

Fyzika laserů

Kvantové generátory optického záření 2

Fokkerova-Planckova rovnice pro jeden mód elmag. pole
Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

Jan Šulc

Katedra laserové fyziky a fotoniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

29. března 2025

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. **F.-P. rovnice pro záření a atom**
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

- Střední hodnota operátoru $\hat{O}$ měřitelné:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- Statistickému operátoru lze přiřadit zobecněnou (kvazidistribuční) funkci (zjednoduší výpočet středních hodnot operátorů)
- Výpočet střední hodnoty náhodné proměnné pomocí známé distribuční funkce $P(\tilde{O})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) \mathcal{O}^c(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha}$$

$\tilde{\alpha}$ je vektorová proměnná a $\mathcal{O}^c(\tilde{\alpha})$ funkce přiřazená operátoru $\hat{O}$

- Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných – uspořádání operátorů.
- Příkladem kvazidistribuční funkce je Glauberova-Sudarshanova reprezentace statistického operátoru $\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad \langle \hat{O} \rangle = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) \mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha$$

Uspořádání anihilačních a kreačních operátorů

- ▶ V případě elektromagnetického pole mohou být operátory měřitelných zapsány ve tvaru mocninných řad anihilačních a kreačních operátorů $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$.
- ▶ Normální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vlevo od anihilačních)

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^N (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- ▶ Přiřadíme klasickou funkci komplexních proměnných $\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*)$ prostou záměnou $\hat{a}^\dagger$ na α^* a $\hat{a}$ na α :

$$\mathcal{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^N \alpha^{*m} \alpha^n$$

- ▶ Antinormální uspořádání (kreační operátory stojí vždy vpravo od anihilačních):

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^A \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

- ▶ Přiřadíme mu opět funkci komplexních proměnných:

$$\mathcal{O}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^A \alpha^m \alpha^{*n}$$

Obečné uspořádání operátorů

- ▶ Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_f)$
- ▶ Operátor ve zvoleném uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \hat{a}_1^{r_1} \cdots \hat{a}_f^{r_f}$$

- ▶ Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \cdots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_f^{r_f}$$

- ▶ Vzájemný vztah zapsaný pomocí uspořádané δ -funkce:

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \int \cdots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i$$

- ▶ Pro c-uspořádanou δ -funkci platí:

$$\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) = e^{-\tilde{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}}} \delta(\tilde{\alpha})$$

- Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Kvazidistribuční funkce

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

- Zobecněné c-uspořádání operátorů $\Rightarrow$ Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}$$

- Výpočet střední hodnoty operátoru $\hat{M}$:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{M} \} \quad \leftrightarrow \quad \langle \hat{M} \rangle = \int P^c(\tilde{\alpha}) M^c(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha}$$

- Normálně uspořádaná kvazidistribuční funkce pro jednomódové pole

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{\pi} \bar{\varrho}^{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha^*)$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Časový vývoj kvazidistribuční funkce – pohybová rovnice pro kvazidistribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ – F-P rovnice
- Postup odvození z řídicí rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \dots} + \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \dots}$$

- Obecný tvar F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \bar{\mathcal{L}}^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- V mnoha případech má F-P rovnice tvar ($A_i(\tilde{\alpha})$ – drift, $D_{ij}(\tilde{\alpha})$ – difúze):

$$\frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [A_i(\tilde{\alpha}) P_c(\tilde{\alpha}, t)] + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} [D_{ij}(\tilde{\alpha}) P_c(\tilde{\alpha}, t)]$$

- Platí následující přiřazení:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 &= (\hat{a}^\dagger, \hat{a}), & \tilde{\alpha}_0 &= (\alpha^*, \alpha) \\ \delta^N(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) &= e^{-\hat{a}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}} \delta(\alpha^*) e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \delta(\alpha) \\ &\equiv \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}), \\ \langle \beta | \delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) \delta(\alpha - \hat{a}) | \beta \rangle &= \delta(\alpha^* - \beta^*) \delta(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

