Laserová technika 2
Aktivní prostředí
Šíření stacionární rovinné vlny v aktivním prostředí

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

16. listopadu 2022

Program přednášek

1. Poloklasická teorie šíření rezonančního záření dvouhladinovým prostředím
2. Šíření stacionární rovinné vlny v aktivním prostředí
3. Šíření optických impulsů v aktivním prostředí
4. Laser v aproximaci rychlostních rovnic
5. Rychlostní rovnice pro Q-spínaný laser
6. Koherentní šíření impulzu a zesílená spontánní emise

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

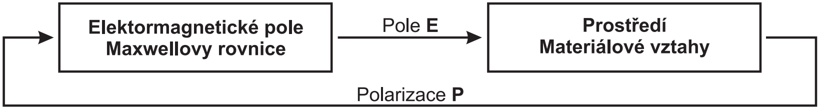
Prostředí – soubor kvantových soustav, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, 3 procesy interakce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor kvantových soustav, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, 3 procesy interakce, změna energie → změna konfigurace → změna dipólového momentu)

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)



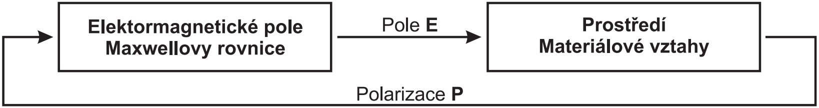
Pole klasicky + prostředí kvantově → poloklasický popis

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor kvantových soustav, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, 3 procesy interakce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)



Pole klasicky + prostředí kvantově $\rightarrow$ poloklasický popis

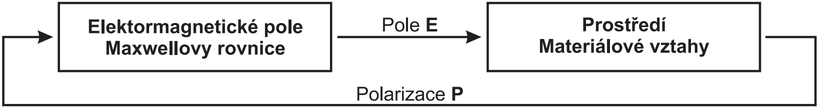
Kvantová soustava – dvouhladinový model, E_1, E_2

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor kvantových soustav, popisuje SR kvantově (diskrétní systém hladin, vlnová funkce, 3 procesy interakce, změna energie $\rightarrow$ změna konfigurace $\rightarrow$ změna dipólového momentu)

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)



Pole klasicky $+$ prostředí kvantově $\rightarrow$ poloklasický popis

Kvantová soustava – dvouhladinový model, E_1, E_2

Rezonanční záření – frekvence v rezonanci s kvantovým přechodem (Bohrův vztah)

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Rovnice poloklasické teorie interakce látky a záření

Polarizace prostředí **P** je zdrojem pole **E**

Elektormagnetické pole - Vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

Pole **E** indukuje polarizaci prostředí **P**

Prostředí - Rovnice pro makroskopickou polarizaci a inverzi populace hladin

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

$\vec{E}$	Elmag. pole	T_1	Relaxace inverze populace hladin
$\vec{P}$	Makroskopická polarizace	T_2	Relaxace makroskopické polarizace
N	Inverze populace hladin	ω_{21}	Rezonanční frekvence
N_0	Inverze populace hladin bez vnějšího pole	$\lvert\vec{d}_{21}\rvert$	Velikost dipólového momentu

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál – monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál – monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí – rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

Stacionární signál – monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí – rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál – monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí – rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

- Fázová rychlost vlny

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{(1+\chi)}}$$

Šíření stacionárních signálů v rezonančním prostředí

Stacionární signál – monochromatické elektromagnetické pole, jehož amplituda i fáze jsou funkcemi jen prostorových souřadnic.

Disperzní prostředí – rychlost šíření záření v tomto prostředí závisí na frekvenci. Disperze bývá popisována závislostí susceptibility χ na kruhové frekvenci ω.

