekvencí

- Laser = rezonátor + aktivní prostředí




- Aktivní laserové prostředí je popsané vlnovým vektorem:

$$k(\omega) = k'(\omega) + \mathrm{i}k''(\omega) \doteq \frac{\omega}{c}\left[1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega)\right] + \mathrm{i}\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\chi''(\omega)$$

- Amplitudová podmínka generace $\Leftrightarrow$ zisk = ztráty:

$$k''(\omega) = \frac{1}{2L_{rez}} \ln\frac{1}{r_1 r_2} \quad \text{respektive:} \quad \chi''(\omega) = \frac{c}{\omega L_{rez}} \ln\frac{1}{r_1 r_2}$$

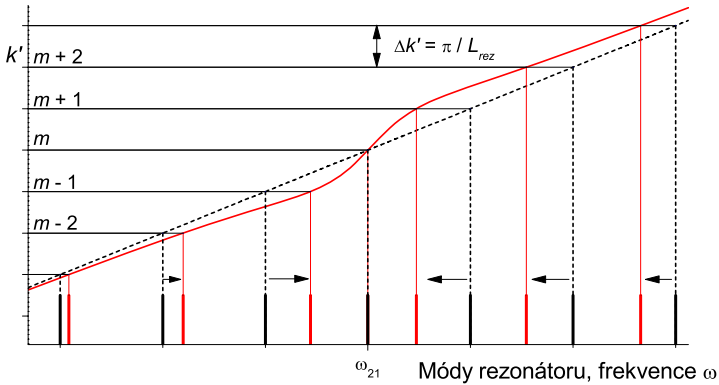
- Fázová podmínka $\Leftrightarrow$ na jeden oběh rezonátoru připadá celočíselný počet vln:

$$2L_{rez}k'(\omega) = m\,2\pi, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \Leftrightarrow \omega_m = \frac{mc\pi}{L_{rez}}\left[1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega)\right]^{-1}$$

# Přitahováni frekvencí

- Mezimódová vzdálenost se po vložení (vybuzení) aktivního prostředí ($N_0 > 0$) do rezonátoru zmenší

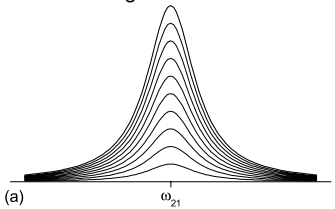
$$\omega_m = \frac{mc\pi}{L_{rez}} \left[1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega)\right]^{-1} \doteq \frac{mc\pi}{L_{rez}} \left[1 - \frac{1}{2}\chi'(\omega)\right]$$




- Módy jsou „přitahovány“ k maximu zisku aktivního prostředí $\omega_{21}$

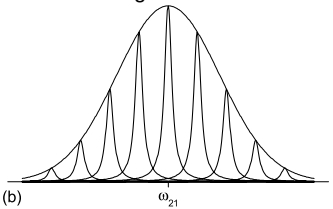
# Tvar spektrální čáry

Homogenní rozšíření



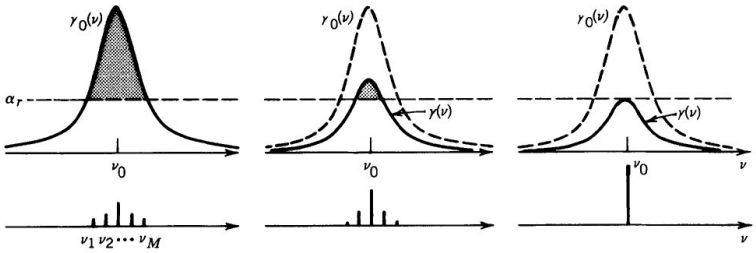

Jednotlivé kvantové soustavy mají stejnou rezonanční frekvenci $\omega_{21}$. Výsledný spektrální profil se shoduje se spektrem jedné KS.

Nehomogenní rozšíření



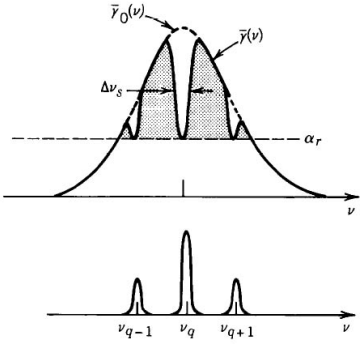

Jednotlivé kvantové soustavy mají různé rezonanční frekvence. Výsledný spektrální profil je superpozicí příspěvku od všech KS.

