

Fyzika laserových generátorů

Optimalizace laseru v režimu Q-spínání

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fifi.cvut.cz

6. května 2021

- ▶ Generace gigantických impulzů
- ▶ Shrnutí principu a metod
- ▶ Rovnice pro aktivní Q-spínání
 - ▶ Maximalizace špičkové výstupní intenzity
 - ▶ Maximalizace energie impulzu
 - ▶ Minimalizace délky impulzu
- ▶ Rovnice pro pasivní Q-spínání
 - ▶ Typy Q-spínačů
 - ▶ Maximalizace špičkové výstupní intenzity
 - ▶ Maximalizace energie impulzu
 - ▶ Minimalizace délky impulzu

Generace gigantických impulzů

- ▶ Metoda je založena na nahromadění energie v excitovaných stavech aktivního prostředí (na horní hladině laserového přechodu) a na jejím následném lavinovitě uvolnění v podobě světla procesem stimulované emise v impulzu srovnatelné délky jako je doba života fotonu v rezonátoru
 - ▶ Pro nahromadění velkého množství energie je potřeba materiál s dlouhou dobou života a s velkou saturační energií (aby se málo projevila ASE).
 - ▶ Dále je nezbytné zabránit rozvoji laserových oscilací pro malou úroveň inverze – řídí se Q – činitel jakosti oscilátoru
 - ▶ Ztráty je potřeba modulovat rychle – srovnatelně s dobou oběhu fotonu rezonátorem
 - ▶ Příklad: Yb:YAG – doba akumulace energie $\tau_f \sim 1$ ms, čerpací výkon P_{in} , doba života fotonu v rezonátoru $\tau_c \sim 10$ ns, výstupní výkon $P_{out} = P_{in}\tau_f/\tau_c \sim 10^5 P_{in}$
- ▶ **Robert W. Hellwarth 1961** (rubín, Kerrova cela – nitrobenzen, 120 ns, 600 kW)

with the reflection of the electric field applied, the apparatus exhibited normal maser operation when the exciting lamp was flashed above a certain threshold. The output maser light was observed to be plane polarized

switched off in a time less than 0.2 μ sec and the adjustment of the maser population excess to some new (lower)

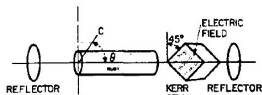


FIG. 1. Schematic diagram of the pulsed reflector laser.

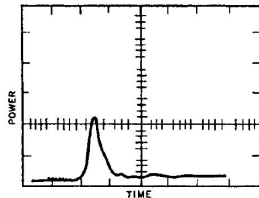


FIG. 2. Output from the maser after switching the shutter. The time calibration is 0.2 μ sec/cm. The timing signal for the shutter switch appears as the beginning of the small oscillation on the trace before the output pulse.

* This work was supported in part by the Aeronautical Systems Division, Air Force Systems Command.

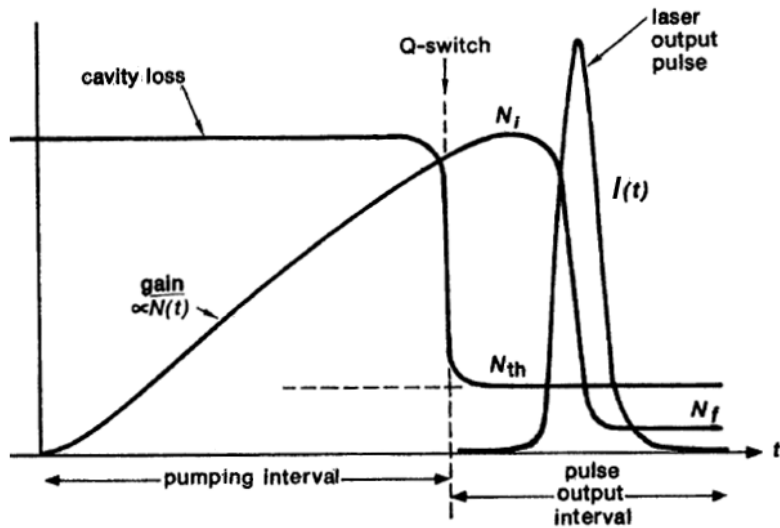
¹ R. W. Hellwarth, Second Conference on Quantum Electronics, Berkeley, California, 1961 [to be published in *Advances in Quantum Electronics* (Columbia University Press, New York, 1961)].

