Laserová technika

Aproximace rychlostních rovnic
Dynamika laseru s krátkým rezonátorem. Práh laseru

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

22. dubna 2022

Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a N.

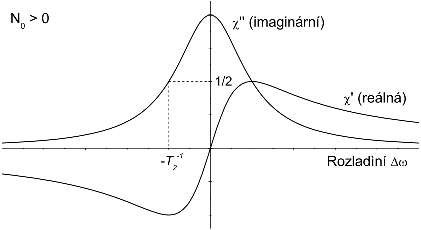
Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a N.

Rezonanční prostředí je disperzní susceptibilita je funkcí frekvence



Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

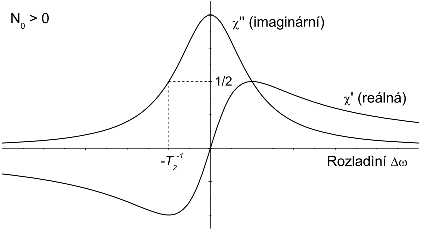
Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a N.

Rezonanční prostředí je disperzní susceptibilita je funkcí frekvence



Rezonanční prostředí je nelineární v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní)

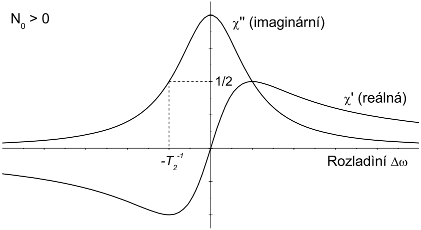
Záření elektromagnetická vlna, popisují MR klasicky

Prostředí soubor dvouhladinových kvantových soustav, $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\vec{E}$, $\vec{P}$ a N.

Rezonanční prostředí je disperzní susceptibilita je funkcí frekvence



Rezonanční prostředí je nelineární v blízkosti rezonanční frekvence může v závislosti na obsazení hladin docházet k pohlcení nebo zesílení záření (susceptibilita je komplexní)

Signál pomalu proměnný impulz s harmonickou nosnou frekvencí $\omega \gg T_{\mathrm{imp}}^{-1}$ v rezonanci ($\omega = \omega_{21}$) a bez fázové modulace $\rightarrow$ tři rovnice pro obálku

Šíření impulsů (signálů s pomalu proměnnou amplitudou)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2

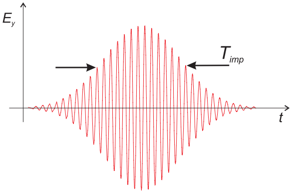
Šíření impulsů (signálů s pomalu proměnnou amplitudou)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



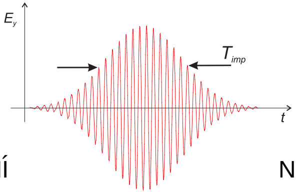
Šíření impulsů (signálů s pomalu proměnnou amplitudou)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = -\frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Charakter šíření určuje délka obálky impulzu T_{imp} v porovnání s relaxačními časy T_1 a T_2



KOHERENTNÍ

$$T_{\mathrm{imp}} \ll T_1,\ T_2$$

NEKOHERNTNÍ

$$T_{\mathrm{imp}} \gg T_1,\ T_2$$

APROXIMACE RYCHLOSTNÍCH ROVNIC

$$T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$$

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav

Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav
- Vyloučíme polarizaci $\Rightarrow$ rychlostní rovnice

$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

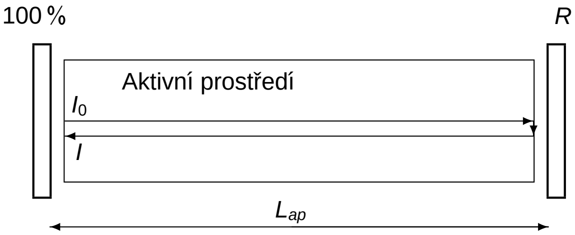
Aproximace rychlostních rovnic $T_2 \ll T_{\mathrm{imp}} \ll T_1$

- Částečná adiabatická eliminace
- Polarizace spojená s časem T_2 relaxuje rychle – kvazistacionární stav
- Vyloučíme polarizaci $\Rightarrow$ rychlostní rovnice