- Homogenní, lineární a isotropní prostředí:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E},$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1+\chi}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

- Fázová rychlost vlny

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{(1+\chi)}}$$

- Index lomu

$$n_{ref} = \sqrt{(1+\chi)}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right] \vec{P} = -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right) \vec{P}$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Uvažujeme šíření stacionárního harmonického signálu s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E_0}(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P_0}(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Uvažujeme šíření stacionárního harmonického signálu s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E}_0$ $\Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}_0$ $\Rightarrow$ $(N - N_0) \propto \vec{E}_0\vec{P}_0 \to 0$, tj. inverze populace hladin N se blíží hodnotě N_0

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Uvažujeme šíření stacionárního harmonického signálu s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E}_0 \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}_0 \Rightarrow$ $(N - N_0) \propto \vec{E}_0\vec{P}_0 \to 0$, tj. inverze populace hladin N se blíží hodnotě N_0
- Odezvu prostředí popisuje linearizovaná rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Výchozí rovnice:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Uvažujeme šíření stacionárního harmonického signálu s kruhovou frekvencí ω ve směru osy z:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \vec{P} = \vec{P}_0(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- Uvažujeme slabý signál $\vec{E}_0 \Rightarrow$ bude malá i polarizace $\vec{P}_0 \Rightarrow$ $(N - N_0) \propto \vec{E}_0\vec{P}_0 \to 0$, tj. inverze populace hladin N se blíží hodnotě N_0
- Odezvu prostředí popisuje linearizovaná rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Provedeme derivace na levé straně ($\partial\vec{P}/\partial t = \mathrm{i}\omega\vec{P}$):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2^2} + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = \left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right]\vec{P}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right] \vec{P} \doteq -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme:

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z,\omega)}{\varepsilon_0 \vec{E}_0(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}}.$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme:

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z,\omega)}{\varepsilon_0 \vec{E}_0(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}}.$$

- Susceptibilita $\chi(\omega)$ – komplexní, frekvenčně závislá veličina

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right] \vec{P} \doteq -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme:

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z,\omega)}{\varepsilon_0 \vec{E}_0(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0} \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}}.$$

- Susceptibilita $\chi(\omega)$ – komplexní, frekvenčně závislá veličina
- T.j. dvouhladinové rezonanční prostředí je disperzní a nelineární.

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right] \vec{P} \doteq -2\omega_{21} \frac{\vec{E}}{\hbar} |\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme:

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}_0(z,\omega)}{\varepsilon_0 \vec{E}_0(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0} \frac{\omega_{21} |\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}}.$$

- Susceptibilita $\chi(\omega)$ – komplexní, frekvenčně závislá veličina
- T.j. dvouhladinové rezonanční prostředí je disperzní a nelineární.
- Pro velké blízké frekvence ω_{21} a ω ($\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$, $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2 \omega_{21}}}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Hledáme výraz pro polarizaci ve tvaru $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Máme:

$$\left[\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}\right]\vec{P} \doteq -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N_0$$

- Pro susceptibilitu dostaneme:

$$\chi(\omega) = \frac{\vec{P_0}(z,\omega)}{\varepsilon_0 \vec{E_0}(z,\omega)} \doteq -\frac{2}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\omega_{21}^2 - \omega^2 + \frac{2\mathrm{i}\omega}{T_2} + \frac{1}{T_2^2}}.$$

- Susceptibilita $\chi(\omega)$ – komplexní, frekvenčně závislá veličina
- T.j. dvouhladinové rezonanční prostředí je disperzní a nelineární.
- Pro velké blízké frekvence ω_{21} a ω ($\omega_{21} + \omega \doteq 2\omega_{21}$, $\omega - \omega_{21} = \Delta\omega$):

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

- Nová proměnná $\Delta\omega$ = rozladění od rezonance ($\omega_{21} = \omega$).

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

- Předpokládáme $T_2 \gg \omega_{21}^{-1}$ ($T_2 \sim 10^{-9}\,\mathrm{s}$, $\omega_{21} \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$)

$$\chi(\Delta\omega) \doteq \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{\Delta\omega - \frac{\mathrm{i}}{T_2}}$$

Disperzní vlastnosti rezonančního prostředí

- Pro susceptibilitu máme:

$$\chi(\Delta\omega) \doteq -\frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{-\Delta\omega + \frac{\mathrm{i}}{T_2} + \frac{1}{2T_2^2\omega_{21}}}$$