² R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schawlow, W. Bond, C. G. B. Garrett, and W. Kaiser, *Phys. Rev. Letters* 5, 303 (1960).



Bob died Jan. 20, 2021, of complications of COVID-19 in Santa Monica, Calif. He was 90. By Princeton Alumni Weekly

Vybudování Q-spínaného impulsu



Analytické řešení rychlostních rovnic pro Q-spínaný laser

- ▶ Normovaný tvar rychlostních rovnic

$$\frac{d\mathcal{I}}{dT} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{I}; \quad \frac{d\mathcal{N}}{dT} = \eta \left[\mathcal{W} - \mathcal{N} - (\mathcal{W} - 1)\mathcal{I}\mathcal{N} \right]$$

- ▶ Proces generace Q-spínaného impulsu probíhá během doby srovnatelné s dobou života fotonu v laserovém oscilátoru
- ▶ Během této doby dojde pouze k nepatrné změně inverze populace hladin v důsledku čerpání a fluorescence ve srovnání s vlivem způsobeným prudkým nárůstem intenzity a proto budou při analytickém řešení tyto změny zanedbány

$$\frac{d\mathcal{I}}{dT} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{I}$$

$$\frac{d\mathcal{N}}{dT} = -\xi\mathcal{I}\mathcal{N}$$

kde

$$\xi = \eta(\mathcal{W} - 1)$$

- ▶ Zavedeme novou funkci pro intenzitu ve tvaru

$$\mathcal{J} = \xi\mathcal{I}$$

Analytické řešení rychlostních rovnic pro Q-spínaný laser

- ... dostaneme rychlostní rovnice, jejich řešení je závislé pouze na počátečním stupni inverze:

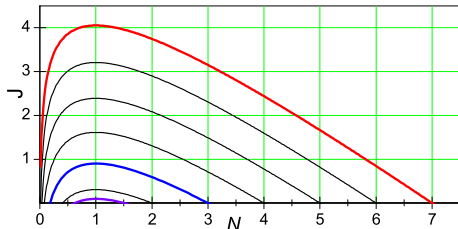
$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathcal{T}} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{J}, \quad \frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{T}} = -\mathcal{J}\mathcal{N}$$

- Po vyloučení normovaného času \mathcal{T} dostaneme:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathcal{N}} = -\frac{\mathcal{N} - 1}{\mathcal{N}}$$

- Separujeme proměnné a řešíme za předpokladu, že na počátku je inverze populace \mathcal{N}_i a hustota fotonů $\mathcal{J} = 0$:

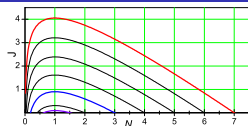
$$\int_0^{\mathcal{J}} d\mathcal{J} = \int_{\mathcal{N}_i}^{\mathcal{N}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} - 1 \right) d\mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{J} = \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$



Špičková intenzita Q-spínaného impulsu

- Využijeme vztah mezi intenzitou a inverzí:

$$\mathcal{J} = \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$



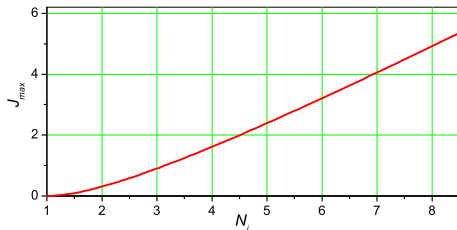
- Dosazením $\mathcal{N} = 1$, kdy $d\mathcal{J}/d\mathcal{T} = 0$, dostaneme špičkovou intenzitu \mathcal{J}_{max} Q-spínaného impulsu:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathcal{T}} = (\mathcal{N} - 1) \mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{J}_{max} = \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1$$