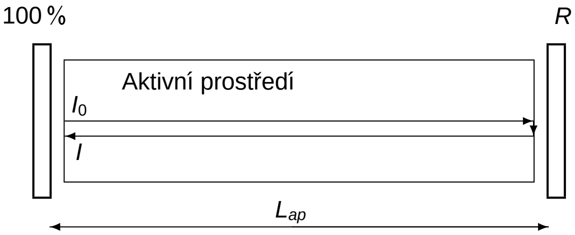
$$\frac{\partial N(z,t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{N_0}{T_1}}_{\text{buzení}} - \underbrace{\frac{N(z,t)}{T_1}}_{\text{fluorescence}} - \frac{2}{\hbar\omega_{21}} \underbrace{\sigma I(z,t) N(z,t)}_{\text{stimul. emise/absorbce}}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N(z,t) I(z,t)$$

- Zákon zachování energie – fotony vs inverze populace hladin

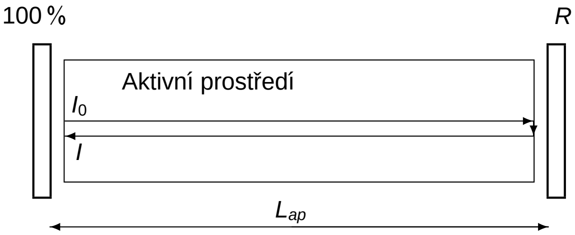

100 %
R
Aktivní prostředí
I_0
I
L_{ap}

Laser s krátkým rezonátorem



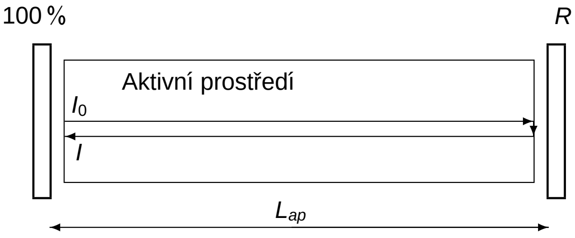
- Nechť je jeden oběh fotonu rezonátorem, doba t_R je mnohem kratší, než chrakteristické časy spojené s generací laserového záření

Laser s krátkým rezonátorem



- Nechť je jeden oběh fotonu rezonátorem, doba t_R je mnohem kratší, než chrakteristické časy spojené s generací laserového záření
- Inverze populace hladin nechť je nezávislá na souřadnici a za dobu t_R se příliš nezmění $\Rightarrow$ zisk $g = \sigma N \approx$ konstanta po dobu t_R

Laser s krátkým rezonátorem



- Nechť je jeden oběh fotonu rezonátorem, doba t_R je mnohem kratší, než chrakteristické časy spojené s generací laserového záření
- Inverze populace hladin nechť je nezávislá na souřadnici a za dobu t_R se příliš nezmění $\Rightarrow$ zisk $g = \sigma N \approx$ konstanta po dobu t_R

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z'} = \sigma N I(z,t) \quad \Rightarrow I_{t_R} = I_0 \exp[2gL_{ap}]$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Při započtení ztrát odrazem od zrcadla s reflexivitou R:

$$I_{t_R} = I_0 R \exp[2gL_{ap}] = I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R]$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Při započtení ztrát odrazem od zrcadla s reflexivitou R:

$$I_{t_R} = I_0 R \exp[2gL_{ap}] = I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R]$$

- Změna intenzity na jeden průchod bude:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{t_R} - I_0}{t_R} = \frac{1}{t_R}\left(I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R] - I_0\right) = \frac{I_0}{t_R}\left(\exp[2gL_{ap} + \ln R] - 1\right)$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Při započtení ztrát odrazem od zrcadla s reflexivitou R:

$$I_{t_R} = I_0 R \exp[2gL_{ap}] = I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R]$$

- Změna intenzity na jeden průchod bude:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{t_R} - I_0}{t_R} = \frac{1}{t_R}\left(I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R] - I_0\right) = \frac{I_0}{t_R}\left(\exp[2gL_{ap} + \ln R] - 1\right)$$

- V okolí prahu je exponent blízko nuly a na exponencielu lze použít Taylorův rozvoj:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \doteq \frac{I_0}{t_R}(1 + 2gL_{ap} + \ln R - 1) = \frac{I_0}{t_R}(2gL_{ap} + \ln R)$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Při započtení ztrát odrazem od zrcadla s reflexivitou R:

$$I_{t_R} = I_0 R \exp[2gL_{ap}] = I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R]$$