- Řídící rovnice ve Schrödingerově reprezentaci a markovovské aproximaci pro tlumený harmonický oscilátor buzený vnější (klasickou) silou $v(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= -i(\omega_c + \Delta\omega) \left\{ [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] \hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{\rho}] \right\} - i v(t) [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] - i v^*(t) [\hat{a}, \hat{\rho}] + \\ &+ \frac{\gamma}{2} [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \gamma\bar{n} [\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger]\end{aligned}$$

- Protože

$$\frac{1}{\pi} \bar{\rho}^{\mathcal{A}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = P_{\mathcal{N}}(\alpha),$$

stačí jen pravou stranu řídící rovnice převést do antinormálního uspořádání a po formálním přechodu $\tilde{a} \rightarrow \tilde{\alpha}$ dostaneme přímo P-F rovnici

- Neuspořádaná řídicí rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i(\omega_c + \Delta\omega) \left\{ [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] \hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{\rho}] \right\} - i\nu(t) [\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] - i\nu^*(t) [\hat{a}, \hat{\rho}] + \\ & + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \gamma\bar{n} [\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger] \end{aligned}$$

- Využijeme komutačních vztahů (DC 7.1):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{\mathcal{A}} \hat{a} - \hat{a} \hat{\rho}^{\mathcal{A}} &= -\frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}^\dagger}, \\ \hat{a}^\dagger \hat{\rho}^{\mathcal{A}} - \hat{\rho}^{\mathcal{A}} \hat{a}^\dagger &= -\frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}}, \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}^{\mathcal{A}} &= \hat{a} \hat{\rho}^{\mathcal{A}} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}} - \hat{\rho}^{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

- a převedeme řídicí rovnici do antinormálního uspořádání (DC 7.2):

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial t} = -i\omega'_c \left\{ -\hat{a} \frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}} + \frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}^\dagger} \hat{a}^\dagger \right\} + \frac{\gamma}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{a}} (\hat{a} \hat{\rho}^{\mathcal{A}}) + \frac{\partial}{\partial \hat{a}^\dagger} (\hat{\rho}^{\mathcal{A}} \hat{a}^\dagger) \right\} + \gamma\bar{n} \frac{\partial^2 \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a} \partial \hat{a}^\dagger} + i\nu(t) \frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}} - i\nu^*(t) \frac{\partial \hat{\rho}^{\mathcal{A}}}{\partial \hat{a}^\dagger}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro tlumený LHO

- Fokkerova-Planckova rovnice pro $P_{\mathcal{N}}(\alpha)$ popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{N}}(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} = \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega'_c \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P_{\mathcal{N}}) + \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega'_c \right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\alpha^* P_{\mathcal{N}}) + \gamma \bar{n} \frac{\partial^2 P_{\mathcal{N}}}{\partial \alpha \partial \alpha^*} + i\nu(t) \frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial \alpha} - i\nu^*(t) \frac{\partial P_{\mathcal{N}}}{\partial \alpha^*}$$

- Zavedeme pomalu proměnné amplitudy pole β , β^* a předpokládáme harmonický průběh buzení v rezonanci s LHO $\nu(t) = \nu_0 e^{-i\omega'_c t}$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta e^{-i\omega'_c t}, & \alpha^* &= \beta^* e^{+i\omega'_c t}, \\ p(\beta, \beta^*, t) &= P_{\mathcal{N}}(\alpha, \alpha^*, t) \end{aligned}$$

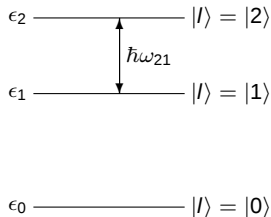
- F-P rovnice je pak separovatelná a vede na Schrödingerovu rovnici pro dvojrozměrný izotropní harmonický oscilátor (DC 7.3-4)
- Stacionární řešení odpovídající nejnižšímu řádu (DC 7.5-6):

$$p_{00}(\beta, \beta^*) = \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp \left[-\frac{1}{\bar{n}} \left| \beta + \frac{2i\nu_0}{\gamma} \right|^2 \right] \quad \left(\text{B.B.} \quad \Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\}) = \prod_{\lambda} \frac{e^{-\frac{|\alpha|_{\lambda}^2}{\langle n_{\lambda} \rangle}}}{\pi \langle n_{\lambda} \rangle} \right)$$