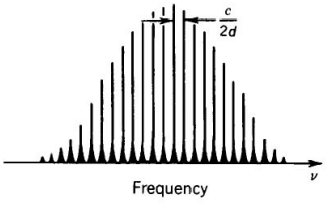
# Oscilace v prostředí s ideálním homogenním rozšířením




1. Bezprostředně po zahájení činnosti laseru začínají růst všechny módy s frekvencemi $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_N$, pro něž koeficient zesílení převyšuje koeficient ztrát. Přitom nejrychleji rostou centrální módy
2. Během krátké doby dojde k saturaci zesílení, takže centrální módy nadále rostou, zatímco okrajové, pro něž jsou ztráty větší než zisk, jsou tlumené a případně zanikají
3. Nedochází-li k vypalování prostorových děr, zůstane pouze jediný mód

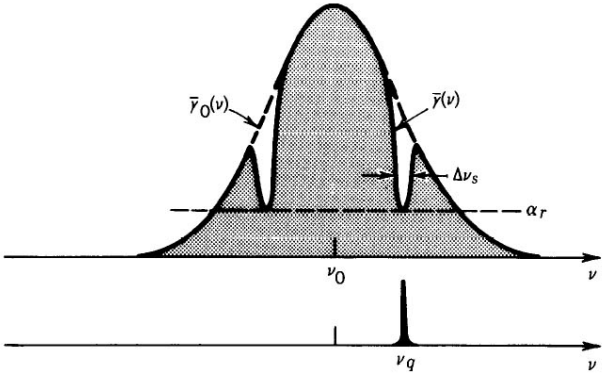
# Nehomogenní rozšíření spektrální čáry



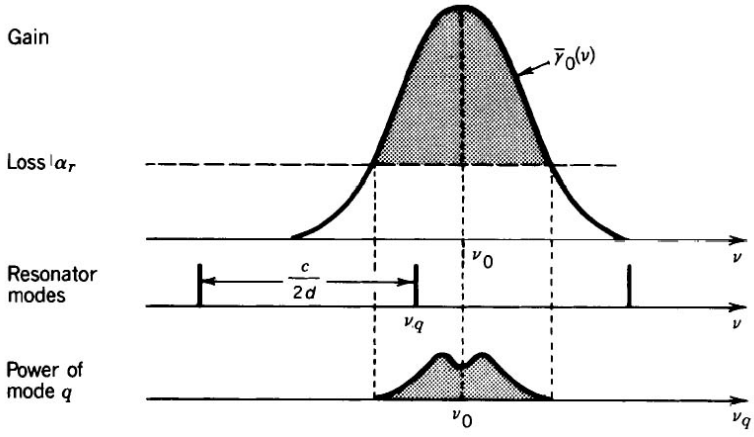

1. Laserové oscilace nastávají v prostředí s nehomogenním rozšířením přechodu v každém módu, který nezávisle vypaluje zářez v celkovém spektrálním profilu zesílení
2. Zesílení jednoho módu prostředím neovlivňuje zesílení ostatních módů
3. Centrální módy využívají příspěvků většího počtu atomů a proto obsahují více fotonů než módy okrajové

# Vypálení zářezů v prostředí s Dopplerovým rozšířením




Vlnění frekvence $\nu_q$ saturuje obsazení atomů s rychlostmi $v = \pm c(\nu_q/\nu_0 - 1)$ na obou stranách od centrální frekvence a vede k vypálení dvou zářezů v profilu zesílení.

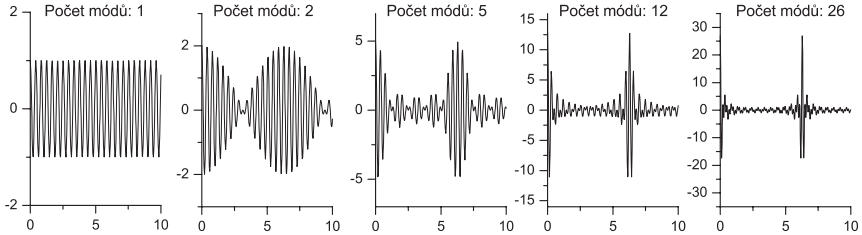
# Lambův zářez




Výkon jednomódového laseru o frekvenci $\nu_q$ s dopplerovsky rozšířeným prostředím, jehož koeficient zesílení je rozložený okolo centrální frekvence $\nu_0$. Při frekvenci $\nu_0 = \nu_q$ vykazuje místo maximálního výkonu Lambův zářez.

