Laserová technika 2
Aktivní prostředí
Šíření optických impulsů v aktivním prostředí

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

23. listopadu 2022

Program přednášek

1. Poloklasická teorie šíření rezonančního záření dvouhladinovým prostředím
2. Šíření stacionární rovinné vlny v aktivním prostředí
3. Šíření optických impulsů v aktivním prostředí
4. Laser v aproximaci rychlostních rovnic
5. Rychlostní rovnice pro Q-spínaný laser
6. Koherentní šíření impulsu a zesílená spontánní emise

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky
Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce rezonančního záření s prostředím

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

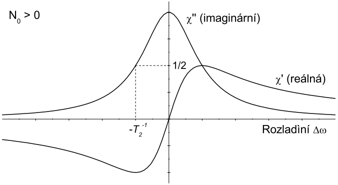
Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

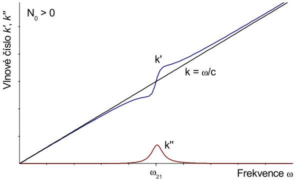
Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky
Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR
Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$
Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

- Rezonanční prostředí je disperzní – susceptibilita χ (index lomu $n = \sqrt{1+\chi}$) je funkcí frekvence záření





Interakce rezonančního záření s prostředím

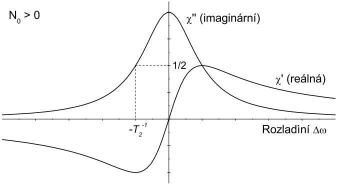
Záření – elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

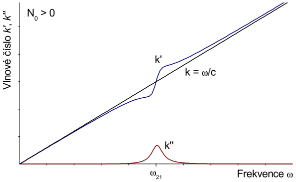
Prostředí – soubor dvouhladinových kvantových soustav, popisuje SR

Rezonanční záření – rezonance s kvantovým přechodem $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou – prostřednictvím polarizace prostředí (dipólového momentu elementárních KS)

- Rezonanční prostředí je disperzní – susceptibilita χ (index lomu $n = \sqrt{1+\chi}$) je funkcí frekvence záření





- Rezonanční prostředí je nelineární – v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní), v závislosti na intenzitě záření dochází k saturaci zesílení (absorpce)

$$I(z) = I_0\, \mathrm{e}^{g_0 z} \qquad g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_S}}$$

- Pro šíření záření v makroskopickém prostředí tvořeném souborem dvouhladinových kvantových soustav lze odvodit v poloklasickém přiblížení následující soustavu rovnic:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

Rovnice poloklasické teorie interakce hmoty a záření

- Pro šíření záření v makroskopickém prostředí tvořeném souborem dvouhladinových kvantových soustav lze odvodit v poloklasickém přiblížení následující soustavu rovnic:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}\left|\vec{d}_{21}\right|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Vzájemně vázané nelineární vektorové parciální diferenciální rovnice druhého řádu $\Rightarrow$ celkem 7 rovnic

Rovnice poloklasické teorie interakce hmoty a záření

- Pro šíření záření v makroskopickém prostředí tvořeném souborem dvouhladinových kvantových soustav lze odvodit v poloklasickém přiblížení následující soustavu rovnic:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Vzájemně vázané nelineární vektorové parciální diferenciální rovnice druhého řádu $\Rightarrow$ celkem 7 rovnic
- Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy kvantové soustavy

Rovnice poloklasické teorie interakce hmoty a záření

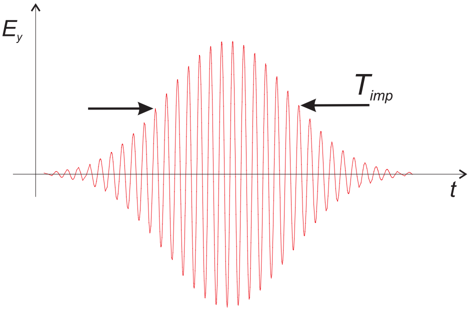
- Pro šíření záření v makroskopickém prostředí tvořeném souborem dvouhladinových kvantových soustav lze odvodit v poloklasickém přiblížení následující soustavu rovnic:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \omega_{21}^2\right]\vec{P} = -2\omega_{21}\frac{\vec{E}}{\hbar}|\vec{d}_{21}|^2 N$$

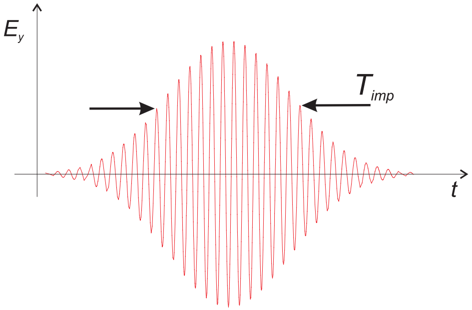
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)(N - N_0) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\vec{P}$$

