

# Fyzika laserových generátorů

## Kvazi-3-hladinový model aktivního prostředí

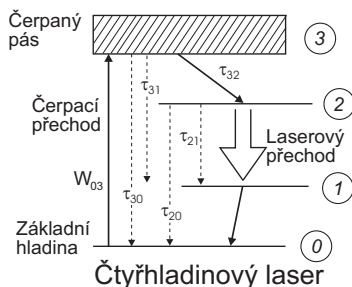
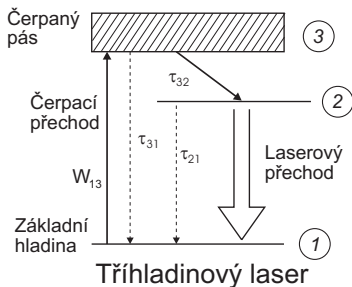
Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky  
České vysoké učení technické  
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

25. března 2021

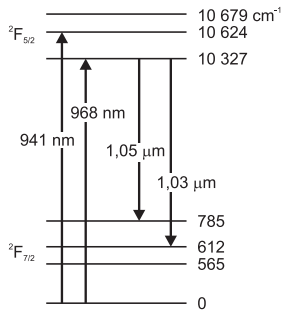
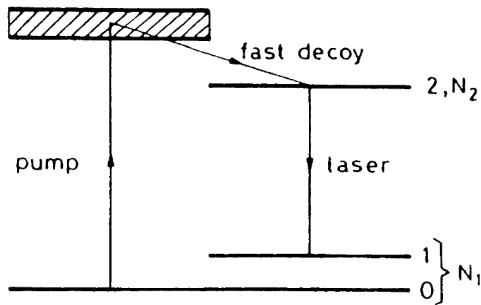
## 3-hladinový a 4-hladinový model aktivního prostředí

- Schéma optického čerpání pevnolátkových laserů



- Pro činnost laseru mají zásadní význam dvě hladiny: excitovaná horní laserová úroveň ② a spodní laserová úroveň ①.

# Kvazi-3-hladinový model aktivního prostředí



- ▶ Dolní laserová hladina částečně populovaná
- ▶ Boltzmanovo rozdělení

$$\frac{N_{11}}{N_{10}} = e^{-\frac{E_{11} - E_{10}}{kT}}$$

- ▶ Tepelná energie  $T = 300 \text{ K} \leftrightarrow kT = 26 \text{ meV} \leftrightarrow kT = 210 \text{ cm}^{-1}$ ,  
( $-\ln(0,1) \doteq 2,3$ )
- ▶  $\text{Yb}^{3+}$  @  $1 \mu\text{m}$ ,  $\text{Er}^{3+}$  @  $1,5 \mu\text{m}$ ,  $\text{Tm}^{3+}$  @  $2 \mu\text{m}$ ,  $\text{Ho}^{3+}$  @  $2,1 \mu\text{m}$ ...

## Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega}NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c\sigma NI - \frac{I}{\tau_c}$$

- $N$  hustota inverze populace hladin v aktivním prostředí
- $I$  intenzita záření v rezonátoru
- $W$  čerpací rychlost (rychlost excitací horní laserové hladiny vlivem čerpání)
- $\sigma$  účinný průřez pro stimulovanou emisi
- $\kappa$  faktor redukce inverze populace hladin
- $\tau_{21}$  doba života kvantové soustavy na horní laserové hladině
- $\tau_c$  doba života fotonu v rezonátoru
- $\mu$  koeficient zaplnění rezonátoru aktivním prostředím
- $c$  rychlost světla v aktivním prostředí
- $\omega$  úhlová frekvence laserového záření

# Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega}NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c\sigma NI - \frac{I}{\tau_c}$$

$$\kappa = \begin{cases} 1 + \frac{g_2}{g_1}, & 3 - \text{hladinový systém, } g_i \text{ je degenerace } i - \text{té hladiny} \\ 1, & 4 - \text{hladinový systém} \end{cases}$$

$$N = N_2 - (\kappa - 1)N_1$$

$$\mu = \frac{\text{optická délka aktivního prostředí}}{\text{optická délka rezonátoru}} = \frac{L_{ap}n_{ap}}{L_r + L_{ap}(n_{ap} - 1)}$$

$$\tau_c = \frac{\tau_R}{L - \ln R}$$

- $L_r$  a  $L_{ap}$  délka rezonátoru a aktivního prostředí  
 $n_{ap}$  index lomu aktivního prostředí  
 $\tau_R$  doba oběhu rezonátoru  
 $R$  reflexivita výstupního zrcadla rezonátoru  
 $L$  další ztráty rezonátoru (absorpce optických prvků, difrakční ztráty, ...)

