

Fyzika laserů

Kvantové generátory optického záření 2

Fokkerova-Planckova rovnice pro laserový systém
Časový vývoj středních hodnot – Langevinovy rovnice

Jan Šulc

Katedra laserové fyziky a fotoniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

6. května 2025

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. **F.-P. rovnice pro laser**
13. Statistické vlastnosti laserového záření

- ▶ Kvantově popisujeme jak prostředí, tak záření.
- ▶ Na rozdíl od poloklasické teorie je možné studovat statistické vlastnosti generovaného záření
 - ▶ Amplituda elektrického pole $\sim \langle \hat{a} \rangle$
 - ▶ Intenzita záření $\sim \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$
 - ▶ Stupeň koherence $\sim$ korelační funkce 2. řádu $\sim \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t - \tau) \rangle$
- ▶ Operátoru $\hat{O}$ přiřadíme zobecněnou funkci $\mathcal{O}(\tilde{\alpha})$
- ▶ Od výpočtu středních hodnot pomocí statistického operátoru přejdeme k použití kvazidistribuční funkce $P(\tilde{\alpha})$

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \} \quad \times \quad \langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) \mathcal{O}(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha}$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce $P(\tilde{\alpha})$ obsahuje stejnou informaci jako statistický operátor $\hat{\rho}$, není ale stanovena jednoznačně.
- ▶ Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných (uspořádání).
- ▶ Kvazidistribuční funkce včetně jejího časového vývoje je určena řešením Fokkerovy-Planckovy rovnice

$$\frac{\partial P(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i(\tilde{\alpha}) P(\tilde{\alpha}, t) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} D_{ij}(\tilde{\alpha}) P(\tilde{\alpha}, t) \quad (1)$$

- Vzájemný vztah operátoru a přidružené klasické funkce zapsaný pomocí uspořádané δ -funkce:

$$\hat{M} = M^c(\underbrace{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f}_{\tilde{a}}) = \int \dots \int \underbrace{\bar{M}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f)}_{\tilde{\alpha}} \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) d\tilde{\alpha}$$

- Zobecněné c-uspořádání operátorů $\Rightarrow$ Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), \textcolor{red}{t}] \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(\textcolor{red}{t}) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, \textcolor{red}{t})$$

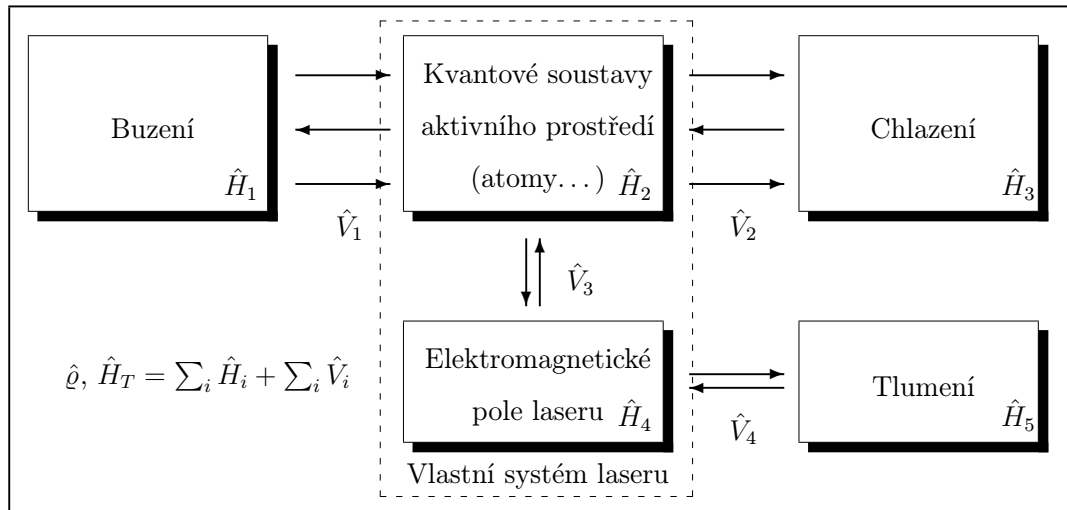
- Pohybová rovnice pro kvazidistribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha})$ – F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c}{\partial t}(\tilde{\alpha}_0, t) = \bar{\mathcal{L}}^c \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right\} P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