- Po odnormování dostaneme pro maximální výstupní intenzitu (pro $R \approx 1$):

$$I_{max} \doteq \mathcal{J}_{max} \frac{1 - R E_s}{2 \tau_c}$$

kde $E_s = \hbar\omega_{21}/\kappa\sigma_{21}$ je saturační hustota energie (parametr aktivního prostředí)



Maximalizace špičková intenzity Q-spínaného impulsu

- ▶ Pro špičkovou intenzitu máme:

$$I_{max} \doteq \frac{1-R}{2} \frac{E_s}{\tau_c} (\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1) \doteq \frac{E_s}{2t_r} \ln(1/R) (L - \ln R) (\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1)$$

- ▶ Přitom

$$\mathcal{N}_i = \frac{n_i}{n_t} = \frac{2L_{ap}\sigma n_i}{L - \ln R} = \frac{2 \ln G}{L - \ln R} \quad \text{a tedy} \quad \ln(1/R) = \frac{2 \ln G}{\mathcal{N}_i} - L$$

- ▶ Tedy:

$$I_{max} \doteq \frac{E_s}{2t_r} \frac{2 \ln G}{\mathcal{N}_i} \left(\frac{2 \ln G}{\mathcal{N}_i} - L \right) (\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1)$$

- ▶ Extrém této funkce se dá najít pouze numericky pro dané hodnoty G a L . Pokud ale lze položit $L = 0$, lze najít řešení nezávislé na G , kdy $\mathcal{N}_{iopt} = 3,51286\dots$
- ▶ Potom $R_{opt} = G^{-2/\mathcal{N}_{iopt}} \doteq G^{-0.569}$
- ▶ Maximální intenzita:

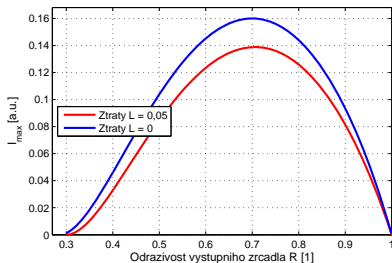
$$I_{max} \doteq 0,2 \ln^2 G \frac{E_s}{t_r}$$

Maximalizace špičkové intenzity Q-spínaného impulsu – příklad

- ▶ Minimální odrazivost výstupního zrcadla, při které je s daným čerpáním dosaženo prahu generace R_{min}
- ▶ Odpovídající zisk aktivního prostředí z prahové podmínky $G = \sqrt{\exp(L)/R_{min}}$
- ▶ Pasivní (jalové) ztráty:

$$L = 2L_{ap}\alpha + \ln \left[\frac{1}{R' \prod_i T_i^2} \right] \sim 2L_{ap}\alpha + 1 - R' + 2 \sum_i (1 - T_i)$$

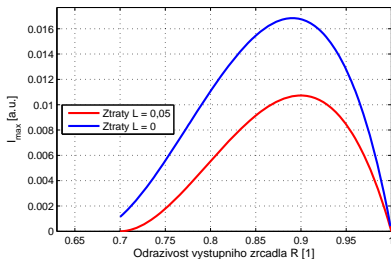
$R_{min} = 30\%$, $L = 0,05$, $G = 1,872$



$$R_{opt}(L = 0) = 70\%$$

$$R_{opt}(L = 0,05) = 70,6\%$$

$R_{min} = 70\%$, $L = 0,05$, $G = 1,225$

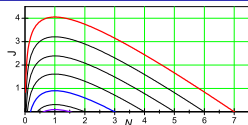


$$R_{opt}(L = 0) = 89,1\%$$

$$R_{opt}(L = 0,05) = 90\%$$

- Využijeme vztah mezi intenzitou a inverzí:

$$\mathcal{J} = \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$

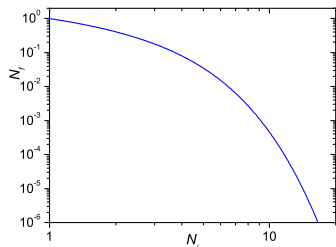
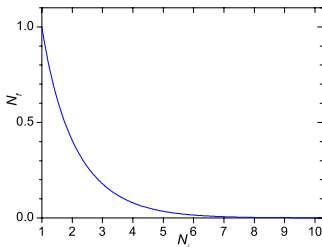


- Určíme hodnotu inverze populace hladin \mathcal{N}_f , která se ustálí po vygenerování Q-spínaného impulsu, kdy je opět $\mathcal{J} = 0$. Tehdy:

$$0 = \ln \mathcal{N}_f - \mathcal{N}_f + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$

- ... a tedy:¹

$$\mathcal{N}_f = -\text{LambertW}\left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i}\right)$$



¹Funkce $W(x) = \text{LambertW}(x)$ je definována jako řešení transcendentní rovnice $W(x) \exp [W(x)] = x$.