- Změna intenzity na jeden průchod bude:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{t_R} - I_0}{t_R} = \frac{1}{t_R}\left(I_0 \exp[2gL_{ap} + \ln R] - I_0\right) = \frac{I_0}{t_R}\left(\exp[2gL_{ap} + \ln R] - 1\right)$$

- V okolí prahu je exponent blízko nuly a na exponencielu lze použít Taylorův rozvoj:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} \doteq \frac{I_0}{t_R}\left(1 + 2gL_{ap} + \ln R - 1\right) = \frac{I_0}{t_R}\left(2gL_{ap} + \ln R\right)$$

- 2. věta o střední hodnotě

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I}{t_R}\left(2gL_{ap} + \ln R\right) = c\sigma_{21} I N - \frac{I}{t_R} \ln \frac{1}{R}$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Máme rovnici pro fotony

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21}IN - \frac{I}{t_R}\ln\frac{1}{R}$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Máme rovnici pro fotony

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21}IN - \frac{I}{t_R}\ln\frac{1}{R}$$

- Ještě si vzpomeneme na definici doby života fotonu v rezonátoru

$$\tau_c = \frac{t_R}{-\ln R}$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Máme rovnici pro fotony

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21} I N - \frac{I}{t_R} \ln \frac{1}{R}$$

- Ještě si vzpomeneme na definici doby života fotonu v rezonátoru

$$\tau_c = \frac{t_R}{-\ln R}$$

- . . . a máme:

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21} I N - \frac{I}{\tau_c}$$

Laser s krátkým rezonátorem – rovnice pro fotony

- Máme rovnici pro fotony

$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21} IN - \frac{I}{t_R} \ln \frac{1}{R}$$

- Ještě si vzpomeneme na definici doby života fotonu v rezonátoru

$$\tau_c = \frac{t_R}{-\ln R}$$

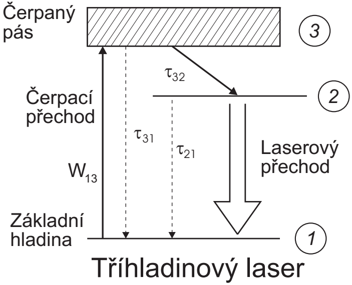
- . . . a máme:

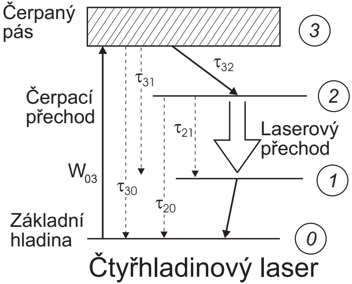
$$\frac{dI}{dt} = c\sigma_{21} IN - \frac{I}{\tau_c}$$

- Jde to i jinak. . .

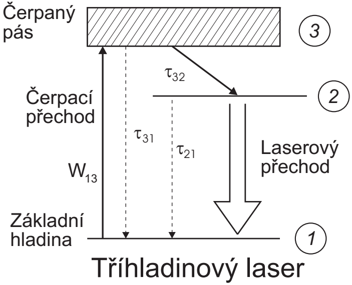
Rychlostní rovnice

- Schéma optického čerpání pevnolátkových laserů





- Schéma optického čerpání pevnolátkových laserů



- Pro činnost laseru mají zásadní význam dvě hladiny: excitovaná horní úroveň a spodní laserová úroveň.

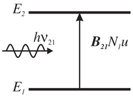
Elementární procesy absorpce a emise fotonu

- Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu

Elementární procesy absorpce a emise fotonu

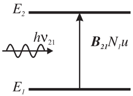
- Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu
- Absorpce fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\rightarrow n} = -\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\rightarrow n} = -B_{mn}N_m u$$



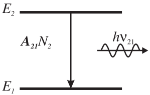
- Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu
- Absorpce fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\to n} = -\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\to n} = -B_{mn}N_m u$$



- Spontánní emise fotonu kvantovou soustavou

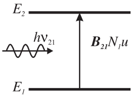
$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{spont}\, n\to m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{spont}\, n\to m} = -A_{nm}N_n$$



Elementární procesy absorpce a emise fotonu

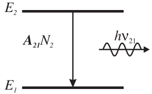
- Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu
- Absorpce fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\to n} = -\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{abs}\, m\to n} = -B_{mn}N_m u$$