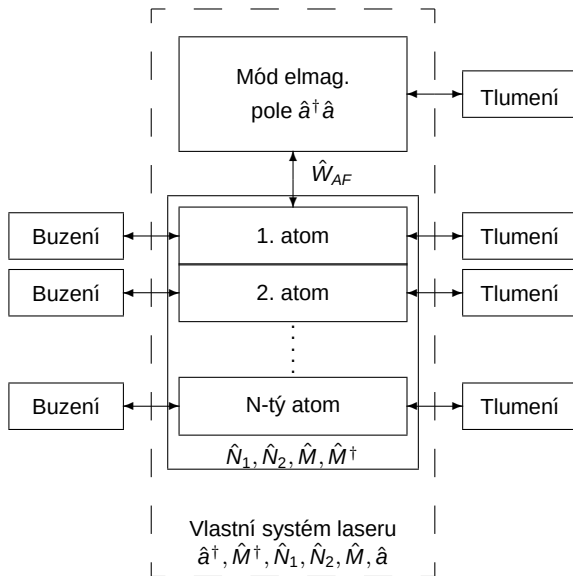
- Postup odvození z řídicí rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \dots} + \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \dots}$$

Model laseru jako uzavřený systém

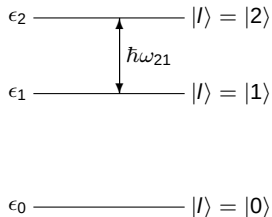


Kvantový model laseru



Model aktivního prostředí – tříhladinový atom

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N *tříhladinovými* kvantovými systémy



- Příslušné operátory:

$$\hat{N}_I = \sum_{\lambda=1}^N (|I\rangle\langle I|)_{\lambda}, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^N (|1\rangle\langle 2|)_{\lambda}, \quad \hat{M}^{\dagger} = \sum_{\lambda=1}^N (|2\rangle\langle 1|)_{\lambda}$$

- Relativní populace horní a dolní laserové hladiny je malá

$$N = N_0 + N_1 + N_2 \sim N_0 \gg N_1, N_2 \gg 1$$

Kvantový model laseru

- ▶ Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF},$$

- ▶ Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = i\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- ▶ Liouvilleův teorém:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_0, \hat{\rho}],$$

- ▶ Uvažujeme markovovský systém $\Rightarrow$ Řídící rovnice:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \text{atomy} + \text{pole} + \text{interakce}$$

- ▶ Volíme uspořádání:

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\hat{a}^\dagger, \hat{M}^\dagger, \hat{N}_1, \hat{N}_2, \hat{M}, \hat{a}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = (\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha)$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce:

$$P_C(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{\mathbf{a}}) \rangle.$$

- ▶ Fokkerova-Planckova rovnice:

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = \frac{\partial P_{\text{Atomy}}}{\partial t} + \frac{\partial P_{\text{Pole}}}{\partial t} + \text{interakce}$$

- Fokkerova-Planckova rovnice pro tříhladinový atom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\text{Atom}}}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\Gamma_{21} + i\omega_{21}) \mathcal{M} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} (\Gamma_{21} - i\omega_{21}) \mathcal{M}^* - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} (R_1 - \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} (R_2 - \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} (R_1 + \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + w_{12} \mathcal{N}_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} (R_2 + \Gamma_2 \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} (-w_{12} \mathcal{N}_2 - w_{21} \mathcal{N}_1) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}} \Gamma_1 \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*} \Gamma_1 \mathcal{M}^* + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21} \mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21} \mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} (R_2 + [\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}] \mathcal{N}_2 + w_{21} \mathcal{N}_1) \right\} P_{\text{Atom}} \end{aligned}$$