- ▶ Celková normovaná energie v impulsu:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{J} dT = \left\{ \frac{d\mathcal{N}}{dT} = -\mathcal{J}\mathcal{N} \right\} = - \int_0^\infty \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{dT} dT = - \int_{\mathcal{N}_i}^{\mathcal{N}_f} \frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = \ln \frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}_f}$$

- ▶ ... nebo-li ($0 = \ln \mathcal{N}_f - \mathcal{N}_f + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i \Rightarrow \ln(\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_f) = \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f$)

$$\mathcal{E} = \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f$$

- ▶ Odnormování (pro $R \approx 1$):

$$E = \frac{1-R}{2} SE_s (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f)$$

- ▶ kde S je plocha laserového svazku, E_s je saturační hustota energie:

$$E_s = \frac{\hbar\omega_{21}}{\kappa\sigma_{21}}$$

- ▶ Součin SE_s udává maximální extrahovatelnou energii, která je tím vyšší, čím je menší účinný průřez pro stimulovanou emisi.
- ▶ Energie zjevně nezáleží na délce aktivního prostředí L_{ap} . Je však nutné s daným σ_{21} a \mathcal{N}_i dosáhnout prahu generace ($1 \leq R \exp[2\sigma_{21} N_i L_{ap}]$).

Maximalizace energie Q-spínaného impulsu

- Pro energii Q-spínaného impulsu máme (pro $R \approx 1$):

$$E = \frac{\ln(1/R)}{2} SE_s \left(\mathcal{N}_i + \text{LambertW} \left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i} \right) \right)$$

- Dosadíme za $\ln(1/R) = L(z/\mathcal{N}_i - 1)$, kde $z = 2 \ln(G)/L$:

$$E = \frac{SE_s}{2} L \left(\frac{z}{\mathcal{N}_i} - 1 \right) \left(\mathcal{N}_i + \text{LambertW} \left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i} \right) \right)$$

- Hledání extrému klasickou cestou vede na řešení:

$$\mathcal{N}_{i\text{opt}} = \frac{z \ln z}{z - 1}$$

- Potom:

$$R_{\text{opt}}(z) = G^{-2 \frac{z - \ln z - 1}{z \ln z}} \quad \text{a} \quad \mathcal{N}_{i\text{opt}} - \mathcal{N}_{f\text{opt}} = \ln z$$

- Optimální energie pak bude:

$$E_{\text{opt}}(z) = \frac{\hbar \omega_{21} n_i V}{\kappa} \frac{z - \ln z - 1}{z},$$

kde $V = SL_{ap}$ je objem aktivního prostředí, kterým prochází laserový svazek.

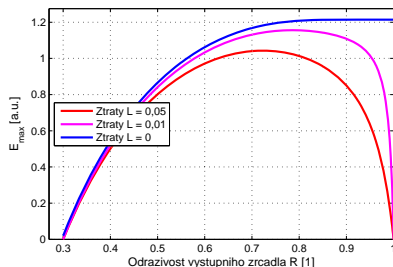
- Limita, kdy $L \rightarrow 0$ a tedy $z \rightarrow \infty$ bude:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_{\text{opt}}(z) = \frac{\hbar \omega_{21} n_i V}{\kappa} \quad \text{a} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R_{\text{opt}}(z) = 1$$

Maximalizace energie Q-spínaného impulsu – příklad

$R_{min} = 30\%$

- ▶ $L = 0,05$, $G = 1,872$, $z = 25,1$
- ▶ $L = 0,01$, $G = 1,835$, $z = 121,4$
- ▶ $L = 0,00$, $G = 1,826$, $z = \infty$