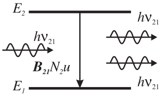
- Spontánní emise fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{spont}\, n\to m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{spont}\, n\to m} = -A_{nm}N_n$$



- Stimulovaná emise fotonu kvantovou soustavou

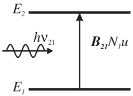
$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{stim. em.}\, n\to m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{stim. em.}\, n\to m} = -B_{nm}N_n u$$



Elementární procesy absorpce a emise fotonu

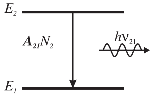
- Einsteinovy součinitele (koeficienty) **A**, **B** – pravděpodobnost procesu
- Absorpce fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{abs } m\to n} = -\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{abs } m\to n} = -B_{mn}N_m u$$



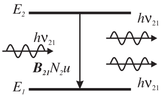
- Spontánní emise fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{spont } n\to m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{spont } n\to m} = -A_{nm}N_n$$



- Stimulovaná emise fotonu kvantovou soustavou

$$\left(\frac{dN_n}{dt}\right)_{\text{stim. em. } n\to m} = -\left(\frac{dN_m}{dt}\right)_{\text{stim. em. } n\to m} = -B_{nm}N_n u$$

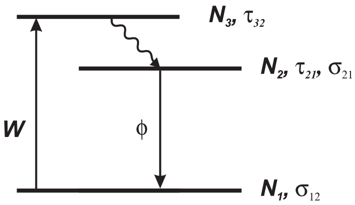


- Rychlost přechodu (změna populace hladiny za jednotku času)

$$\frac{dN}{dt} = BuN = \sigma\frac{I}{h\nu}N = \sigma c\phi N = \sigma FN$$

u – hustota energie [J/m^3], I – intenzita záření [W/m^2], ϕ – hustota fotonů [m^{-3}], F – fotonový tok [1/sm^2]

Rychlostní rovnice pro 3-hladinový systém

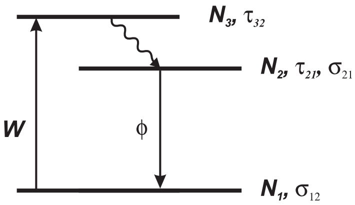


$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$

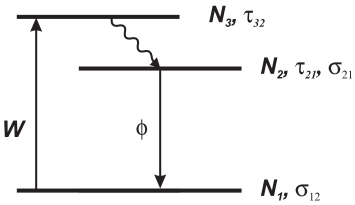
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

Rychlostní rovnice pro 3-hladinový systém



$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

- Rychlá relaxace hladiny 3 $\Rightarrow N_3 \leq N_1, N_2, \frac{N_3}{\tau_{32}} = W$

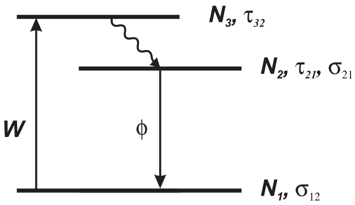


$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

- Rychlá relaxace hladiny 3 $\Rightarrow N_3 \leq N_1, N_2, \frac{N_3}{\tau_{32}} = W$
- Inverze populace hladin $N = N_2 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{21}} N_1 = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{g_2}{g_1}\frac{\partial N_1}{\partial t} = W\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) - \frac{N_2}{\tau_{21}}\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) - \left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)\sigma_{21} c \phi \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right)$$

Rychlostní rovnice pro 3-hladinový systém



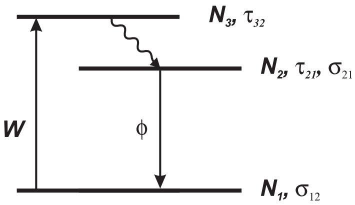
$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c\phi N_2 + \sigma_{12} c\phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c\phi N_2 - \sigma_{12} c\phi N_1$$

- Rychlá relaxace hladiny 3 $\Rightarrow N_3 \leq N_1, N_2, \frac{N_3}{\tau_{32}} = W$
- Inverze populace hladin $N = N_2 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{21}} N_1 = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{g_2}{g_1}\frac{\partial N_1}{\partial t} = W\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) - \frac{N_2}{\tau_{21}}\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) - \left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)\sigma_{21} c\phi \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right)$$