- Fokkerova-Planckova rovnice popisující dynamiku jednoho módu elektromagnetického pole:

$$\frac{\partial P_{\text{Pole}}}{\partial t} = \left\{ \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega'_c \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega'_c \right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + i\nu(t) \frac{\partial}{\partial \alpha} - i\nu^*(t) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \gamma \bar{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right\} P_{\text{Pole}}$$

- Příspěvek Hamiltoniánu interakce $\hat{W}_{AF} = i\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_S \left\{ [\hat{W}_{AF}, \hat{\rho}] \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\hat{a}}) \right\} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho} [\delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\hat{a}}), i\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})] \right\} = \\ &= d \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho} \left[e^{-\hat{a}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}} e^{-\hat{M}^\dagger \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} \dots e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} (\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a}) e^{-\hat{a}^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha^*}} e^{-\hat{M}^\dagger \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}} \dots e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \right] \right\} \delta(\alpha^*) \delta(\mathcal{M}^*) \delta(\mathcal{N}_1) \delta(\mathcal{N}_2) \delta(\mathcal{M}) \delta(\alpha)\end{aligned}$$

- Jednotlivé členy převedeme do zvoleného c-uspořádání. Např.:

$$e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \hat{a}^\dagger = e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \hat{a}^\dagger e^{+\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} = \left(\hat{a}^\dagger - \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}}$$

- Postupně dostaneme (DC 8.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= d \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{M} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \mathcal{M}^* - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \alpha - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \alpha^* + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^* \mathcal{M} + \alpha \mathcal{M}^*) [1 - e^{\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}}] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} \mathcal{M} \alpha + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} \mathcal{M}^* \alpha^* \right\} P_C\end{aligned}$$

- ▶ Exponenciální funkce rozvineme do druhého řádu Taylorova rozvoje:

$$e^{\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}} \cong 1 + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}$$

- ▶ Příspěvek Hamiltoniánu interakce k F-P rovnici

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & d \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{M} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \mathcal{M}^* - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \alpha - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) \alpha^* + \right. \\ & + (\alpha^* \mathcal{M} + \alpha \mathcal{M}^*) \left[\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} \right] + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} \mathcal{M} \alpha + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} \mathcal{M}^* \alpha^* \right\} P_C \end{aligned}$$

Kvantový model laseru – F-P rovnice

Výsledná Fokkerova-Planckova rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c \right) \alpha \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[d\mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right) \alpha^* \right] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} [d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha - (\Gamma_{12} + i\omega_a)\mathcal{M}] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} [d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha^* - (\Gamma_{12} - i\omega_a)\mathcal{M}^*] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} [R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} [R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} [R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} [R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} [-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}} \Gamma_1 \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*} \Gamma_1 \mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21}\mathcal{M}) + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21}\mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} [R_2 + (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph})\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} d\alpha \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} d\alpha^* \mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \gamma \bar{n} \right\} P_c \end{aligned}$$

- ▶ $R_i = Nw_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- ▶ $\Gamma_1\mathcal{N}_1, \Gamma_2\mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise
- ▶ $w_{12}\mathcal{N}_2$ stimulovaná emise z hladiny 2 na hladinu 1
- ▶ $w_{21}\mathcal{N}_1$ absorpce pro přechod $1 \rightarrow 2$

Časový vývoj středních hodnot – Langevinovy rovnice

- ▶ Známe-li statistický operátor systému $\hat{\varrho}$, můžeme střední hodnotu operátoru $\hat{O}$ určit pomocí následujícího vztahu:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\varrho} \hat{O} \right\}.$$

- ▶ Je-li operátor $\hat{O}$ vyjádřen ve Schrödingerově reprezentaci, platí pro popis časové změny střední hodnoty operátoru následující rovnice:

$$\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \text{Tr} \left\{ \hat{O} \frac{d\hat{\varrho}(t)}{dt} \right\}.$$

- ▶ Tomuto operátorovému vyjádření lze v daném c-uspořádání s pomocí příslušné kvazidistribuční funkce $P_c(\tilde{\alpha})$ přiřadit rovnost:

$$\frac{d\langle \hat{O} \rangle}{dt} = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} O^c(\tilde{\alpha}) \frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t}.$$

- ▶ Fokkerova-Planckova rovnice tedy může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému.