- Vzájemně vázané nelineární vektorové parciální diferenciální rovnice druhého řádu $\Rightarrow$ celkem 7 rovnic
- Zahrnují všechny kvantové aspekty odezvy kvantové soustavy
- Umožňuji určit odezvu 2H rezonančního prostředí obecně pro „jakýkoliv“ průběh elektromagnetického pole



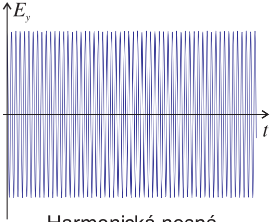
- Lineárně polarizovaná harmonická vlna

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou

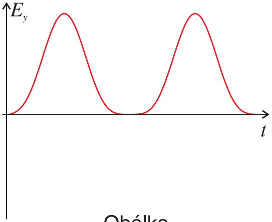


- Lineárně polarizovaná harmonická vlna
- **Pomalý impuls** – doba trvání impulsu $T_{\mathrm{imp}} \gg$ doba jednoho kmitu pole $2\pi/\omega$

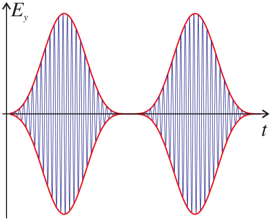
- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):



Harmonická nosná vlna



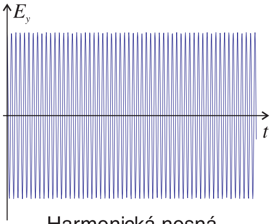
Obálka
Amplitudová modulace



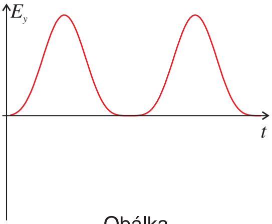
Signál s pomalu proměnnou amplitudou

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou

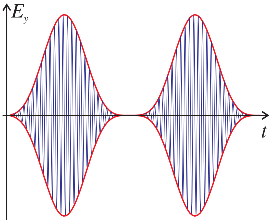
- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):



Harmonická nosná vlna



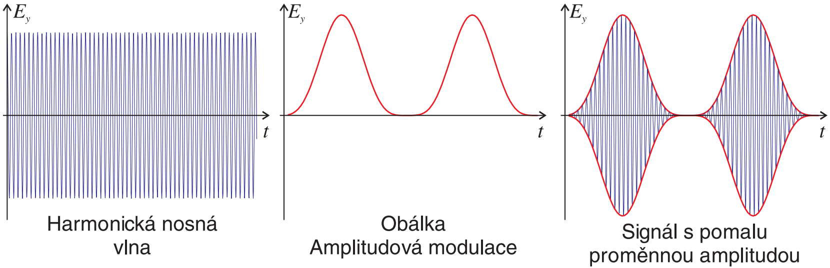
Obálka
Amplitudová modulace



Signál s pomalu proměnnou amplitudou

- Vektory makroskopické polarizace a elektromagnetického pole mají pomalu proměnné amplitudy (v čase i v prostoru)

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):



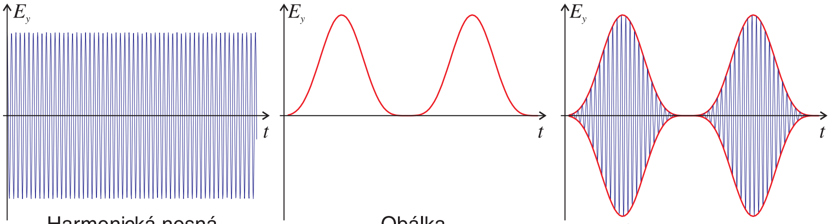
- Vektory makroskopické polarizace a elektromagnetického pole mají pomalu proměnné amplitudy (v čase i v prostoru)
- Předpokládáme následující průběh elektromagnetického pole a polarizace:

$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \left\{ \mathcal{P}_1(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] + \mathcal{P}_2(z,t) \sin\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] \right\}$$

Impuls elektromagnetického pole s pomalu proměnnou obálkou

- Předpokládáme následující průběh pole a polarizace (pomalu proměnná amplituda s harmonickou „nosnou“ vlnou):



Harmonická nosná vlna | Obálka Amplitudová modulace | Signál s pomalu proměnnou amplitudou

- Vektory makroskopické polarizace a elektromagnetického pole mají pomalu proměnné amplitudy (v čase i v prostoru)
- Předpokládáme následující průběh elektromagnetického pole a polarizace:

$$\vec{E} = \vec{i}_y \mathcal{E}(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]$$

$$\vec{P} = \vec{i}_y \left\{\mathcal{P}_1(z,t) \cos\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right] + \mathcal{P}_2(z,t) \sin\left[\omega t - kz + \Phi(z,t)\right]\right\}$$

- Dosadíme toto očekávané řešení a postupně nalezneme rovnice pro pomalu proměnné amplitudy pole a polarizace

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const$.