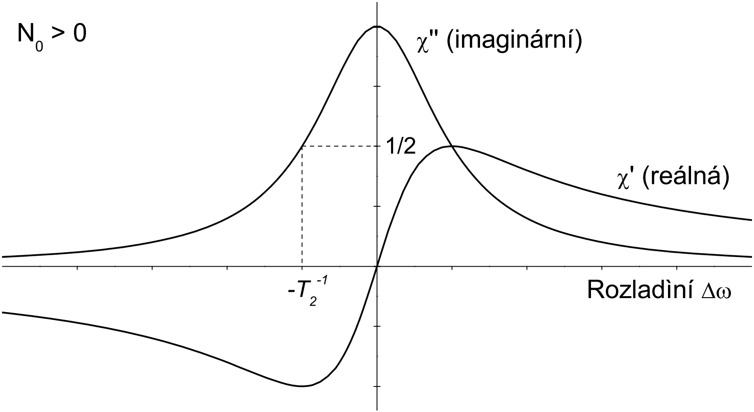
- Předpokládáme $T_2 \gg \omega_{21}^{-1}$ ($T_2 \sim 10^{-9}\,$s, $\omega_{21} \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$)

$$\chi(\Delta\omega) \doteq \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}}{\Delta\omega - \frac{\mathrm{i}}{T_2}}$$

- Susceptibilitu rozložíme na reálnou a imaginární složku:

$$\chi(\Delta\omega) = \chi'(\Delta\omega) + \mathrm{i}\chi''(\Delta\omega)$$

$$\chi'(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$



$$\chi'(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\Delta\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \chi \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \chi \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E} = -\chi \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$

Šíření rovinné vlny

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$

- Nutná podmínka pro existenci řešení v tomto tvaru, tzv. *disperzní vztah*:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi' + \mathrm{i}\chi'') = 0$$

- Obecný popis šíření udává vlnová rovnice

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\varepsilon_0\chi\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Šíření slabého harmonického signálu je popsáno řešením homogenní rovnice:

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E} = -\chi\frac{\omega^2}{c_0^2}\vec{E}$$

- Předpokládáme řešení ve tvaru rovinné lineárně polarizované vlny:

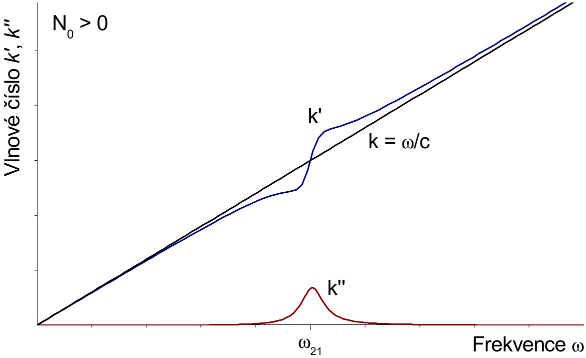
$$\vec{E} = \vec{i_y}E_0 \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - kz + \Phi)\right]$$

- Nutná podmínka pro existenci řešení v tomto tvaru, tzv. *disperzní vztah*:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi' + \mathrm{i}\chi'') = 0$$

- k je obecně komplexní číslo $k = k' + \mathrm{i}k''$, pro $k' \gg k''$:

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{(1+\chi')}, \quad k'' = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\frac{\chi''}{\sqrt{(1+\chi')}}.$$



$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{(1+\chi')}, \quad k'' = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\frac{\chi''}{\sqrt{(1+\chi')}}$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}, \quad \chi''(\omega) = \frac{\frac{|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar\,\varepsilon_0}\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2}.$$

Zesílení

- Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

Zesílení

- Komplexní intenzita elektrického pole:

$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \cos\left(\omega t - k'z + \Phi\right)$$

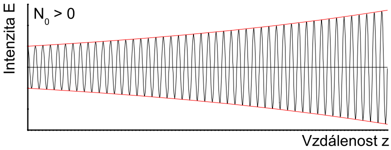
- Komplexní intenzita elektrického pole:

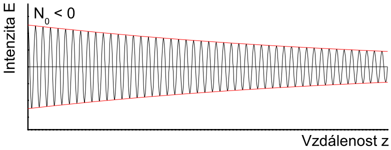
$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \cos\left(\omega t - k'z + \Phi\right)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá $(+)$ nebo klesá $(-)$.