- ▶ Uvažujeme aktivní prostředí jehož dolní a horní laserová hladina je tvořena pásem podhladin. V rámci přechodů mezi těmito pásy dochází jak k čerpání, tak laserové emisi.
  - ▶ Frekvence čerpacího záření  $\omega_p$ , frekvence laserové emise  $\omega_e$
  - ▶ Hustota toku fotonů v aktivním prostředí pro čerpací záření a laserovou emisi na uvedených frekvencích je  $F_p$  a  $F_e$
  - ▶ Celková hustota populace dolního a horního pásu hladin je  $n_1$  a  $n_2$
  - ▶ Celková hustota aktivních kvantových soustav je  $n_t = n_1 + n_2$
  - ▶ Efektivní účinný průřez pro absorpci a emisi na frekvenci  $\omega$  je  $\sigma_a(\omega)$  a  $\sigma_e(\omega)$
  - ▶ Doba života na pásu spojeném s horní hladinou laserového přechodu je  $\tau_f$
- ▶ Populaci pásů hladin  $n_1$  a  $n_2$  udávají rychlostní rovnice:

$$\frac{dn_1}{dt} = \left( \sigma_e(\omega_p)n_2 - \sigma_a(\omega_p)n_1 \right) F_p + \left( \sigma_e(\omega_e)n_2 - \sigma_a(\omega_e)n_1 \right) F_e + \frac{n_2}{\tau_f} \quad (1)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = - \left( \sigma_e(\omega_p)n_2 - \sigma_a(\omega_p)n_1 \right) F_p - \left( \sigma_e(\omega_e)n_2 - \sigma_a(\omega_e)n_1 \right) F_e - \frac{n_2}{\tau_f} \quad (2)$$

- ▶ Vztah mezi efektivními účinnými průřezy na dané frekvenci udává princip reciprocity ( $\hbar\mu$  je „volná energie“):

$$\sigma_a(\omega) = \sigma_e(\omega) \exp[\hbar(\omega - \mu)/kT] = \sigma_e(\omega)f^+(\omega) \quad (3)$$

$$\sigma_e(\omega) = \sigma_a(\omega) \exp[-\hbar(\omega - \mu)/kT] = \sigma_a(\omega)f^-(\omega) \quad (4)$$

- ▶ Zavedeme inverzi populace hladin jako:

$$n(\omega_e) = n_2 - f^+(\omega_e)n_1 \quad (5)$$

tak aby  $g(\omega_e) = \sigma_e(\omega_e)n(\omega_e)$  odpovídalo efektivnímu součiniteli zesílení na frekvenci  $\omega_e$

- ▶ Pomocí  $n(\omega_e)$  a  $n_t$  si vyjádříme  $n_{1,2}$  a vyloučíme je z rovnic (1), (2).

$$n_1 = \frac{n_t - n(\omega_e)}{1 + f^+(\omega_e)}, \quad n_2 = \frac{f^+(\omega_e)n_t + n(\omega_e)}{1 + f^+(\omega_e)} \quad (6)$$

- ▶ Dostaneme rovnici pro inverzi ( $f^+ = f^+(\omega_e)$ ,  $f^- = f^-(\omega_p)$ )

$$\frac{dn}{dt} = -\sigma_a \left( n_t [f^- f^+ - 1] + n [f^- + 1] \right) F_p - \frac{f^+ n_t + n}{\tau_f} - (f^+ + 1) \sigma_e n F_e \quad (7)$$

- ▶ Zavedeme relativní inverzi populace hladin  $y = n(\omega_e)/n_t$

$$\frac{dy}{dt} = \sigma_a \left( [1 - f^- f^+] - y [1 + f^-] \right) F_p - \frac{f^+ + y}{\tau_f} - (f^+ + 1) \sigma_e y F_e \quad (8)$$

- ▶ Laser negeneruje ( $F_e = 0$ ), čerpání jde na inverzi:

$$y^S = \frac{\sigma_a F_p \tau_f (1 - f^- f^+) - f^+}{\sigma_a F_p \tau_f (f^- + 1) + 1} \quad (f^- f^+ = \exp[-\hbar(\omega_p - \omega_e)/kT]) \quad (9)$$