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const$.
- Zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z$$

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const.$
- Zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z$$

- Dostaneme:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const.$
- Zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z$$

- Dostaneme:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Rovnice **nelineární**

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const$.
- Zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z$$

- Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2
\end{aligned}$$

- Rovnice **nelineární**
- Neplatí princip superpozice $E_{\text{in}}^{(1)} \to E_{\text{out}}^{(1)}, E_{\text{in}}^{(2)} \to E_{\text{out}}^{(2)} \not\Rightarrow E_{\text{in}}^{(1)} + E_{\text{in}}^{(2)} \neq E_{\text{out}}^{(1)} + E_{\text{out}}^{(2)}$

Rovnice pro impuls s pomalu proměnnou obálkou v rezonanci a bez fázové modulace

- Uvažujeme signál v přesné rezonanci $\omega = \omega_{21}$
- Uvažujeme signál bez fázové modulace $\Phi = const$.
- Zavedeme tzv. *lokální čas*

$$t' = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z$$

- Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} {\color{red}\mathcal{E} N} \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} {\color{red}\mathcal{E} \mathcal{P}_2}
\end{aligned}$$

- Rovnice **nelineární**
- Neplatí princip superpozice $E_{\text{in}}^{(1)} \to E_{\text{out}}^{(1)}$, $E_{\text{in}}^{(2)} \to E_{\text{out}}^{(2)} \not\Rightarrow E_{\text{in}}^{(1)} + E_{\text{in}}^{(2)} \neq E_{\text{out}}^{(1)} + E_{\text{out}}^{(2)}$
- Amplitudy pole a polarizace a také inverze populace hladin závisí na souřadnicích v prostoru i čase.

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- **Stacionární signál** $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- **Stacionární signál** $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$
- Získáme rovnice pro $\mathcal{P}_2(z)$, $N(z)$

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_2(z) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E} N$$

$$0 = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \quad \Rightarrow \quad N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace

- Výchozí rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- **Stacionární signál** $\Rightarrow$ položíme časové derivace $\equiv 0$
- Získáme rovnice pro $\mathcal{P}_2(z)$, $N(z)$

$$0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}_2(z) = -\frac{|d_{21}|^2}{\hbar} T_2 \mathcal{E} N$$

$$0 = -\frac{(N - N_0)}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad N(z) = \frac{N_0}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

- Zůstává diferenciální rovnice pro změnu intenzity $\mathcal{E}$ ve směru šíření z

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2}$$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace
Rovnice pro intenzitu optického záření

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\frac{\mu_0\omega_{21}c}{2}T_2N_0\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}T_1T_2\mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1+I/I_s}I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial\mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial z}$$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$
- Účinný průřez pro stimulovanou emisi

$$\sigma = \frac{\mu_0 \omega_{21} c \, |d_{21}|^2}{\hbar} T_2$$

- Přejdeme od intenzity elektrického pole k intenzitě světla $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \mathcal{E}^2$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} T_2 N_0 \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \mathcal{E}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Přitom využijeme vztah pro derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial z} = 2\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$$

- Zisk pro slabý signál $g_0 = \sigma N_0$
- Účinný průřez pro stimulovanou emisi

$$\sigma = \frac{\mu_0 \omega_{21} c \, |d_{21}|^2}{\hbar} T_2$$

- Saturační intenzita

$$I_s = \frac{\hbar \omega}{2 \sigma T_1}$$

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

Zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

- Okrajová (počáteční) podmínka

$$J|_{z=0} = J_1$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace
Zesilování

- Rovnice popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- Normovaná intenzita záření

$$J = \frac{I}{I_s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ}{dz} = \frac{g_0}{1 + J} J$$

- Separace proměnných

$$\frac{1 + J}{J} dJ = g_0 \, dz$$

- Okrajová (počáteční) podmínka

$$J|_{z=0} = J_1$$

- Řešení ($z = L$)

