

Fyzika laserů

Kvantové generátory optického záření 2

Statistické vlastnosti laserového záření a jejich změna v oblasti prahu
Van der Pohlův oscilátor.

Jan Šulc

Katedra laserové fyziky a fotoniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

13. května 2025

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. **Statistické vlastnosti laserového záření**

- Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ vs statistický operátor

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

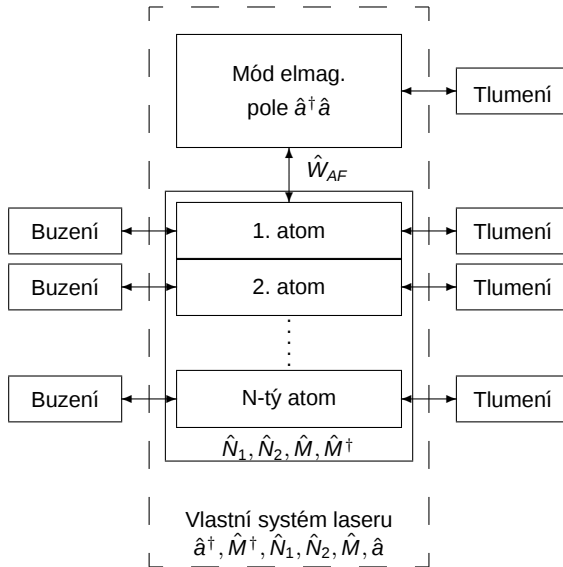
$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Pohybová rovnice pro kvazidistribuční funkci $P_c(\tilde{\alpha})$ – F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c}{\partial t}(\tilde{\alpha}_0, t) = \bar{\mathcal{L}}^c \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right\} P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

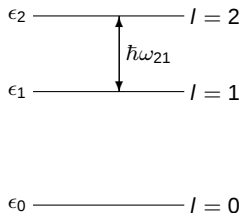
- Postup odvození z řídicí rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \dots} + \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a}) \}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \dots}$$



Model aktivního prostředí – tříhladinový atom

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



- Příslušné operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^N (|l\rangle\langle l|)_{\lambda}, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^N (|1\rangle\langle 2|)_{\lambda}, \quad \hat{M}^{\dagger} = \sum_{\lambda=1}^N (|2\rangle\langle 1|)_{\lambda}$$

- Relativní populace horní a dolní laserové hladiny malá

$$N = N_0 + N_1 + N_2 \sim N_0 \gg N_1, N_2 \gg 1$$

- ▶ Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF},$$

- ▶ Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = i\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce:

$$P_C(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\hat{a}}) \rangle.$$

- ▶ Předpoklady použité při odvození F-P rovnice:

- ▶ Atomy a pole, tvořící vlastní systém laseru, jsou tlumené systémy splňující podmínky Markovovské aproximace;
- ▶ Zanedbáváme depopulaci základní hladiny, tj. $N_0 \approx N$;
- ▶ Ve F-P rovnici zanedbáme derivace vyššího než druhého řádu.

Výsledná Fokkerova-Planckova rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c \right) \alpha \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[d\mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right) \alpha^* \right] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} [d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha - (\Gamma_{12} + i\omega_a)\mathcal{M}] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} [d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha^* - (\Gamma_{12} - i\omega_a)\mathcal{M}^*] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} [R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} [R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2} [R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} [R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2} [-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}} \Gamma_1 \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*} \Gamma_1 \mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21}\mathcal{M}) + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21}\mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} [R_2 + (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph})\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} d\alpha \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} d\alpha^* \mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \gamma \bar{n} \right\} P_c \end{aligned}$$

- $R_i = Nw_{i0}$, pro $i = 1, 2$, představují rychlost excitace příslušné hladiny.
- $\Gamma_1\mathcal{N}_1$, $\Gamma_2\mathcal{N}_2$ úbytek populace hladiny 1 a 2 v důsledku spontánní emise
- $w_{12}\mathcal{N}_2$ stimulovaná emise z hladiny 2 na hladinu 1
- $w_{21}\mathcal{N}_1$ absorpce pro přechod $1 \rightarrow 2$