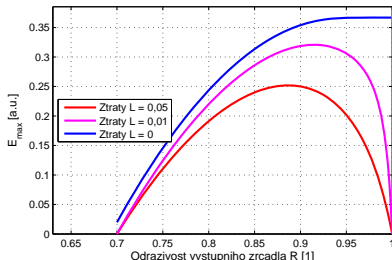
$$R_{opt}(L = 0,05) = 72,4\%$$

$$R_{opt}(L = 0,01) = 78,6\%$$

$$R_{opt}(L = 0,00) = 100\%$$

$R_{min} = 70\%$

- ▶ $L = 0,05$, $G = 1,226$, $z = 8,1$
- ▶ $L = 0,01$, $G = 1,201$, $z = 36,7$
- ▶ $L = 0,00$, $G = 1,195$, $z = \infty$



$$R_{opt}(L = 0,05) = 88,7\%$$

$$R_{opt}(L = 0,01) = 91,5\%$$

$$R_{opt}(L = 0,00) = 100\%$$

Doba trvání Q-spínaného impulsu

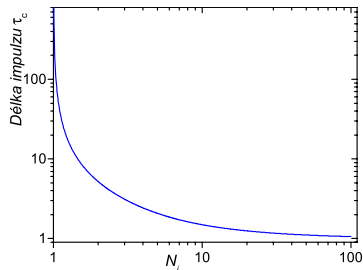
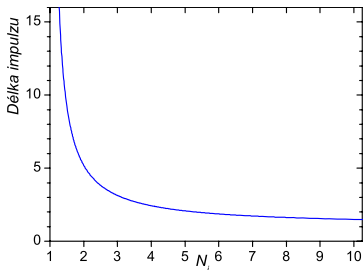
- ▶ Odhad doby trvání impulsu:

$$T_{imp} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}_{max}} = \frac{\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f}{\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1} \rightarrow 1 \quad \text{pro } \mathcal{N}_i \rightarrow \infty$$

- ▶ Oddnormování:

$$T_{imp} = \tau_c \mathcal{T}_{imp}$$

- ▶ Nejkratší impuls bude mít dobu trvání τ_c .
- ▶ Délka impulsu v tomto přiblížení nezávisí na vlastnostech aktivního prostředí (kromě jeho vlivu na τ_c), jen na parametrech rezonátoru a dosažitelné relativní inverzi populace hladin.



Minimalizace doby trvání Q-spínaného impulsu

- ▶ Pro délku impulsu máme:

$$T_{imp} = \frac{t_r}{L - \ln R} \frac{\mathcal{N}_i + \text{LambertW}\left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i}\right)}{\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1}$$

- ▶ Dosadíme za $L - \ln R = \frac{2 \ln G}{\mathcal{N}_i}$:

$$T_{imp} = \frac{\mathcal{N}_i + \text{LambertW}\left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i}\right)}{\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1} \mathcal{N}_i \frac{t_r}{2 \ln G}$$

- ▶ Provedeme optimalizaci a dostaneme $\mathcal{N}_{i\text{opt}} = 3,004507994 \dots$ a $\mathcal{N}_{f\text{opt}} = 0,1779085514 \dots$

$$R_{\text{opt}} = \exp(L) G^{-2/\mathcal{N}_{i\text{opt}}} \doteq (1 + L) G^{-0,6656}$$

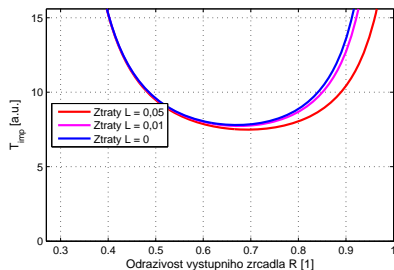
- ▶ Optimalizovaná délka impulsu

$$T_{imp} = 9,390 \frac{t_r}{2 \ln G} = 3,125 \tau_c$$

Minimalizace doby trvání Q-spínaného impulsu – příklad

$R_{min} = 30\%$

- ▶ $L = 0,05$, $G = 1,872$, $z = 25,1$
- ▶ $L = 0,01$, $G = 1,835$, $z = 121,4$
- ▶ $L = 0,00$, $G = 1,826$, $z = \infty$