Časový vývoj středních hodnot – Langevinovy rovnice

- Pro střední operátorů $\hat{a}_k$ dostaneme:

$$\frac{d\langle \hat{a}_k \rangle}{dt} = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t}.$$

- Za $\partial P_C(\tilde{\alpha}, t)/\partial t$ dosadíme z Fokkerovy-Planckovy rovnice:

$$\frac{d\langle \hat{a}_k \rangle}{dt} = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \left\{ -\frac{\partial A_i P}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 D_{ij} P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} = - \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial A_i P}{\partial \alpha_i} + \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial^2 D_{ij} P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$$

- Opakovaně použijeme integraci per-partes:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \alpha_k A_i P &= \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i P + \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} A_i P \frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_i} \\ \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_k D_{ij} P &= \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial^2 D_{ij} P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} D_{ij} P \frac{\partial^2 \alpha_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial D_{ij} P}{\partial \alpha_j} + \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial D_{ij} P}{\partial \alpha_i} \end{aligned}$$

- Využijeme toho, že $P \rightarrow 0$ pro $\alpha_i \rightarrow \infty$ a že $\partial \alpha_k / \partial \alpha_j = \delta_{kj}$:

$$- \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} A_i P = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} A_k P \quad \text{a} \quad \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha_k \frac{\partial^2 D_{ij} P}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0$$

- Tedy:

$$\frac{d\langle \hat{a}_k \rangle}{dt} = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} A_k P_C(\tilde{\alpha}, t) = \langle \hat{A}_k \rangle$$

Časový vývoj středních hodnot – Langevinovy rovnice

- ▶ Např. pro střední hodnotu anihilačního operátoru $\hat{a}$ elektromagnetického pole generovaného laserem dostaneme:

$$\frac{d\langle\hat{a}\rangle}{dt} = \int_{\tilde{\alpha}} d\tilde{\alpha} \alpha \frac{dP_C(\tilde{\alpha}, t)}{dt}.$$

- ▶ Po dosazení za kvazidistribuční funkci $P_C(\tilde{\alpha}, t)$ z Fokkerovy-Planckovy rovnice a po úpravě jednotlivých integrálů lze ukázat, že platí:

$$\frac{d\langle\hat{a}\rangle}{dt} = \left\langle d\hat{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right) \hat{a} \right\rangle, \quad \text{tj.} \quad \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \frac{d\hat{a}}{dt} \right\} = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left(d\hat{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right) \hat{a} \right) \right\}$$

- ▶ Této rovnici lze přiřadit následující Langevinovu rovnici:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = d\hat{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right) \hat{a} + \hat{L}_a,$$

kde operátor $\hat{L}_a$ představuje příslušnou Langevinovu sílu, $\langle\hat{L}_a\rangle = 0$.

- ▶ Pro přiřazenou klasickou veličinu (komplexní amplitudu elmag. pole) platí:

$$\frac{d\alpha}{dt} = d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right) \alpha + \mathcal{L}_a,$$

- ▶ Až na $\mathcal{L}_a$ stojí na pravé straně této drifrový člen, který se nachází na pravé straně F-P rovnice u derivace $\partial/\partial\alpha$.

Soustava Langevinových rovnic

- Obdobně lze pro popis časového vývoje příslušných dynamických proměnných využít i dalších driftových členů. Tak získáme následující soustavu Langevinových rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + i\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}\end{aligned}$$

- Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_C(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.
- Funkce $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}$ jsou náhodné (v čase fluktuující) Langevinovy síly, jejichž autokorelační funkce je δ -funkcí časového zpoždění.
- Frekvence ω_c přísluší vybranému módu optického rezonátoru a $\omega_{21} = \omega_a$ je rezonanční frekvence kvantového přechodu.