Časový vývoj středních hodnot – soustava Langevinových rovnic

- Fokkerova-Planckova rovnice může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému $\Rightarrow$ soustava Langevinových rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + i\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}\end{aligned}$$

- Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_C(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.
- Funkce $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}$ jsou náhodné (v čase fluktuující) Langevinovy síly, jejichž autokorelační funkce je δ -funkcí časového zpoždění.
- Budeme hledat řešení této soustavy pro pomalu proměnné amplitudy:

$$\alpha(t) = \alpha'(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathcal{M}(t) = \mathcal{M}'(t)e^{-i\omega_0 t}.$$

Langevinovy rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

- Soustava rovnic pro pomalu proměnné amplitudy má tvar:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dt} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_0)\right] \alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= -[\Gamma_{12} + i(\omega_a - \omega_0)] \mathcal{M}' + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha' + g_\mathcal{M}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_2}, \\ \frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_1}.\end{aligned}$$

kde:

- ω_0 – nosná frekvence hledaného pole
- ω_c – vlastní frekvence rezonátoru
- $\omega_a = \omega_{21} = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/\hbar$
- γ – tlumení (ztráty) rezonátoru
- $\alpha' \sim$ komplexní pomaluproměnná amplituda elektrického pole, $\mathcal{M} \sim \mathcal{P}$, $d \sim d_{21}$
- Postupně budeme eliminovat jednotlivé proměnné až na amplitudy pole

Zanedbání populace dolní laserové hladiny

- 1. předpoklad – **rychlá relaxace dolní laserové hladiny**, tj. $\Gamma_1 \gg \text{ostatní } \Gamma \Rightarrow N_1 \doteq 0 \Rightarrow P_C$ nezávisí na $\mathcal{N}_1$, tj.

$$\frac{\partial P_C}{\partial \mathcal{N}_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_C}{\partial \mathcal{N}_1^2} = 0$$

- Po eliminaci N_1 máme

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_0)\right]\alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= -[\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)]\mathcal{M}' + d\mathcal{N}_2\alpha' + g_{\mathcal{M}}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - B + g_{\mathcal{N}_2}, \end{aligned}$$

kde:

$$B = d(\alpha'^* \mathcal{M}' + \alpha' \mathcal{M}'^*).$$

Fokkerova-Planckova rovnice pro $\mathcal{N}_1 \approx 0$, $\partial P_C / \partial \mathcal{N}_1 = 0$ a $\partial^2 P_C / \partial \mathcal{N}_1^2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_c \right) \alpha \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[d\mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right) \alpha^* \right] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} [d\mathcal{N}_2 \alpha - (\Gamma_{12} + i\omega_a)\mathcal{M}] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} [d\mathcal{N}_2 \alpha^* - (\Gamma_{12} - i\omega_a)\mathcal{M}^*] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} [R_2 - \Gamma_2 \mathcal{N}_2 - d(\alpha^* \mathcal{M} + \alpha \mathcal{M}^*)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2} [R_2 + \Gamma_2 \mathcal{N}_2 - d(\alpha^* \mathcal{M} + \alpha \mathcal{M}^*)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}} (-w_{21} \mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*} (-w_{21} \mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*} [R_2 + (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph}) \mathcal{N}_2] + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} d\alpha \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} d\alpha^* \mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \gamma \bar{n} \right\} P_C \end{aligned}$$

Adiabatická eliminace polarizace

- ▶ 2. předpoklad – rychlost relaxace polarizace $\Gamma_{12} \approx \Gamma_1/2$ je velká v porovnání s γ a s Γ_2 , takže můžeme zanedbat derivaci $\partial \mathcal{M}' / dt$ oproti $\Gamma_{12} \mathcal{M}'$.
- ▶ Z rovnice pro polarizaci $0 = -[\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)] \mathcal{M}' + d\mathcal{N}_2 \alpha' + g_{\mathcal{M}}$ je možné vyjádřit okamžitou hodnotu amplitudy polarizace:

$$\mathcal{M}' = \frac{d\mathcal{N}_2 \alpha' + g_{\mathcal{M}}}{\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)},$$