- Celkový počet částic $N_{tot} = N_1 + N_2$

$$N_1 = \frac{N_{tot} - N}{1 + g_2/g_1}, \quad N_2 = \frac{N_{tot} g_2/g_1 + N}{1 + g_2/g_1}$$



$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c\phi N_2 + \sigma_{12} c\phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -W + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c\phi N_2 - \sigma_{12} c\phi N_1$$

- Rychlá relaxace hladiny 3 $\Rightarrow N_3 \leq N_1, N_2, \frac{N_3}{\tau_{32}} = W$
- Inverze populace hladin $N = N_2 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{21}} N_1 = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N_2}{\partial t} - \frac{g_2}{g_1}\frac{\partial N_1}{\partial t} = W\left(1+\frac{g_2}{g_1}\right) - \frac{N_2}{\tau_{21}}\left(1+\frac{g_2}{g_1}\right) - \left(1+\frac{g_2}{g_1}\right)\sigma_{21} c\phi \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right)$$

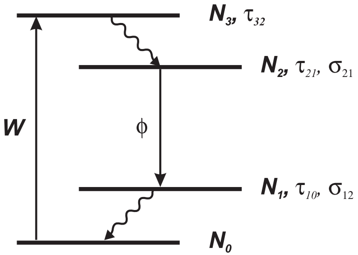
- Celkový počet částic $N_{tot} = N_1 + N_2$

$$N_1 = \frac{N_{tot} - N}{1 + g_2/g_1}, \quad N_2 = \frac{N_{tot} g_2/g_1 + N}{1 + g_2/g_1}$$

- Zavedeme $\kappa = 1 + g_2/g_1$ (pro $g_1 = g_2 \Rightarrow \kappa = 2$). Dostaneme:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \underbrace{\kappa W - \frac{N_{tot}}{\tau_{21}}(\kappa - 1)}_{W'} - \frac{N}{\tau_{21}} - \kappa\sigma_{21} c\phi N$$

Rychlostní rovnice pro 4-hladinový systém



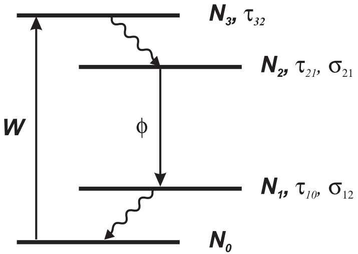
$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -W + \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

Rychlostní rovnice pro 4-hladinový systém



$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$

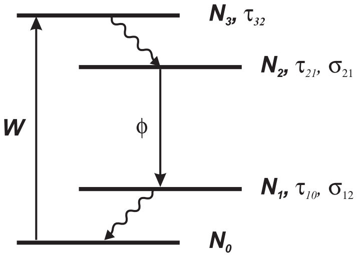
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -W + \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

- Rychlá relaxace hladiny 1 a 3 $\Rightarrow N_1,\ N_3 \leq N_0,\ N_2$

$$\frac{N_3}{\tau_{32}} = W, \qquad \frac{N_1}{\tau_{10}} = \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

Rychlostní rovnice pro 4-hladinový systém



$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N_2 + \sigma_{12} c \phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$
$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -W + \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

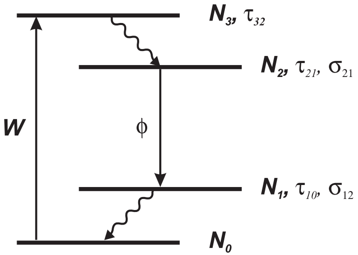
- Rychlá relaxace hladiny 1 a 3 $\Rightarrow N_1, N_3 \leq N_0, N_2$

$$\frac{N_3}{\tau_{32}} = W, \qquad \frac{N_1}{\tau_{10}} = \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1$$

- Inverze populace hladin $N \doteq N_2$, celkový počet částic $N_{tot} = N_0 + N_2 = N_0 + N$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c \phi N$$
$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial t} = -W + \frac{N}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c \phi N$$

Rychlostní rovnice pro 4-hladinový systém



$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = W - \frac{N_3}{\tau_{32}}$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c\phi N_2 + \sigma_{12} c\phi N_1$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -\frac{N_1}{\tau_{10}} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c\phi N_2 - \sigma_{12} c\phi N_1$$
$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -W + \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