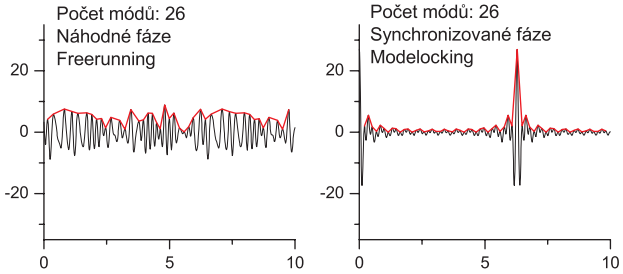
# Synchronizace módů – Modelocking

- Generace krátkých optických impulsů – Q-spínání – limitem délky impulsu je doba života fotonu v rezonátoru, což pro $R = 90\,\%$ a $L_{rez} = 1\,\mathrm{mm}$ („mikročipový“ laser) dává teoreticky nejkratší impulsy cca 60 ps – **chceme kratší impulsy!**
- Generace ultrakrátkých impulsů – modelocking
- Princip spočívá v superpozici – konstruktivní interferenci – fázově synchronizovaných podélných módů rezonátoru vzájemně frekvenčně ekvidistantně posunutých o $c/2L_{rez} \Rightarrow$ „rázy, zázněje“.



# Synchronizace módů – Modelocking

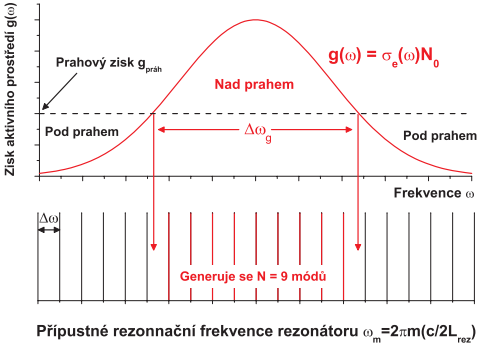
- Vzájemné sfázování jednotlivých módů je podstatné
- Při náhodném fázovém posuvu mezi módy je důsledkem superpozice chaotická obálka jejíž maximální výkon odpovídá v nejlepším případě prostému součtu středních výkonů jednotlivých módů – freerunning




- V závislosti na šířce pásma zesílení aktivního prostředí může počet podélných módů v rezonátoru dosahovat az mnoha desítek tisíc!
- *Jak je synchronizovat?*
- *Jaká bude délka impulzu?*

# Synchronizace módů – Modelocking

- Uvažuje rezonátor délky $L_{rez}$ se zrcadly s reflexivitou $R_1$, $R_2$, ve kterém je vloženo aktivní prostředí se maximem zisku na frekvenci $\omega_0$ a účinným průřezem pro stimulovanou emisi $\sigma_e(\omega)$
- Jaké módy se budou generovat?




$$g_{\text{práh}} = \frac{1}{2L_{rez}} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$$

Přípustné rezonanční frekvence pro:

$$g(\omega) \geq g_{\text{práh}} \Rightarrow \Delta\omega_g$$

Vzdálenost rezonančních frekvencí:

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{c}{2L_{rez}} = \frac{2\pi}{\tau_r}$$

Počet módů:

$$N = \frac{\text{šířka zisku nad prahem}}{\text{vzdálenost módů}} = \frac{\Delta\omega_g}{\Delta\omega}$$

# Synchronizace módů – Modelocking

- Pole $n$-tého módu:

$$E_n(z,t) = E_{n_0} \exp i[\omega_n t - k(\omega_n) z + \phi]$$

- Předpokládáme:
  1. Všechny módy mají stejnou amplitudu $E_{n_0}$
  2. Zanedbáváme přitahování frekvencí $k(\omega_n) \approx k$
  3. Nad prahem jsou módy $\omega_n$, kde $n \in (n_0 - N/2, n_0 + N/2)$
  4. Frekvence přechodu v centru $\omega_0 = \omega_{n_0}$
- Frekvence módů:

$$\omega_{n_0} = \omega_0$$
$$\omega_{n_0+1} = \omega_0 + \Delta\omega$$
$$\omega_{n_0-1} = \omega_0 - \Delta\omega$$
$$\dots$$

- Celkové pole:

$$E(z,t) = \sum_n E_n(z,t)$$

# Synchronizace módů – Modelocking

- Celkové pole:

$$E(z,t) = \sum_n E_n(z,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \sum_{q=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} A_k(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\Delta\omega\, t}$$

- Pár vzorečků:

$$\sum_{k=1}^{n} a g^{k-1} = \frac{a(g^n - 1)}{g - 1}$$

$$\sum_{q=-s}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\Delta\omega\, t} = \sum_{q=1}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-1)\Delta\omega\, t} + \sum_{q=1}^{s} e^{-i(q-1)\Delta\omega\, t} - 1$$