- Všechny ostatní vlastní funkce vymizí pro $t \rightarrow \infty$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



- Řídící rovnice pro statistický operátor $\hat{\rho}$ v Hilbertově stavovém prostoru všech N atomů má tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \sum_{\lambda=1}^N \left\{ \sum_I \left(\left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} - \frac{\Gamma_I}{2} \right] (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \hat{\rho} - \left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} + \frac{\Gamma_I}{2} \right] \hat{\rho} (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \right) + \right. \\ & \left. + \sum'_{k,l} \left(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|k\rangle\langle l|)_{\lambda} - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|l\rangle\langle l|)_{\lambda} \right) \right\}, \end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Zavedeme nové operátory:

$$\hat{N}_I = \sum_{\lambda=1}^N (|I\rangle\langle I|)_{\lambda}, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^N (|1\rangle\langle 2|)_{\lambda}, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^N (|2\rangle\langle 1|)_{\lambda}$$

- Komutační relace $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = \hat{0}$, $[\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M}$, $[\hat{M}, \hat{M}^\dagger] = \hat{N}_1 - \hat{N}_2$ (DC 8.1).

- Po dosazením do

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \sum_{\lambda=1}^N \left\{ \sum_I \left(\left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} - \frac{\Gamma_I}{2} \right] (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \hat{\rho} - \left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} + \frac{\Gamma_I}{2} \right] \hat{\rho} (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \right) + \right. \\ & \left. + \sum'_{k,I} \left(w_{Ik} (|I\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|k\rangle\langle I|)_{\lambda} - \Gamma_{Ik}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \right) \right\}, \end{aligned}$$

- bude mít řídicí rovnice tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \sum_{I=0}^2 \left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} - \frac{\Gamma_I}{2} \right] \hat{N}_I \hat{\rho} - \sum_{I=0}^2 \left[\frac{\epsilon_I}{i\hbar} + \frac{\Gamma_I}{2} \right] \hat{\rho} \hat{N}_I + \\ & + \sum_{\lambda=1}^N \sum'_{k,I} \left(w_{Ik} (|I\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|k\rangle\langle I|)_{\lambda} - \Gamma_{Ik}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|I\rangle\langle I|)_{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- ▶ Pro daný problém stačí použít systém $\hat{M}^\dagger$, $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ a $\hat{M}$, neboť $\hat{N}_0 = N\hat{1} - \hat{N}_1 - \hat{N}_2$, takže $\hat{N}_0$ je navíc.
- ▶ Pro dané c-uspořádání zavedeme δ^c -funkci:

$$\begin{aligned}\delta^c &= \delta(\mathcal{M}^* - \hat{M}^\dagger) \delta(\mathcal{N}_1 - \hat{N}_1) \delta(\mathcal{N}_2 - \hat{N}_2) \delta(\mathcal{M} - \hat{M}) \\ &= e^{-\hat{M}^\dagger \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} e^{-\hat{N}_1 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} e^{-\hat{N}_2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}} e^{-\hat{M} \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}} \delta(\mathcal{M}^*) \delta(\mathcal{N}_1) \delta(\mathcal{N}_2) \delta(\mathcal{M})\end{aligned}$$

- ▶ Řídící rovnici pro $\hat{\varrho}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} &= \sum_{l=0}^2 \left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{N}_l \hat{\varrho} - \sum_{l=0}^2 \left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\varrho} \hat{N}_l + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^N \sum_{k,l}' \left(w_{lk} (|l\rangle \langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|k\rangle \langle l|)_\lambda - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle \langle k|)_\lambda \hat{\varrho} (|l\rangle \langle l|)_\lambda \right)\end{aligned}$$

vynásobíme δ^c z pravé strany a vypočteme stopu

- ▶ S pomocí cyklické záměny pod stopou přesuneme $\hat{\varrho}(t)$ nalevo a vytkneme
- ▶ Přitom položíme energii základního stavu rovnou nule $\epsilon_0 = 0$, použijeme relaci úplnosti, podmínku $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$ a předpoklad, že $N \sim N_0 \gg N_1, N_2$