- Rychlá relaxace hladiny 1 a 3 $\Rightarrow N_1,\, N_3 \leq N_0,\, N_2$

$$\frac{N_3}{\tau_{32}} = W, \qquad \frac{N_1}{\tau_{10}} = \frac{N_2}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c\phi N_2 - \sigma_{12} c\phi N_1$$

- Inverze populace hladin $N \doteq N_2$, celkový počet částic $N_{tot} = N_0 + N_2 = N_0 + N$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \sigma_{21} c\phi N$$
$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial t} = -W + \frac{N}{\tau_{21}} + \sigma_{21} c\phi N$$

- Pro 4-hladinový systém položíme $\kappa = 1$:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \kappa \sigma_{21} c\phi N$$

Rovnice pro fotony v rezonátoru

- Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím

Rovnice pro fotony v rezonátoru

- Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím
- Změna počtu (hustoty) fotonů v rezonátoru způsobená absorpcí a stimulovanou emisí odpovídá (až na znaménko) změně populace (hustoty populace) hladiny N_2

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{abs., stim. e.}} = \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1 = \sigma_{21} c \phi N$$

Rovnice pro fotony v rezonátoru

- Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím
- Změna počtu (hustoty) fotonů v rezonátoru způsobená absorpcí a stimulovanou emisí odpovídá (až na znaménko) změně populace (hustoty populace) hladiny N_2

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{abs., stim. e.}} = \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1 = \sigma_{21} c \phi N$$

- Částečně může přispívat k fotonům v rezonátoru i spontánní emise ($k \sim 0$)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{spont. e.}} = k \frac{N_2}{\tau_{21}}$$

Rovnice pro fotony v rezonátoru

- Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím
- Změna počtu (hustoty) fotonů v rezonátoru způsobená absorpcí a stimulovanou emisí odpovídá (až na znaménko) změně populace (hustoty populace) hladiny N_2

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{abs., stim. e.}} = \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1 = \sigma_{21} c \phi N$$

- Částečně může přispívat k fotonům v rezonátoru i spontánní emise ($k \sim 0$)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{spont. e.}} = k \frac{N_2}{\tau_{21}}$$

- Část fotonů unikne – doba života fotonů v rezonátoru τ_c je konečná (fotony unikají výstupním zrcadlem, v důsledku ztrát)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{rezonátor}} = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

Rovnice pro fotony v rezonátoru

- Uvažujeme rezonátor zcela zaplněný aktivním prostředím
- Změna počtu (hustoty) fotonů v rezonátoru způsobená absorpcí a stimulovanou emisí odpovídá (až na znaménko) změně populace (hustoty populace) hladiny N_2

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{abs., stim. e.}} = \sigma_{21} c \phi N_2 - \sigma_{12} c \phi N_1 = \sigma_{21} c \phi N$$

- Částečně může přispívat k fotonům v rezonátoru i spontánní emise ($k \sim 0$)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{spont. e.}} = k \frac{N_2}{\tau_{21}}$$

- Část fotonů unikne – doba života fotonů v rezonátoru τ_c je konečná (fotony unikají výstupním zrcadlem, v důsledku ztrát)

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{\text{rezonátor}} = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

- Dohromady dostaneme:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sigma_{21} c \phi N - \frac{\phi}{\tau_c} + k \frac{N_2}{\tau_{21}}$$

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma\mu c NI - \frac{I}{\tau_c}$$

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma\mu c NI - \frac{I}{\tau_c}$$

N	hustota inverze populace hladin v aktivním prostředí
I	intenzita záření v rezonátoru
W	čerpací rychlost (rychlost excitací horní laserové hladiny vlivem čerpání)
σ	účinný průřez pro stimulovanou emisi
κ	faktor redukce inverze populace hladin
τ_{21}	doba života kvantové soustavy na horní laserové hladině
τ_c	doba života fotonu v rezonátoru
μ	koeficient zaplnění rezonátoru aktivním prostředím
c	rychlost světla v aktivním prostředí
ω	úhlová frekvence laserového záření

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\kappa = \begin{cases} 1 + \dfrac{g_2}{g_1}, & 3 - \text{hladinový systém},\ g_i \text{ je degenerace i} - \text{té hladiny} \\ 1, & 4 - \text{haldinový systém} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\text{optická délka aktivního prostředí}}{\text{optická délka rezonátoru}} = \frac{L_{ap} n_{ap}}{L_r + L_{ap}(n_{ap} - 1)}$$

$$\tau_c = \frac{\tau_R}{L - \ln R}$$

L_r a L_{ap}	délka rezonátoru a aktivního prostředí
n_{ap}	index lomu aktivního prostředí
τ_R	doba oběhu rezonátoru
R	reflexivita výstupního zrcadla rezonátoru
L	další ztráty rezonátoru (absorpce optických prvků, difrakční ztráty,. . .)