- Trocha matematických úprav (DC 6.1), a dostaneme:

$$E(z,t) \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\ \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\omega\, t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\omega\, t}{2}\right)}$$

# Synchronizace módů – Modelocking

- Výstupní intenzita:

$$I \sim |E|^2 \approx \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\omega\, t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\omega\, t}{2}\right)}$$

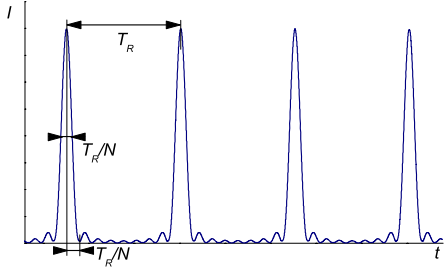
- Výkon je vyzařován z rezonátoru s periodou:

$$T_R = \frac{2L_{rez}}{c}$$

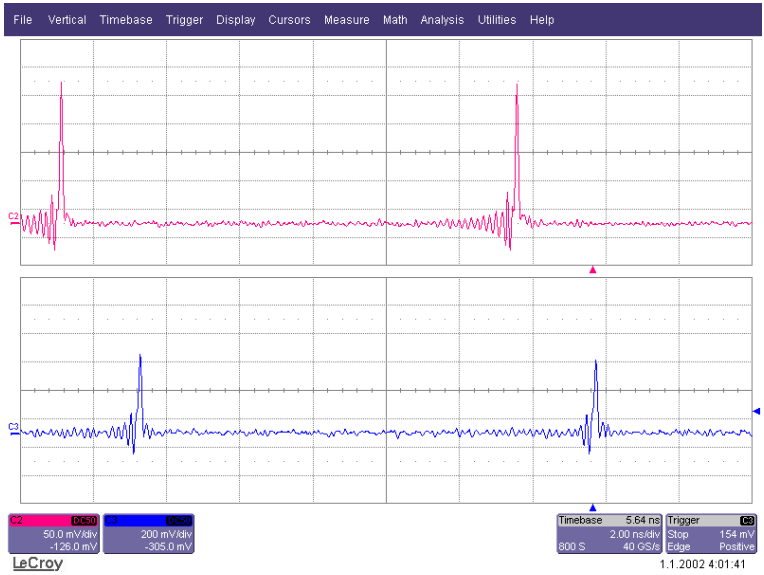
- Špičkový výkon je $N$-krát větší než střední výkon.
- Doba trvání jednoho impulsu:

$$T = \frac{T_R}{N}$$

- Prostorová délka jednoho impulsu je $N$-krát menší, než dvojnásobek délky rezonátoru.



# Modelocking



# Modelocking – Pásmově limitovaný impuls

- Šířka impulsů omezena jen šířkou pásma zesílení aktivního prostředí a disperzními vlastnostmi rezonátoru.
- Šířka pásma zesílení:

$$\chi''(\omega) = \frac{\frac{|d_{21}|^2 N_0}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{T_2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Maximální počet módů pro daný rezonátor:

$$N_{max} = \frac{\frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_R}} = \frac{T_R}{T_2} \Rightarrow$$

$$T_{min} = T_2$$

- *Pásmově limitovaným impulzem* nazýváme impulz, v němž počet módů odpovídá pološířce čáry zesílení

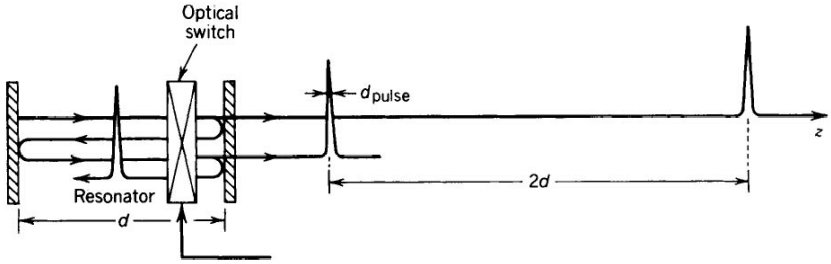
# Aktivní materiály vhodné pro modelocking