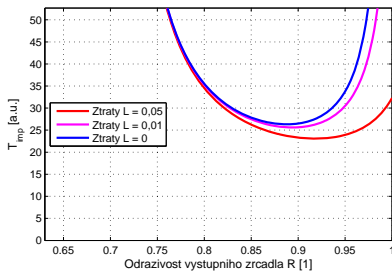
$$R_{opt}(L = 0,05) = 69,3\%$$

$$R_{opt}(L = 0,01) = 67,4\%$$

$$R_{opt}(L = 0,00) = 67,0\%$$

$R_{min} = 70\%$

- ▶ $L = 0,05$, $G = 1,226$
- ▶ $L = 0,01$, $G = 1,201$
- ▶ $L = 0,00$, $G = 1,195$



$$R_{opt}(L = 0,05) = 91,8\%$$

$$R_{opt}(L = 0,01) = 89,4\%$$

$$R_{opt}(L = 0,00) = 88,8\%$$

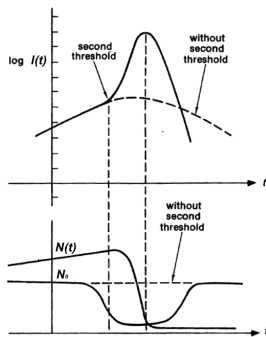
Q-spínání saturevatelným absorbérem

- ▶ Saturevatelný absorbér je dvouhladinové médium se širokým absorpčním spektrem, jehož absorpční koeficient β závisí na intenzitě dopadajícího záření obdobně jako zisk zesilujícího prostředí

$$\beta(I) = \frac{\beta_0}{1 + I/I_S^a}$$

- ▶ Transmittance saturevatelného absorbéru tloušťky l_a je dána vztahem:

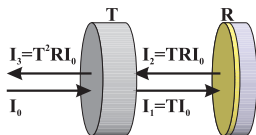
$$T(I) = \exp[-\beta(I)l_a], \quad T_0 \equiv T(0) = \exp[-\beta_0 l_a].$$



- ▶ V okamžiku, kdy by při daných ztrátách způsobených nesaturevaným absorbérem a výstupním zrcadle začal laser generovat v režimu volné generace začne toto záření otvírat absorbér – tzv. „druhý práh“.
- ▶ Během krátké doby může dojít k úplné saturaci absorbéru, takže se prahová hodnota inverze populace hladin sníží tak, jako by absorbér v rezonátoru nebyl přítomen.
- ▶ Rychlost změny transmittance absorbéru závisí na hodnotě saturační intenzity saturevatelného absorbéru.

Q-spínání „dobře“ saturovatelným absorbérem

- ▶ Ideální saturovatelný absorbér (SA) mění svoji transmitanci T od T_0 (nesaturovaný) po 100 % (plně saturovaný)
- ▶ Přítomnost SA v rezonátoru efektivně modifikuje odrazivost výstupního zrcadla a tím i ztráty $\Rightarrow \tau_c \Rightarrow$ práh



- ▶ Pokud zanedbáme přechodový jev spojený se změnou ztrát absorbéru, můžeme snadno odhadnout hodnotu \mathcal{N}_i :

$$\mathcal{N}_i = \frac{N_0(T = T_0)}{N_0(T = 1)} = \frac{\tau_c(T = 1)}{\tau_c(T = T_0)} = \frac{\ln(T_0^2 R)}{\ln(R)} = 1 + \frac{2 \ln T_0}{\ln R}.$$

- ▶ Lze odhadnout délku generovaného impulsu a účinnost extrakce energie
- ▶ V prvním přiblížení nebudou tyto parametry závislé na budící energii ani na použitém typu aktivního prostředí, ale pouze na hodnotě parametrů T_0 a R .
- ▶ Reálný absorbér má ve stavu otevřeno $T < 100\%$.