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

- V rovnici pro inverzi

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

- V rovnici pro inverzi
$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$
- využijeme obecný vztah pro saturační intenzitu záření v daném aktivním prostředí
$$I_s = \frac{\hbar\omega}{\kappa\sigma\tau_{21}}$$

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

- V rovnici pro inverzi

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$

- využijeme obecný vztah pro saturační intenzitu záření v daném aktivním prostředí

$$I_s = \frac{\hbar\omega}{\kappa\sigma\tau_{21}}$$

- ... dostaneme

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s}\frac{N}{\tau_{21}}$$

Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

- V rovnici pro inverzi
$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{\kappa\sigma}{\hbar\omega} NI$$
- využijeme obecný vztah pro saturační intenzitu záření v daném aktivním prostředí
$$I_s = \frac{\hbar\omega}{\kappa\sigma\tau_{21}}$$
- . . . dostaneme
$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s}\frac{N}{\tau_{21}}$$
- Pozor na čerpací rychlost $W = W(N)$!

Stacionární řešení rychlostních rovnic

- V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s}\frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

Stacionární řešení rychlostních rovnic

- V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s}\frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

- Z rovnice pro inverzi dostaneme:

$$I_0 = \left(\frac{W\tau_{21}}{N_0} - 1\right) I_s$$

Stacionární řešení rychlostních rovnic

- V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s}\frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

- Z rovnice pro inverzi dostaneme:

$$I_0 = \left(\frac{W\tau_{21}}{N_0} - 1\right) I_s$$

- Aby byla ustálená hodnota $I_0 > 0$, musí čerpací rychlost přesahovat určité minimum – práh:

$$W_0 = \frac{N_0}{\tau_{21}}\,, \quad \text{přitom z rovnice pro intenzitu} \Rightarrow N_0 = \text{const.} = \frac{1}{\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

Stacionární řešení rychlostních rovnic

- V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s}\frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

- Z rovnice pro inverzi dostaneme:

$$I_0 = \left(\frac{W\tau_{21}}{N_0} - 1\right) I_s$$

- Aby byla ustálená hodnota $I_0 > 0$, musí čerpací rychlost přesahovat určité minimum – práh:

$$W_0 = \frac{N_0}{\tau_{21}}, \quad \text{přitom z rovnice pro intenzitu} \Rightarrow N_0 = \text{const.} = \frac{1}{\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

- Potom nad prahem generace ($I_0 > 0$, $W > W_0$):

$$I_0 = \left(\frac{W}{W_0} - 1\right) I_s = (W - W_0)\frac{I_s}{W_0} \quad \text{a} \quad W_0 = \frac{1}{\tau_{21}\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

Stacionární řešení rychlostních rovnic

- V rovnovážném stavu při konstantním buzení W bude

$$\frac{dN_0}{dt} = 0 = W - \frac{N_0}{\tau_{21}} - \frac{I_0}{I_s}\frac{N_0}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI_0}{dt} = 0 = \mu c \sigma_{21} N_0 I_0 - \frac{I_0}{\tau_c}$$

- Z rovnice pro inverzi dostaneme:

$$I_0 = \left(\frac{W\tau_{21}}{N_0} - 1\right) I_s$$

- Aby byla ustálená hodnota $I_0 > 0$, musí čerpací rychlost přesahovat určité minimum – práh:

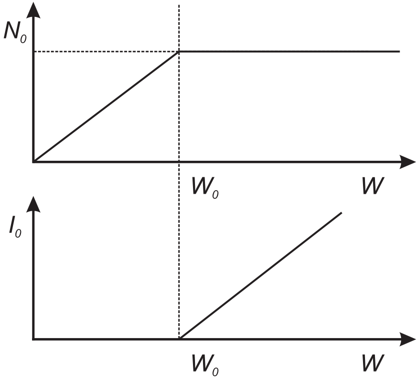
$$W_0 = \frac{N_0}{\tau_{21}}, \quad \text{přitom z rovnice pro intenzitu} \Rightarrow N_0 = \text{const.} = \frac{1}{\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