**TABLE 14.3-2 Typical Observed Pulse Widths for a Number of Homogeneously (H) and Inhomogeneously (I) Broadened, Mode-Locked Lasers**

| Laser Medium | | Transition Linewidth[a] $\Delta\nu$ | Calculated Pulse Width $\tau_{pulse} = 1/\Delta\nu$ | Observed Pulse Width |
|---|---|---|---|---|
| $Ti^{3+}:Al_2O_3$ | H | 100 THz | 10 fs | 30 fs |
| Rhodamine-6G dye | H/I | 5 THz | 200 fs | 500 fs |
| $Nd^{3+}$:glass | I | 3 THz | 333 fs | 500 fs |
| $Er^{3+}$:silica fiber | H/I | 4 THz | 250 fs | 7 ps |
| Ruby | H | 60 GHz | 16 ps | 10 ps |
| $Nd^{3+}$:YAG | H | 120 GHz | 8 ps | 50 ps |
| $Ar^+$ | I | 3.5 GHz | 286 ps | 150 ps |
| He–Ne | I | 1.5 GHz | 667 ps | 600 ps |
| $CO_2$ | I | 60 MHz | 16 ns | 20 ns |

# Metody synchronizace impulsů

- Aktivní (akustooptická a elektrooptická závěrka)




- Pasivní (saturovatelný absorbér, nelineární zrcadlo, kerr-lens)
- Synchronizace střetem impulsů
- Kompenzace disperzeního rozšíření impulsu

# Synchronizace módů s využitím Kerrovské čočky

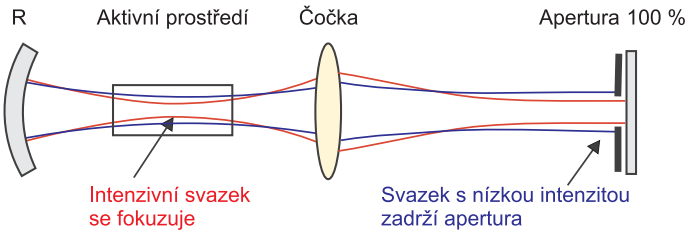
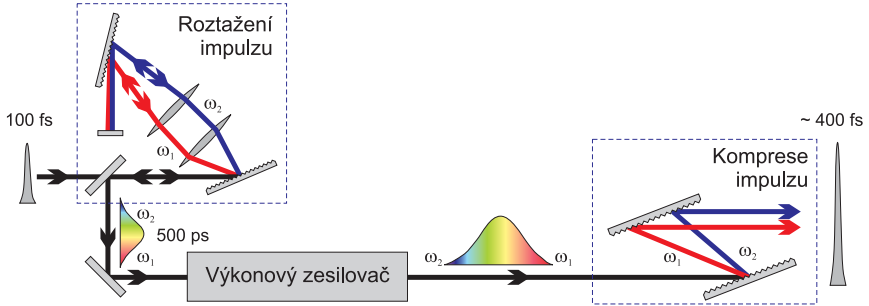



Schéma laseru využívajícího pro synchronizaci impulzů Kerrův jev v aktivním prostředí laseru

# Zesilování impulzu

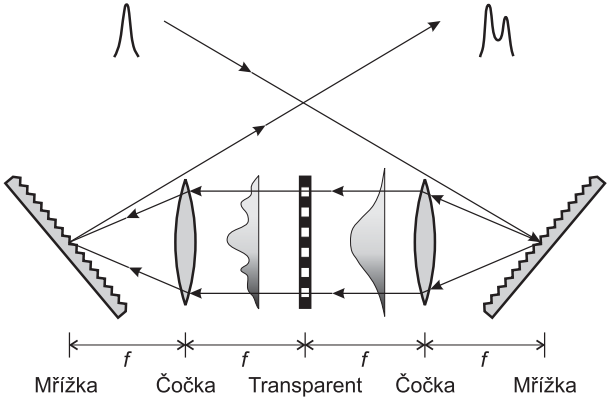
- Uspořádání zesilovače ultrakrátkých impulzů




- Aby nedošlo k poškození zesilovače, je zesilovaný impulz nejprve prodloužen – čerpován – a po zesílení opět komprimován ($\omega_1 < \omega_2$).
- Pro expanzi i kompresi impulzu je možné použít systému difrakčních mřížek.

# Tvarování impulzu

- Experimentální uspořádání aparatury pro tvarování impulzů




- Vstupující impulz je na mřížce spektrálně rozložen v prostoru.
- Po kolimaci je struktura spektra modifikována průchodem elektronicky řízeným transparentem (LCD)
- Impulz je složen do nového tvaru.

# Shrnutí

- Spektrum laserového záření – rezonátor & aktivní prostředí
  - Přitahování módů, disperze
  - Homogenní $\times$ nehomogenní rozšíření
  - Vypalování spektrálních a prostorových zářezů
- Režim synchronizace módů – modelocking
  - Pásmově limitovaný impulz
- Příště: KVANTOVÁ TEORIE LASERU

# Literatura


- SALEH, B. E. A. TEICH, M. C.: *Základy fotoniky - 3.díl*, Matfyzpress, Praha, 1995.
- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
  http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/index.html
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/index.html