- ▶ ... a dosadit ji do zbývajících rovnic pro pole α' a $\mathcal{N}_2$.
- ▶ Zbývají následující Langevinovy rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{K} \mathcal{N}_2 - \gamma + i \left[\frac{\mathcal{K} \mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}} (\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0) \right] \right) \alpha' + f_{\alpha}, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 \left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}} \right] - [\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K} |\alpha'|^2] \mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}. \end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_{\alpha}(t) = g_{\alpha}(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)} \\ f_{\mathcal{N}_2}(t) &= g_{\mathcal{N}_2}(t) - d \left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}}^*(t)}{\Gamma_{12} + i(\omega_0 - \omega_a)} \right] \end{aligned}$$

Rezonance a adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

► Máme:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{K} \mathcal{N}_2 - \gamma + i \left[\frac{\mathcal{K} \mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}} (\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0) \right] \right) \alpha' + f_\alpha, \\ \frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 \left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}} \right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K} |\alpha'|^2 \right] \mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.\end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)} \\ f_{\mathcal{N}_2}(t) &= g_{\mathcal{N}_2}(t) - d \left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - i(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + i(\omega_0 - \omega_a)} \right]\end{aligned}$$

- 3. předpoklad – **rezonance** generovaného pole (ω_0) s rezonanční frekvencí přechodu atomů (ω_a), tj. $\omega_0 = \omega_a$ a rezonátor je naladěn taky do rezonance, tj. $\omega_0 = \omega_c$
- 4. předpoklad – pro plynové lasery má člen $\mathcal{K}/2\Gamma_{12} = d^2/\Gamma_{12}^2$ hodnotu $\sim 10^{-8} \Rightarrow$ lze ho zanedbat.
- 5. předpoklad – rychlost relaxace horní laserové hladiny ve srovnání s relaxací pole v rezonátoru je vysoká, tj. $\Gamma_{21} \ll \gamma$ a $\Gamma_2 \mathcal{N}_2 \gg d\mathcal{N}_2/dt \Rightarrow$

$$\mathcal{N}_2 \cong \frac{R_2 + f_{\mathcal{N}_2}}{\Gamma_2 + \mathcal{K} |\alpha'|^2} \quad \text{kde} \quad \mathcal{K} = \frac{2d^2}{\Gamma_{12}} \quad \left[\Gamma_2^{-1} = T_1, \Gamma_{12}^{-1} = T_2 \right]$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- ▶ Výrazy pro polarizaci a populaci horní laserové hladiny dosadíme do původní F-P rovnice a do rovnice pro amplitudu pole:

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \mathcal{A}_\alpha^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D_{\alpha\alpha}^F + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^*{}^2} D_{\alpha^*\alpha^*}^F + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} 2D_{\alpha^*\alpha}^F \right\} P_C$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{G}_\alpha$$

- ▶ $\mathcal{A}_\alpha$ – nelineární součinitel „driftu“ – časové změny

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{K} R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K} |\alpha'|^2} - \gamma \right] \alpha'$$

- ▶ $D_{\alpha\alpha}^F$ – součinitel „difúze“

$$\langle \mathcal{G}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(t) \rangle_R = 2 \langle D_{\alpha\alpha}^F \rangle \delta(s - t),$$

$$\langle \mathcal{G}_{\alpha^*}(s) \mathcal{G}_\alpha(t) \rangle_R = 2 \langle D_{\alpha^*\alpha}^F \rangle \delta(s - t)$$

přičemž:

$$\mathcal{G}_\alpha = \frac{\mathcal{K}}{2} \frac{\alpha'_c}{\Gamma_2 + \mathcal{K} |\alpha'|^2} f_{\mathcal{N}_2}(t) + f_\alpha(t)$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- ▶ Ve F-P rovnici jsme eliminovali všechny proměnné, až na pole

$$\frac{\partial P_c}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \mathcal{A}_{\alpha'}^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D_{\alpha\alpha}^F + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^*{}^2} D_{\alpha^*\alpha^*}^F + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} 2D_{\alpha^*\alpha}^F \right\} P_c$$