- ▶ Odhad \mathcal{N}_i :

$$\mathcal{N}_i = 1 + \frac{2 \ln T_0}{\ln R}.$$

- ▶ Generace laseru je omezena maximálním možným čerpáním, kterému odpovídá maximální možný zisk na jeden průchod G .
- ▶ Prahová podmínka laseru pak omezuje maximální hodnotu součinu $RT_0^2 = 1/G^2$ a tak svazuje hodnoty R a T_0 .
- ▶ Pomocí této podmínky vyloučíme z rovnice pro \mathcal{N}_i hodnotu $T_0 = 1/(G\sqrt{R})$. Stále musí platit prahová podmínka že $R > 1/G^2$. Dostaneme:

$$\mathcal{N}_i = 1 - \frac{2 \ln G + \ln R}{\ln R} = \frac{2 \ln G}{\ln(1/R)},$$

což je stejný vztah, jako při aktivním Q-spínání.

- ▶ Optimalizace pak probíhá stejně, jako pro aktivní Q-spínání, kdy vždy dostaneme optimalizovanou hodnotu $\mathcal{N}_{i\text{opt}}$ a R_{opt} .
- ▶ Pomocí prahové podmínky pak vypočteme $T_{0\text{opt}}$

Optimalizace Q-spínání ideálním „dobře“ saturovatelným absorberem

Maximalizace intenzity

$$N_i(I_{max}^{out}) = 1/\nu = 3.512 \dots$$

kde $\nu = 0,284668137 \dots$

$$R_{I_{max}} = G^{-2\nu}$$

$$T_{0I_{max}} = \sqrt{G^{2\nu-2}}$$

$$T_{0I_{max}} = R^{1/2\nu-1/2} = R^{1.2564 \dots}$$

Maximalizace energie

Pokud jsou jalové ztráty $L = 0$, pak je optimum generované energie dosaženo pro $R_{E_{max}} = 1$.

Minimalizace délky

$$N_i(I_{max}^{out}) = 1/\nu \doteq 3$$

kde $\nu = 0,3328332 \dots$

$$R_{T_{min}} = G^{-2\nu}$$




$$T_{0T_{min}} = \sqrt{G^{2\nu-2}}$$

$$T_{0T_{min}} = R^{1/2\nu-1/2} = R^{1.0025 \dots}$$

- ▶ Optimalizovaná hodnota N_i nezávisí na maximálním dosažitelném zisku.
- ▶ Optimální hodnota odrazivosti výstupního zrcadla z hlediska maximálního špičkového výstupního výkonu a nejkratšího generovaného impulzu se tedy neshoduje.
- ▶ Kratší impulzy jsou generovány pro zrcadlo s menší odrazivostí.
- ▶ Jednoduchá optimalizační volba:

$$R \doteq T_0$$

- ▶ V reálném systému je vždy $L > 0$ a $T_e < 100\%$, což vede obecně na složitější řešení. Pak je ale možné optimalizovat i výstupní energii.
- ▶ Pokud je L malé vzhledem k RT_0^2 a $FOM > 5$, pořád je nejjednodušší optimalizační volba $R \doteq T_0$.
- ▶ Aby saturevatelný absorbér pracoval dobře, je krom podmínky kladené na FOM důležité také to, aby saturační energie absorbéro byla mnohem menší, než saturační energie aktivního prostředí.
- ▶ Reálné saturevatelné absorbéry s dlouhou dobou života se dají z hlediska výstupní energie optimalizovat metodou vázaných extrémů.
- ▶ Rychle relaxující absorbéry vyžadují obecně řešení rychlostních rovnic.

-  J. J. Degnan, "Theory of the optimally coupled Q-switched laser," *IEEE Journal of Quantum Electronics* **25**, pp. 214–220, Feb. 1989.
-  J. J. Degnan, "Optimization of the passively Q-switched lasers," *IEEE Journal of Quantum Electronics* **31**, pp. 1890–1901, Nov. 1995.
-  G. Xiao and M. Bass, "A generalized model for passively Q-switched lasers including excited state absorption in the saturable absorber," *IEEE Journal of Quantum Electronics* **33**, pp. 41–44, Jan. 1997.