- Potom nad prahem generace ($I_0 > 0$, $W > W_0$):

$$I_0 = \left(\frac{W}{W_0} - 1\right) I_s = (W - W_0)\frac{I_s}{W_0} \quad \text{a} \quad W_0 = \frac{1}{\tau_{21}\tau_c \mu c \sigma_{21}}$$

- Pod prahem generace ($I_0 = 0$, $W < W_0$) roste N_0 s čerpáním:

$$N_0 = W\tau_{21}$$



$$I_0 = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad W \leq W_0 \\ I_s \left(W - W_0\right)/W_0 & \text{pro} \quad W \geq W_0 \end{cases}$$

$$N_0 = \begin{cases} W\tau_{21} & \text{pro} \quad W \leq W_0 \\ 1/\tau_c \sigma \mu c & \text{pro} \quad W \geq W_0 \end{cases}$$

Výstupní charakteristika laseru v kontinuálním režimu

- Stacionární intenzita uvnitř rezonátoru

$$I_0 = \frac{I_s}{W_0}\left(W - W_0\right)$$

Výstupní charakteristika laseru v kontinuálním režimu

- Stacionární intenzita uvnitř rezonátoru

$$I_0 = \frac{I_s}{W_0}(W - W_0)$$

- V případě, že je zrcadlo málo propustné (R se blíží k 1), pak pro intenzitu generovaného laserového záření I_{out} platí:

$$I_{out} \doteq \frac{1-R}{2} I_0.$$

Výstupní charakteristika laseru v kontinuálním režimu

- Stacionární intenzita uvnitř rezonátoru

$$I_0 = \frac{I_s}{W_0}(W - W_0)$$

- V případě, že je zrcadlo málo propustné (R se blíží k 1), pak pro intenzitu generovaného laserového záření I_{out} platí:

$$I_{out} \doteq \frac{1-R}{2} I_0.$$

- Pro nízké hodnoty populace excitovaných hladin, kdy je rychlost buzení jen nepatrně závislá na jejich obsazení, dostaneme lineární výstupní výkonovou charakteristiku laseru:

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

Výstupní charakteristika laseru v kontinuálním režimu

- Stacionární intenzita uvnitř rezonátoru

$$I_0 = \frac{I_s}{W_0}(W - W_0)$$

- V případě, že je zrcadlo málo propustné (R se blíží k 1), pak pro intenzitu generovaného laserového záření I_{out} platí:

$$I_{out} \doteq \frac{1 - R}{2} I_0.$$

- Pro nízké hodnoty populace excitovaných hladin, kdy je rychlost buzení jen nepatrně závislá na jejich obsazení, dostaneme lineární výstupní výkonovou charakteristiku laseru:

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

- P_{out}, P_{in} a P_{th} je postupně výstupní výkon generovaného záření, výkon buzení a prahový výkon buzení a σ_s je tzv. diferenciální účinnost laseru, nebo také strmost výstupní charakteristiky.

Shrnutí

- Šíření impulzů rezonančním prostředím v poloklasické aproximaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

Shrnutí

- Šíření impulzů rezonančním prostředím v poloklasické aproximaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c \sigma_{21} N I - \frac{I}{\tau_c}$$

Shrnutí

- Šíření impulzů rezonančním prostředím v poloklasické aproximaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c \sigma_{21} N I - \frac{I}{\tau_c}$$

- Stacionární řešení. Prahová podmínka. Výstupní výkonová charakteristika laseru.

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

Shrnutí

- Šíření impulzů rezonančním prostředím v poloklasické aproximaci

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

- Rychlostní rovnice pro laser s krátkým rezonátorem

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_{21}} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_{21}}$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu c \sigma_{21} N I - \frac{I}{\tau_c}$$

- Stacionární řešení. Prahová podmínka. Výstupní výkonová charakteristika laseru.

$$P_{out} \doteq \sigma_s (P_{in} - P_{th}),$$

- Příště: Přechodové jevy v režimu volné generace. Metody generace nanosekundových impulsů. Q-spínání. Spínání ziskem

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://space.fjfi.cvut.cz/web/sulc/ulat/
- Přednášky: http://space.fjfi.cvut.cz/web/sulc/FLA/