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Řídící rovnice ($\times \delta^c$, Tr, rotace, $\epsilon_0 = 0$, $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$, $N \sim N_0 \gg N_1, N_2$):

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_{l=0}^2 \left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar} - \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{N}_l \hat{\rho} - \sum_{l=0}^2 \left[\frac{\epsilon_l}{i\hbar} + \frac{\Gamma_l}{2} \right] \hat{\rho} \hat{N}_l + \sum_{\lambda=1}^N \sum_{k,l}' \left(w_{lk} (|l\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|k\rangle\langle l|)_{\lambda} - \Gamma_{lk}^{ph} (|k\rangle\langle k|)_{\lambda} \hat{\rho} (|l\rangle\langle l|)_{\lambda} \right)$$

- Výsledná rovnice má tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C}{\partial t} = & \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \left[-\Gamma_0 N \delta^c + \left(\frac{\epsilon_1}{i\hbar} - \frac{\Gamma_1}{2} \right) \delta^c \hat{N}_1 - \left(\frac{\epsilon_1}{i\hbar} + \frac{\Gamma_1}{2} \right) \hat{N}_1 \delta^c + \right. \right. \\ & + \left(\frac{\epsilon_2}{i\hbar} - \frac{\Gamma_2}{2} \right) \delta^c \hat{N}_2 - \left(\frac{\epsilon_2}{i\hbar} + \frac{\Gamma_2}{2} \right) \hat{N}_2 \delta^c + \\ & + \sum_{\lambda} \left(w_{12} (|2\rangle\langle 1|)_{\lambda} \delta^c (|1\rangle\langle 2|)_{\lambda} + w_{21} (|1\rangle\langle 2|)_{\lambda} \delta^c (|2\rangle\langle 1|)_{\lambda} + \right. \\ & + w_{01} (|1\rangle\langle 0|)_{\lambda} \delta^c (|0\rangle\langle 1|)_{\lambda} + w_{10} (|0\rangle\langle 1|)_{\lambda} \delta^c (|1\rangle\langle 0|)_{\lambda} + \\ & + w_{02} (|2\rangle\langle 0|)_{\lambda} \delta^c (|0\rangle\langle 2|)_{\lambda} + w_{20} (|0\rangle\langle 2|)_{\lambda} \delta^c (|2\rangle\langle 0|)_{\lambda} + \\ & \left. \left. - \Gamma_{12}^{ph} (|1\rangle\langle 1|)_{\lambda} \delta^c (|2\rangle\langle 2|)_{\lambda} - \Gamma_{12}^{ph} (|2\rangle\langle 2|)_{\lambda} \delta^c (|1\rangle\langle 1|)_{\lambda} \right] \right\} \end{aligned}$$

- Členy s $(|0\rangle\langle 0|)_{\lambda}$ vypadly, protože $(|0\rangle\langle 0|)_{\lambda}$ komutuje s δ^c , resp. s $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$, $\hat{M}$ a $\hat{M}^\dagger$, a protože $(|l\rangle\langle l|)_{\lambda}$ byly jen u Γ_{lk}^{ph} , tak tam zůstaly jen $\Gamma_{12}^{ph} = \Gamma_{21}^{ph}$

- Dále se budeme zabývat členem:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\delta^c\hat{N}_1\} &= \text{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)e^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}e^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}e^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times\right. \\ &\quad \left.\times\hat{N}_1e^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\right\}\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{M})\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2). \end{aligned}$$

- S využitím vztahu:

$$e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\hat{N}_1e^{\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}} = \hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}$$

- můžeme předchozí výraz upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{\varrho}(t)\delta^c\mathcal{N}_1\} &= \text{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)e^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}e^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}e^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\left(\hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}\right)e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times\right. \\ &\quad \left.\times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\right\} = \\ &= \text{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)e^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}e^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}\hat{N}_1e^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times\right. \\ &\quad \left.\times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\text{Tr}\left\{\hat{\varrho}(t)e^{-\hat{M}^\dagger\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}}e^{-\hat{N}_1\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_1}}e^{-\hat{N}_2\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}}\hat{M}e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\times\right. \\ &\quad \left.\times\delta(\mathcal{M}^*)\delta(\mathcal{N}_1)\delta(\mathcal{N}_2)\delta(\mathcal{M})\right\} \end{aligned}$$