Zesílení

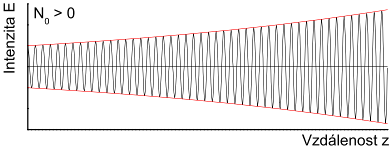
- Komplexní intenzita elektrického pole:

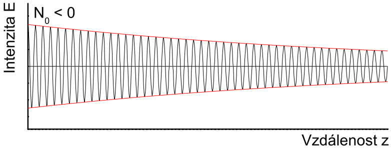
$$\vec{E} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k'' z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k' z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i_y} E_0 \, \mathrm{e}^{k'' z} \cos\left(\omega t - k' z + \Phi\right)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá ($+$) nebo klesá ($-$).





- Plošná hustota výkonu $I = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$:

$$I(z) = I_0 \, \mathrm{e}^{g_0 z}$$

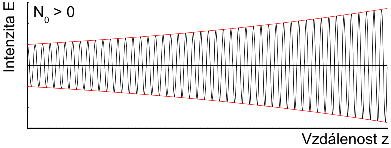
- Komplexní intenzita elektrického pole:

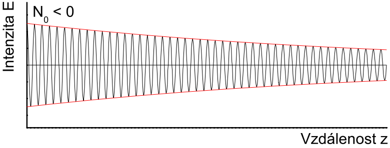
$$\vec{E} = \vec{i}_y E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z + \Phi)}$$

- Příslušné reálné pole:

$$\vec{E}^{(r)} = \vec{i}_y E_0 \, \mathrm{e}^{k''z} \cos\left(\omega t - k'z + \Phi\right)$$

- V závislosti na znaménku k'' (znaménko N_0) amplituda vlny buď exponenciálně vzrůstá $(+)$ nebo klesá $(-)$.





- Plošná hustota výkonu $I = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$:

$$I(z) = I_0 \, \mathrm{e}^{g_0 z}$$

- I_0 je intenzita záření v rovině $z = 0$ a $g_0 = 2k''$ je součinitel zesílení slabého signálu.

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorbce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorbce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorbce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2
- Přesná rezonance ($\Delta\omega = 0$):

$$g_0 = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar c \varepsilon_0} N_0 T_2 = \sigma N_0$$

Součinitel zesílení

- Spektrální závislost součinitele zesílení (absorbce):

$$g_0(\omega) = 2k''(\omega) = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 N_0}{\hbar c \varepsilon_0} \frac{\frac{1}{T_2}}{(\Delta\omega)^2 + (\frac{1}{T_2})^2} = g_0 \frac{\left(\frac{1}{T_2}\right)^2}{(\Delta\omega)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

- Šířka spektrální čáry $\leftrightarrow$ převrácená hodnota doby relaxace polarizace T_2
- Přesná rezonance ($\Delta\omega = 0$):

$$g_0 = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar c \varepsilon_0} N_0 T_2 = \sigma N_0$$

- Účinný průřez pro stimulovanou emisi (absorpci):

$$\sigma = \frac{\omega_{21}|\vec{d}_{21}|^2 T_2}{\hbar c \varepsilon_0}$$

- Předpokládáme stacionární harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$ vstupující do rezonančního prostředí. Dosadíme do rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\frac{2\omega T_2 |\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})} N\vec{E}$$

- Předpokládáme stacionární harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$ vstupující do rezonančního prostředí. Dosadíme do rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\frac{2\omega T_2|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})}N\vec{E}$$

- Po dosazení za $\vec{P}$ do rovnice pro inverzi a za předpokladu $\omega \gg \frac{1}{T_2}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_1}(N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2|\vec{E}|^2 N$$

- Předpokládáme stacionární harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$ vstupující do rezonančního prostředí. Dosadíme do rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\frac{2\omega T_2|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})}N\vec{E}$$

- Po dosazení za $\vec{P}$ do rovnice pro inverzi a za předpokladu $\omega \gg \frac{1}{T_2}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_1}(N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2|\vec{E}|^2 N$$

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2}T_2 T_1|\vec{E}|^2}.$$

Saturace zesílení

- Předpokládáme stacionární harmonickou vlnu a přesnou rezonanci $\omega = \omega_{21}$ vstupující do rezonančního prostředí. Dosadíme do rovnice pro polarizaci:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\frac{2\omega T_2 |\vec{d}_{21}|^2}{\hbar(2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{T_2})} N\vec{E}$$