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 \, L$$

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 L$$

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0\, L$$

Slabý signál	Silný signál
$J_1 \ll 1, \quad J_2 \ll 1$	$\ln \frac{J_2}{J_1} \approx 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{J_2}{J_1} \approx 1$
$J_2 = J_1\, e^{g_0\, L}$	$J_2 = J_1 + g_0\, L$

- Řešení ($z = L$) – transcendentní rovnice

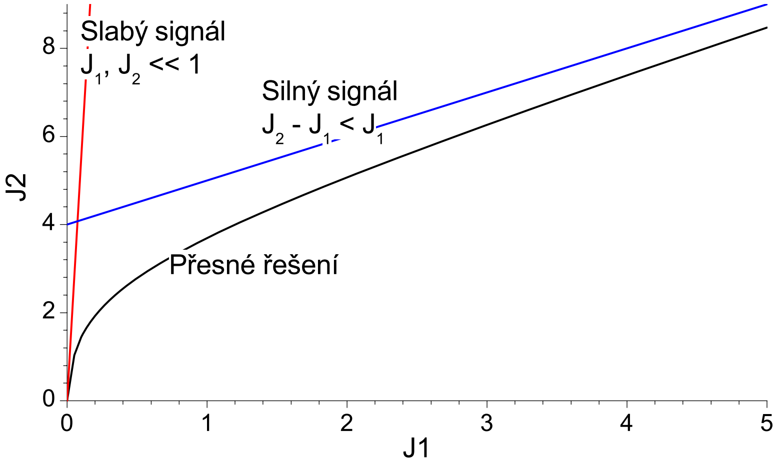
$$\ln \frac{J_2}{J_1} + (J_2 - J_1) = g_0 L$$

Slabý signál	Silný signál
$J_1 \ll 1, \quad J_2 \ll 1$	$\ln \frac{J_2}{J_1} \approx 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{J_2}{J_1} \approx 1$
$J_2 = J_1\, e^{g_0 L}$	$J_2 = J_1 + g_0 L$

- Obecné řešení transcendentní rovnice (pro libovolné J_1 a zesílení)

$$J_2 = \mathrm{LambertW}\left\{J_1 \mathrm{e}^{[J_1 + g_0 L]}\right\}$$

Šíření stacionárního rezonančního signálu bez fázové modulace
Zesilování ($g_0 L = 4$)

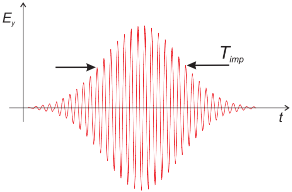


Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

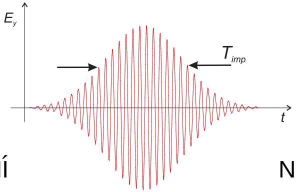
Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



Šíření impulsů

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



KOHERENTNÍ

$T_{\mathrm{imp}} \ll T_1,\ T_2$

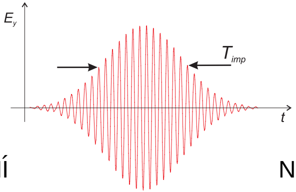
NEKOHERNTNÍ

$T_{\mathrm{imp}} \gg T_1,\ T_2$

APROXIMACE
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Charakter šíření určuje délka obálky impulsu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



KOHERENTNÍ

$T_{\mathrm{imp}} \ll T_1,\ T_2$

NEKOHERNTNÍ

$T_{\mathrm{imp}} \gg T_1,\ T_2$

APROXIMACE
RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Nekoherentní šíření impulsů $T_{\mathrm{imp}} \gg T_1, T_2$

- Rychlá relaxace rezonančního prostředí

Nekoherentní šíření impulsů $T_{\text{imp}} \gg T_1, T_2$

- Rychlá relaxace rezonančního prostředí
- Při šíření se projeví ztráty energie způsobené relaxací polarizace i inverze populace hladin

Nekoherentní šíření impulsů $T_{\mathrm{imp}} \gg T_1, T_2$

- Rychlá relaxace rezonančního prostředí
- Při šíření se projeví ztráty energie způsobené relaxací polarizace i inverze populace hladin
- Adiabatická eliminace – v každém okamžiku „ustálený stav“

Nekoherentní šíření impulsů $T_{\text{imp}} \gg T_1, T_2$

- Rychlá relaxace rezonančního prostředí
- Při šíření se projeví ztráty energie způsobené relaxací polarizace i inverze populace hladin
- Adiabatická eliminace – v každém okamžiku „ustálený stav“
- Relaxace má větší vliv než změna amplitudy $\Rightarrow$ časové derivace $\equiv 0$

$$\frac{\partial N}{\partial t} << \frac{N}{T_1}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} << \frac{\mathcal{P}_2}{T_2}$$