- ▶ Linearizace driftového členu v okolí stacionárního řešení rovnice pro α' , předpokládáme, že $I \simeq I_0 = |\alpha|_0^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{K}R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I} - \gamma \right] \alpha' = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{K}R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0 + \mathcal{K}(I - I_0)} - \gamma \right] \alpha' = \\ &= \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)} \left(1 + \frac{\mathcal{K}(I - I_0)}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0} \right)^{-1} - 1 \right] \alpha' \cong \\ &\cong \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)} \left(1 - \frac{\mathcal{K}(I - I_0)}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0} \right) - 1 \right] \alpha' = \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI] \alpha' \end{aligned}$$

kde:

$$\Pi = \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)} \left[1 + \frac{\mathcal{K}I_0}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0} \right] - 1, \quad S = \frac{\mathcal{K}^2 R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)^2}$$

- ▶ V této aproximaci má Fokkerova-Planckova rovnice tvar:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI] \alpha' P - \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI] \alpha'^* P + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} \left(\gamma \bar{n} + \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma} \right) P.$$

F-P rovnice pro jednomódový laser jako rovnice pro VdP oscilátor

- ▶ Ve F-P rovnici s linearizovaným driftovým členem

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI] \alpha' P - \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI] \alpha'^* P + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} \left(\gamma \bar{n} + \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma} \right) P.$$

zavedeme nové bezrozměrné parametry $\tau = t/T$ a $\beta = \alpha'/\xi$ a g (par. buzení)

$$T = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\mathcal{K}}{8\Gamma_2} \left(\frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma\Gamma_2} \right) \left[\bar{n} + \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma\Gamma_2} \right] \right\}^{-1/2}, \quad \xi^2 = \left\{ \frac{\bar{n} + (\mathcal{K}R_2/\gamma\Gamma_2)}{(2\mathcal{K}/\Gamma_2)(\mathcal{K}R_2/\gamma\Gamma_2)} \right\}^{1/2}, \quad g = T \left(\frac{\mathcal{K}R_2}{2\Gamma_2} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

- ▶ Potom lze F-P rovnici zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [g - |\beta|^2] \beta - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [g - |\beta|^2] \beta^* + 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \right\} P$$

$\Rightarrow$ F-P rovnice pro Van der Polův oscilátor

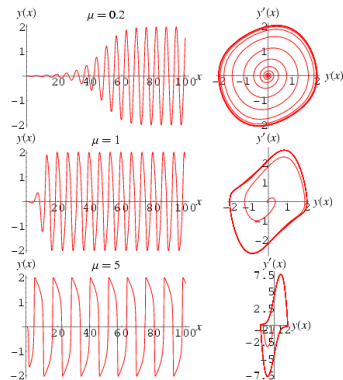
- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [g - |\beta|^2] \beta - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [g - |\beta|^2] \beta^* + 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol (nizozemský inženýr a fyzik pracující pro firmu Philips) a I. van der Marek sestavili matematický model elektronického obvodu pracujícího s elektronkami, který simuloval srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

- Nelineární diferenciální rovnic druhého řádu
- Řešení je citlivé na počáteční podmínky
- Bylo pozorováno chaotické chování při přidání periodického buzení
- Historicky první matematický model dějů, označovaných jako **deterministický chaos**
- Používá se pro studium přechodů mezi periodickým a chaotickým chováním.



Řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [g - |\beta|^2] \beta - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [g - |\beta|^2] \beta^* + 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \right\} P$$

- Přejít k **polárním** souřadnicím r, φ :

$$\beta = r e^{i\varphi}, \quad d\beta = r dr d\varphi$$

- Záměna proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r + 1 - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r + 1 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

F-P rovnice pro jednomódový laser v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(g - r^2)r^2 p]$$

- Hledáme stacionární řešení, nezávislé na φ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

- Dostaneme:

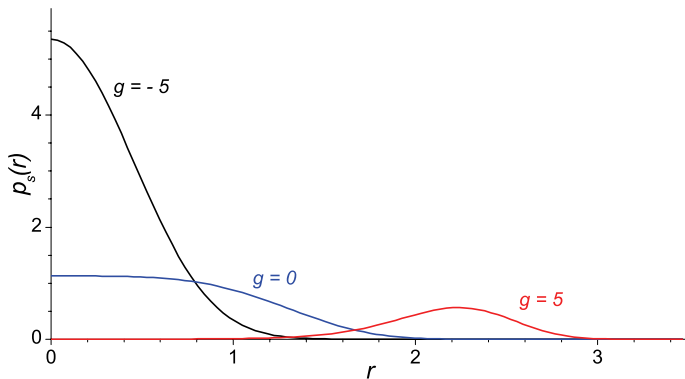
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial p}{\partial r} - (g - r^2)r^2 p \right\} = 0$$

- Integrujeme $2 \times \dots$

Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Normalizované stacionární řešení:

$$p_s(r) = \frac{\exp \left[- (r^2 - g)^2 / 4 \right]}{\int_{-g/2}^{\infty} \exp \left[-x^2 \right] dx}$$



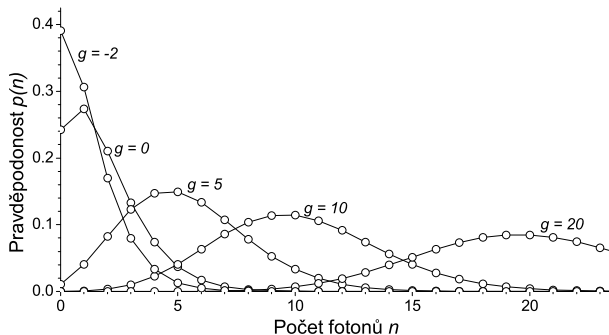
Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- ▶ S využitím fotodetekční rovnice je možné na základě distribuční funkce najít příslušné pravděpodobnostní rozdělení počtu fotonů pro jednomódový laser $p(n)$ – fotopulzní statistika laseru:

$$p(n) = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{w^{n+1}}{n!} \exp \left[- (w - g)^2 / 4 - w \right] dw,$$

kde $\mathcal{N}$ je normovací konstanta volená tak, aby platilo $\sum_n p(n) = 1$.

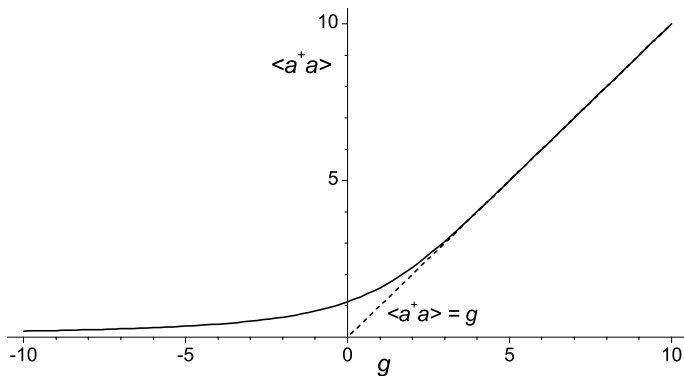
- ▶ Jedná se o sub-Poissonovou (tepelnou) nebo super-Poissonovou (koherentní) statistikou.



Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Střední hodnota počtu fotonů:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int_0^\infty r^2 p_s(r) r dr = \frac{\int_{-g/2}^\infty (g + 2x) \exp[-x^2] dx}{\int_{-g/2}^\infty \exp[-x^2] dx}$$



- Pro $g \gg 0$ $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \approx g$.