- ▶  $F_p^S$  nad prahem, laser generuje:

$$F_e = \frac{\sigma_a}{\sigma_e} \frac{1 - f^+ f^- - y(f^- + 1)}{y(f^+ + 1)} \left( F_p - \frac{1}{\tau_f \sigma_a} \frac{y + f^+}{1 - f^+ f^- - y(f^- + 1)} \right) \quad (10)$$

- ▶ Prahová inverze z rovnice pro fotony ( $T = 1 - R$ ):

$$\frac{dF_e}{dt} = c\mu\sigma_e n F_e - \frac{F_e}{\tau_c} \Rightarrow y = \frac{1}{c\mu\sigma_e \tau_c n_t} = \frac{L + T}{2l_{ap}\sigma_e n_t} \quad (11)$$

4-h systém ( $f^+ \approx 0, f^- \approx 0, y \ll 1$ )

3-h systém ( $f^+ \approx 1, f^- \approx 0, y \sim 1$ )

$$F_e = \frac{\sigma_a}{\sigma_e} \frac{1}{y} \left( F_p - \frac{y}{\tau_f \sigma_a} \right)$$

$$F_e = \frac{\sigma_a}{\sigma_e} \frac{1 - y}{2y} \left( F_p - \frac{1}{\tau_f \sigma_a} \frac{1 + y}{1 - y} \right)$$

$$I_{\text{out}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \frac{T}{L + T} \left( \underbrace{l_p l_{ap} \sigma_a n_t}_{l_{\text{abs}}} - \frac{L + T}{2} \frac{h\nu_p}{\tau_f \sigma_e} \right)$$

$$I_{\text{out}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \frac{T}{L + T} \frac{2l_{ap}\sigma_a n_t - L - T}{4} \times$$

Platí dobře jen pro malou absorpci  
( $l\sigma_a n_t \ll 1$ )

$$\times \left( l_p - \frac{h\nu_p}{\tau_f \sigma_a} \frac{2l_{ap}\sigma_e n_t + L + T}{2l_{ap}\sigma_e n_t - L - T} \right)$$



## Absorpce podélného čerpání

- ▶ Při podélném čerpání se čerpací zařízení postupně absorbuje a inverze se mění podél osy laserové tyče.
- ▶ Ustálený lokální absorpční koeficient (bez laserové emise)

$$\alpha(\omega_p) = \frac{n_t \sigma_a(\omega_p)}{\sigma_a(\omega_p) F_p \tau_f (1 + f^-(\omega_p)) + 1}$$

- ▶ Zavedeme saturační intenzitu pro čerpací zařízení:

$$I_{sp}(\omega_p) = \frac{\hbar \omega_p}{\tau_f \sigma_a(\omega_p) (1 + f^-(\omega_p))}$$

- ▶ Normalizujeme intenzitu čerpání  $I_p = \hbar \omega_p F_p$  vzhledem k  $I_{sp}(\omega_p)$ , tj.  $i_p = I_p / I_{sp}(\omega_p)$
- ▶ Normalizujeme ještě vzdálenosti  $z' = \alpha_{p0} z$  kde  $\alpha_{p0} = n_t \sigma_a(\omega_p)$

$$\frac{di_p}{dz'} = -\frac{i_p}{1 + i_p} \quad \text{a} \quad y^S = \frac{i_p(1 - f^- f^+) / (1 + f^-) - f^+}{i_p + 1}$$

- ▶ Řešení rovnice šíření:

$$i_p(z') = \text{LambertW}[i_p(0) \exp(i_p(0) - z')] ]$$

- ▶ Ze znalosti  $i_p(z')$  vypočtu lokální zisk a integrací přes celou laserovou tyč dostanu celkové zesílení

## Zesílení a optimální délka laserové tyče (bez laserové emise)

- ▶ Zesílení laserové tyče (bez emise laseru)

$$\ln(G_0(l', i_p(0))) = \gamma \left( \frac{(1 + f^+)(i_p(0) - i_p(l'))}{f^+(1 + f^-)} - l' \right) \quad \text{kde} \quad \gamma = \frac{\sigma_a(\omega_e)}{\sigma_a(\omega_p)}$$