Langevinovy rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

- Budeme hledat řešení této soustavy pro pomalu proměnné amplitudy:

$$\alpha(t) = \alpha'(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathcal{M}(t) = \mathcal{M}'(t)e^{-i\omega_0 t}.$$

- Soustava rovnic pro pomalu proměnné amplitudy má tvar:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= - \left[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_0) \right] \alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= - [\Gamma_{12} + i(\omega_a - \omega_0)] \mathcal{M}' + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha' + g_{\mathcal{M}}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha'^* \mathcal{M}' + \alpha' \mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_2}, \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha'^* \mathcal{M}' + \alpha' \mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_1}. \end{aligned}$$

Poloklasický popis laseru

- Zanedbáme náhodné Langevinovy síly a zavedeme označení:

$$d = \sqrt{\frac{\omega_c}{2\epsilon_0 L^3 \hbar}} \langle 1 | e\hat{x} | 2 \rangle, \text{ kde } \langle 1 | e\hat{x} | 2 \rangle = d_{12}$$

$$P = \frac{d_{12}}{L^3} \sum_{\lambda} \{ |1\rangle \langle 2| \}_{\lambda} = \frac{d_{12} M}{L^3} \longrightarrow \frac{d_{12} \mathcal{M}'}{L^3}$$

$$\mathcal{E}(t) = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_c}{2\epsilon_0 L^3}} \alpha'(t)$$

- Dostaneme soustavu rovnic reprezentující poloklasický popis laseru:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{i\omega_a}{2\epsilon_0} P - \left[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_0) \right] \mathcal{E}$$

$$\frac{dP}{dt} = -[\Gamma_{12} + i(\omega_a - \omega_0)] P - i \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} (N_2 - N_1) \mathcal{E}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 + w_{21} N_1 - \Gamma_2 N_2 - \frac{i}{\hbar} (\mathcal{E}^* P - \mathcal{E} P^*)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 + w_{12} N_2 - \Gamma_1 N_1 + \frac{i}{\hbar} (\mathcal{E}^* P - \mathcal{E} P^*)$$

Poloklasický popis laseru

- Soustava rovnic reprezentující poloklasický popis laseru:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{i\omega_a}{2\epsilon_0}P - \left[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_0)\right]\mathcal{E} \\ \frac{dP}{dt} &= -[\Gamma_{12} + i(\omega_a - \omega_0)]P - i\frac{|d_{21}|^2}{\hbar}(N_2 - N_1)\mathcal{E} \\ \frac{dN_2}{dt} &= R_2 + w_{21}N_1 - \Gamma_2N_2 - \frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}^*P - \mathcal{E}P^*) \\ \frac{dN_1}{dt} &= R_1 + w_{12}N_2 - \Gamma_1N_1 + \frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}^*P - \mathcal{E}P^*)\end{aligned}$$

- Poloklasické rovnice pro signál v rezonanci a bez modulace fáze

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} &= \frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}\mathcal{P}_2 \\ \frac{\partial\mathcal{P}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2\end{aligned}$$

- ▶ Odvodili jsme Fokkerovu-Planckovu rovnici pro soubor tlumených tříhladinových kvantových soustav interagujících jedním módem elektromagnetického pole, reprezentovaný tlumeným LHO.
- ▶ Interakce rezonančního záření a prostředí:

$$\hat{W}_{AF} = i\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- ▶ Členy u prvních derivací na pravé straně Fokkerovy-Planckovy rovnice lze využít pro nalezení tzv. Langevinových rovnic.
- ▶ Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_C(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.
- ▶ Zanedbáním kvantových fluktuací dostaneme soustavu rovnic reprezentující poloklasický popis laseru.
- ▶ Příště: řešení Fokkerovy-Planckovy rovnice

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  KVASIL, B.: *Teoretické základy kvantové elektroniky*, Academia, Praha, 1983
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>