Obečné řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Předpokládáme obecné řešení F-P rovnice ve tvaru řady:

$$p(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} p_{mn}(r) \exp(in\varphi) \exp(-\lambda_{mn}\tau).$$

- Vlastní funkce $p_{mn}(r)$ volíme ve tvaru:

$$p_{mn}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left[-\frac{r^4}{8} + \frac{gr^4}{4} \right] \Psi_{mn}(r),$$

- Po dosazení do F-P rovnice dostaneme pro neznámé vlastní funkce $\Psi_{mn}(r)$ diferenciální rovnice:

$$\frac{d^2 \Psi_{mn}(r)}{dr^2} + [\lambda_{mn} - V_n(r)] \Psi_{mn}(r) = 0,$$

kde pro „potenciál“ $V_n(r)$ platí:

$$V_n(r) = \left(g^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} + g + \left(\frac{g^2}{4} - 2 \right) r^2 - \frac{1}{2} gr^4 + \frac{r^6}{4}.$$

- Jedná se o jednorozměrnou Schrödingerovu rovnici s potenciální energií $V_n(r)$, kterou lze již dále řešit známými postupy.

- Postupně jsme eliminovali jednotlivé proměnné ve Fokkerově-Planckově rovnici až na pole:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [g - |\beta|^2] \beta - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [g - |\beta|^2] \beta^* + 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \right\} P$$

- Tato F-P rovnice pro Van der Polův oscilátor byla odvozena za následujících předpokladů:

1. Dolní hladina laserového přechodu je prázdná ($N_1 = 0$);
2. Polarizace prostředí relaxuje rychle oproti relaxaci horní laserové hladiny a fotonům v rezonátoru;
3. Kvantové soustavy, záření i rezonátor jsou v rezonanci;
4. Platí, že $\mathcal{K}/2\Gamma_{12} \ll 1$ (plynové lasery);
5. Fotony v rezonátoru relaxují pomaleji než populace horní laserové hladiny;
6. Linearizovaný driftový člen F-P rovnice (řešení blízko prahu).

Důležité pojmy a vztahy, které je třeba znát a rozumět jim

Liouvillova rovnice • řídicí rovnice • markovovská aproximace • Pauliho rovnice • tlumení a Lambův posuv • poloklasický model interakce rezonančního záření s látkou • dvouhladinový model rezonančního prostředí • rovnice pro odezvu rezonančního prostředí • relaxační doby polarizace a inverze populace hladin • komplexní susceptibilita • disperzní vlastnosti rezonančního prostředí • zesílení slabého signálu • zesílení a součinitel zesílení • účinný průřez pro stimulovanou emisi (absorpci) • spektrální závislost zesílení (absorpce) • homogenní a nehomogenní rozšíření spektrální čáry • přitahování frekvencí • saturace zesílení (absorpce) a saturační intenzita • šíření optických impulzů rezonančním prostředím • rychlostní rovnice pro popis laseru s krátkým rezonátorem • čerpací rychlost, absorpce, spontánní emise a stimulovaná emise v rychlostních rovnicích • doba života fotonu v rezonátoru a doba oběhu fotonu rezonátorem • výstupní charakteristika kontinuálně pracujícího laseru (práh, strmost, prahová podmínka) • popis přechodového jevu v režimu volné generace • popis režimu Q-spínání (tvar impulzu, mezní délka impulzu) • generace krátkých impulzů v režimu synchronizace módů • pásmově limitovaný impulz • ASE (vznik a využití) • koherentní šíření • plocha impulzu • Rabiova frekvence • soliton a samoindukovná propustnost • plně kvantový model laseru • kvazidistribuční funkce • Fokkerova-Plankova rovnice • Van der Polův oscilátor

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  KVASIL, B.: *Teoretické základy kvantové elektroniky*, Academia, Praha, 1983
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>