- ▶ Maximum zesílení (minimální práh) pro dané čerpání nastane pro délku tyče

$$l'_{max} = i_p(0) + \ln i_p(0) - i_p(l'_{max}) - \ln i_p(l'_{max}) \quad \text{kde} \quad i_p(l'_{max}) = \frac{f^+(1 + f^-)}{1 - f^- f^+}$$

- ▶ To odpovídá situaci, kdy při ideálně dlouhé laserové tyči zajišťuje čerpání na jejím konci hodnotu inverze  $y^S \equiv 0$
- ▶ Maximální dosažitelné zesílení:

$$G_0^{max}(i_p(0)) = \left( \frac{i_p(l'_{max})}{i_p(0)} \right)^\gamma \exp \left[ \gamma \left\{ \frac{i_p(0)}{i_p(l'_{max})} - 1 \right\} \right].$$

- ▶ Čerpání potřebné pro dané zesílení

$$i_p(0) = \frac{f^+(1 + f^-)}{\gamma(1 + f^+)} \frac{\ln G + \gamma l_{ap} \alpha_{p0}}{1 - \exp \left[ \frac{f^+(1 + f^-)}{\gamma(1 + f^+)} \ln G - l_{ap} \alpha_{p0} \frac{1 - f^+ f^-}{1 + f^+} \right]}$$

- ▶ Laserování depopuluje horní laserovou hladinu a efektivně působí jako zkracování doby života a růst saturace
- ▶ Saturační intenzita pro emisi laseru ( $i_e = I_e/I_{se}(\omega_e)$ ):

$$I_{se} = \frac{\hbar\omega_e}{\tau_f\sigma_e(\omega_e)(1 + f^+(\omega_e))} = \frac{\hbar\omega_e}{\tau_f\sigma_a(\omega_e)(1 + f^-(\omega_e))} \quad (12)$$

- ▶ Nový tvar rovnice pro absorpci čerpání:

$$\frac{di_p(z)}{dz} = -\alpha_{p0} \frac{i_e(1 - f^-f^+)/(1 + f^+) + 1}{1 + i_e + i_p(z)} i_p(z)$$

- ▶ Zavedením substituce  $z' = z\alpha_{p0}(i_e(1 - f^-f^+)/(1 + f^+) + 1)/(1 + i_e) = z\alpha'_{p0}$  a  $i'_p = i_p(z)/(1 + i_e)$  dostaneme stejnou rovnici, jako pro  $i_e = 0$ :

$$\frac{di'_p}{dz'} = -\frac{i'_p}{1 + i'_p}$$

Předpokládáme, že  $i_e$  není funkce  $z$  – malé zesílení + průchod oběma směry (poměr intenzit součtu laserového záření v obou směrech na konci laserové tyče je  $0,5(G + 1/G) = 0,5(\sqrt{R} + 1/\sqrt{R})$ ).

- ▶ Z rovnice pro čerpání pro dosažení daného zisku při dané hodnotě laserování

$$i_p(0) = \frac{f^+(1+f^-)}{\gamma(1+f^+)} \frac{(1+i_e) \ln G + \gamma I_{ap} \alpha_{p0}}{1 - \exp \left[ \frac{f^+(1+f^-)}{\gamma(1+f^+)} \ln G - \frac{I_{ap} \alpha_{p0}}{1+i_e} \frac{1-f^+f^-}{1+f^+} \right]}$$

- ▶ Hodnota potřebného zesílení  $G$  je dána prahovou podmínkou, např.  $G = 1/\sqrt{R}$ .
- ▶ Intenzita  $i_e$  je střední normovaná intenzita uvnitř aktivního prostředí. Uvážíme-li odrazivost výstupního zrcadla a částečný vliv vnitřních ztrát laserového rezonátoru  $L$ , dostaneme pro  $i_e$  vztah:

$$i_e = i_{out} (1 + L/4) \frac{1 + R}{1 - R} \sim i_{out} \frac{1 + R}{1 - R}$$

- ▶ Rovnice vypočte potřebné čerpání pro daný výstup s daným zrcadlem.

- ▶ Při správně zvolené substituci mají rychlosti rovnice pořád stejný tvar

-  RICHARD C. POWELL: *Physics of solid-state laser materials*, Springer-Verlag, 1998
-  BRIAN HENDERSON AND RALPH H. BARTRAM: *Crystal-field engineering of solid-state laser materials*, Cambridge University Press, 2000
-  YUKITO TANABE AND SATORU SUGANO: *On the absorption spectra of complex ions I., II.*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 9, No. 5, 753–779, 1954
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLT/>