- Po dosazení za $\vec{P}$ do rovnice pro inverzi a za předpokladu $\omega \gg \frac{1}{T_2}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_1}(N - N_0) = -\frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2} T_2 |\vec{E}|^2 N$$

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{|\vec{d}_{21}|^2}{\hbar^2} T_2 T_1 |\vec{E}|^2}.$$

- Vztah mezi intenzitou světla a intenzitou elektrického pole:

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |\vec{E}|^2$$

Saturace zesílení

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{2|\vec{d}_{21}|^2}{c\varepsilon_0\hbar^2} T_2 T_1 I}.$$

Saturace zesílení

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{2|\vec{d}_{21}|^2}{c\varepsilon_0\hbar^2} T_2 T_1 I}.$$

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2}\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2\sigma T_1},$$

Saturace zesílení

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{2|\vec{d}_{21}|^2}{c\varepsilon_0\hbar^2} T_2 T_1 I}.$$

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2}\frac{\hbar^2\varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2\sigma T_1},$$

- Saturace inverze populace hladin

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}},$$

Saturace zesílení

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{2|\vec{d}_{21}|^2}{c\varepsilon_0 \hbar^2} T_2 T_1 I}.$$

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2} \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2\sigma T_1},$$

- Saturace inverze populace hladin

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}},$$

- Saturace zisku (zesílení) je tedy:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}}.$$

Saturace zesílení

- Ustálená hodnota rozdílu populace hladin:

$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{2|\vec{d}_{21}|^2}{c\varepsilon_0 \hbar^2} T_2 T_1 I}.$$

- Zavedeme saturační intenzitu – materiálový parametr

$$I_s = \frac{c}{2} \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{|\vec{d}_{21}|^2 T_2 T_1} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2\sigma T_1},$$

- Saturace inverze populace hladin

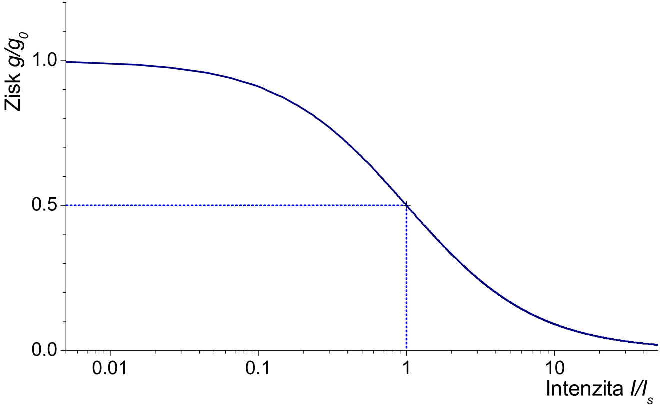
$$N = \frac{N_0}{1 + \frac{I}{I_s}},$$

- Saturace zisku (zesílení) je tedy:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_s}}.$$

- Stejně funguje i saturace absorpce ($N_0 < 0$)

Saturace zesílení



- Signál o intenzitě $I << I_s$ je součinitel zesílení roven $\sim g_0$. Signál, jehož intenzita je srovnatelná, nebo podstatně větší než I_s, je zesilován méně.

Shrnutí

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Shrnutí

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Shrnutí

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Shrnutí

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

Shrnutí

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

- Rezonanční prostředí je disperzní – susceptibilita (index lomu) je funkcí frekvence

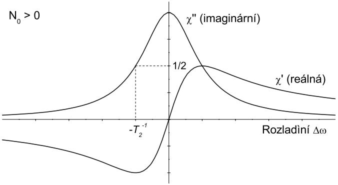
Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

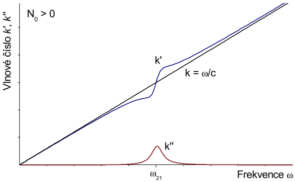
Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

- Rezonanční prostředí je disperzní – susceptibilita (index lomu) je funkcí frekvence
- Rezonanční prostředí je nelineární – v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní), v závislosti na intenzitě záření dochází k saturaci zesílení (absorpce)





Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 (http://space.fjfi.cvut.cz/web/sulc/ulat/)
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
- Štol, I.: *Elektřina a magnetismus*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/lt1/