- Uvážíme funkci $f(\xi)$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned}f(\xi) &= e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1e^{\xi\hat{M}}, \\f(0) &= \hat{N}_1,\end{aligned}$$

- Funkci $f(\xi)$ derivujeme podle ξ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= -\hat{M}e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1e^{\xi\hat{M}} + e^{-\xi\hat{M}}\hat{N}_1\hat{M}e^{\xi\hat{M}} = e^{-\xi\hat{M}}[\hat{N}_1, \hat{M}]e^{\xi\hat{M}} = \\&= \left\{ [\hat{N}_1, \hat{M}] = \hat{M} \right\} = e^{-\xi\hat{M}}\hat{M}e^{\xi\hat{M}} = \hat{M}.\end{aligned}$$

- Integrací podle ξ dostaneme:

$$\int_0^\xi \frac{\partial f}{\partial \xi'} d\xi' = \int_0^\xi \hat{M} d\xi' \Rightarrow f(\xi) - f(0) = \hat{M}\xi \Rightarrow f(\xi) = \hat{N}_1 + \xi\hat{M}.$$

- Dosadíme-li za $\xi = \partial/\partial\mathcal{M}$, je relace

$$e^{-\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}}\hat{N}_1e^{+\hat{M}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}} = \hat{N}_1 + \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\hat{M}$$

dokázána.

Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- V rozvoji pro exponenciální funkci použijeme jen první dva členy:

$$e^{-\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}} = 1 + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2},$$

derivace vyšších řádů mohou být zanedbány jako úměrné $1/\mathcal{N}_1$.

- Tak se od F-P rovnice s obecně libovolným řádem derivací dostaneme k rovnici jen druhého řádu. . .

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\Gamma_{21} + i\omega_{21}) \mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} (\Gamma_{21} - i\omega_{21}) \mathcal{M}^* - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} (R_1 - \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} (R_2 - \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} (R_1 + \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} (R_2 + \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} (-w_{12} \mathcal{N}_2 - w_{21} \mathcal{N}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}} \Gamma_1 \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*} \Gamma_1 \mathcal{M}^* + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21} \mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21} \mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} (R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}] \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) \right\} P_c \end{aligned}$$

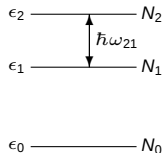
Fokkerova-Planckova rovnice pro soubor tříhladinových atomů

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\Gamma_{21} + i\omega_{21}) \mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} (\Gamma_{21} - i\omega_{21}) \mathcal{M}^* - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} (R_1 - \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} (R_2 - \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} (R_1 + \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} (R_2 + \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} (-w_{12} \mathcal{N}_2 - w_{21} \mathcal{N}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}} \Gamma_1 \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*} \Gamma_1 \mathcal{M}^* + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21} \mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21} \mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} (R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}] \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) \right\} P_c \end{aligned}$$

- $R_i = Nw_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- $\Gamma_1 \mathcal{N}_1$, $\Gamma_2 \mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise
- $w_{12} \mathcal{N}_2$ stimulovaná emise z hladiny 2 na hladinu 1
- $w_{21} \mathcal{N}_1$ absorpce pro přechod $1 \rightarrow 2$

- Dospěli jsme k Fokkerově-Planckově rovnici pro tlumený LHO jakožto model jednoho módu pole a pro tříhladinové aktivní prostředí (soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav)
- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice pro tříhladinové aktivní prostředí:
 1. Látku tvoří N stejných, vzájemně neinteragujících, *tříhladinových* kvantových soustav; každá má svůj tlumící rezervoár, všechny rezervoáry mají stejnou teplotu



2. Tříhladinové KS = v základní stavu s populací N_0 se nachází většina KS, pracovní přechod je mezi první a druhou excitovanou hladinou s populací N_1 a N_2 , přitom $N \sim N_0 \gg N_1, N_2 \gg 1$
 3. Na pravé straně F-P rovnice jsme zanedbali derivace vyššího než druhého řádu
- Příště: Hamiltonián plně kvantové interakce rezonančního záření s látkou a Fokkerova-Planckova rovnice pro laser

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>