Nekoherentní šíření impulsů $T_{\mathrm{imp}} \gg T_1, T_2$

- Rychlá relaxace rezonančního prostředí
- Při šíření se projeví ztráty energie způsobené relaxací polarizace i inverze populace hladin
- Adiabatická eliminace – v každém okamžiku „ustálený stav“
- Relaxace má větší vliv než změna amplitudy $\Rightarrow$ časové derivace $\equiv 0$

$$\frac{\partial N}{\partial t} << \frac{N}{T_1}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} << \frac{\mathcal{P}_2}{T_2}$$

- Odpovídá rovnicím pro stacionární signál $\Rightarrow$ pokud se signál mění pomalu ve srovnání s dobou T_1, T_2, pak odezva prostředí sleduje vstup

$$\frac{dI(z,t)}{dz} = \frac{g_0}{1 + I(z,t)/I_s} I(z,t)$$

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

- Vyloučíme polarizaci, protože:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} << \frac{\mathcal{P}_2}{T_2}$$

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

- Vyloučíme polarizaci, protože:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} << \frac{\mathcal{P}_2}{T_2}$$

- Odezvu prostředí ovlivňuje inverze populace hladin, která se vyvíjí v závislosti na velikosti signálu

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar}\mathcal{E}N$$
$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{P}_2$$
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2}\mathcal{P}_2$$

- Vyloučíme polarizaci, protože:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t} << \frac{\mathcal{P}_2}{T_2}$$

- Odezvu prostředí ovlivňuje inverze populace hladin, která se vyvíjí v závislosti na velikosti signálu
- Od intenzity elektrického pole $\mathcal{E}$ k intenzitě záření I

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin
- Hustota energie $u = I/c$

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření
$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$
$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$
- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin
- Hustota energie $u = I/c$
- Einstein
$$B = \frac{c\sigma}{\hbar\omega}$$

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t)N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin
- Hustota energie $u = I/c$
- Einstein

$$B = \frac{c\sigma}{\hbar\omega}$$

- Hustota fotonů $\phi = I/(\hbar\omega c)$

Rychlostní rovnice

- Rychlostní rovnice popisují rychlost změny inverze populace hladin a intenzity záření

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin
- Hustota energie $u = I/c$
- Einstein

$$B = \frac{c\sigma}{\hbar\omega}$$

- Hustota fotonů $\phi = I/(\hbar\omega c)$
- Tok fotonů $F = I/(\hbar\omega)$

Shrnutí

- Pro popis šíření impulsů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic. Rovnice popisují časový vývoj obálky impulsu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.

Shrnutí

- Pro popis šíření impulsů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic. Rovnice popisují časový vývoj obálky impulsu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Za předpokladu, že záření je v dokonalé rezonanci s prostředím ($\omega = \omega_{21}$), a že signál má konstantní fázi, stačí nám 3 rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} &= -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2 \\
\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} &= -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N \\
\frac{\partial N}{\partial t'} &= -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2
\end{aligned}
$$

Shrnutí

- Pro popis šíření impulsů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic. Rovnice popisují časový vývoj obálky impulsu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Za předpokladu, že záření je v dokonalé rezonanci s prostředím ($\omega = \omega_{21}$), a že signál má konstantní fázi, stačí nám 3 rovnice:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární řešení poskytuje rovnici popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

Shrnutí

- Pro popis šíření impulsů s pomalu proměnnou obálkou stačí 5 rovnic. Rovnice popisují časový vývoj obálky impulsu, amplitudu polarizace prostředí a inverzi populace hladin.
- Za předpokladu, že záření je v dokonalé rezonanci s prostředím ($\omega = \omega_{21}$), a že signál má konstantní fázi, stačí nám 3 rovnice:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Stacionární řešení poskytuje rovnici popisující zesilování rezonančního záření

$$\frac{dI}{dz} = \frac{g_0}{1 + I/I_s} I$$

- V obecném případě časově proměnné obálky impulsu délky T_{imp} rozlišujeme 3 oblasti řešení: koherentní šíření ($T_{imp} \ll T_1, T_2$), nekoherentní šíření ($T_{imp} \gg T_1, T_2$), aproximace rychlostních rovnic ($T_2 \ll T_{imp} \ll T_1$)

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 (http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/)
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
- Štol, I.: *Elektřina a magnetismus*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994
- Přednášky: http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/lt1/