

Úvod do laserové techniky
Světlo jako elektromagnetické záření
II. část

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické v Praze
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

6. října 2016

Ing. Jan Šulc, Ph.D.

jan.sulc@fjfi.cvut.cz
Trojanova, místnost 237
Tel.: 224 358 672

Prof. Ing. Helena Jelínková, DrSc.

helena.jelinkova@fjfi.cvut.cz
Trojanova, místnost 236
Tel.: 224 358 538

Ing. Michal Němec, Ph.D.

michal.nemec@fjfi.cvut.cz
Trojanova, místnost 237
Tel.: 224 358 672

Materiály k přednášce a k cvičení: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ult/>

Světlo jako elektromagnetické záření – opakování

- ▶ Světlo – elektromagnetická vlna \times částice (foton)
- ▶ Periodické harmonické kmity *elektrického a magnetického pole*

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \Phi)$$

- ▶ Amplituda \times fáze, fázový člen, fázová konstanta Φ , vlnoplocha
 - ▶ Frekvence f , kruhová frekvence $\omega = 2\pi f \times$ perioda $T = f^{-1}$
 - ▶ Rychlost šíření c , vlnové číslo $k = \omega/c$, vlnový vektor \vec{k} , směr šíření
 - ▶ Vlnová délka $\lambda = cT = c/f$
 - ▶ Polarizace \vec{i}_y – lineární \times eliptická (kruhová)
- ▶ Intenzita elektrického pole E [V/m] \times Intenzita záření I [W/m²]

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon E_0^2$$

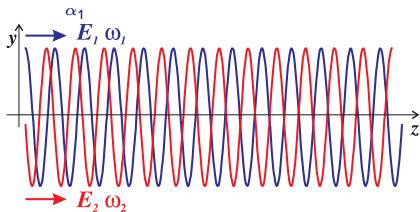
- ▶ *Superpozice* elektromagnetických vln – interferenční jevy

Příklad superpozice dvou vlnění

Dvě elemag. vlny **různých** frekvencí, ale **stejně** polarizace a směru šíření

- ▶ Pracujeme s elektrickou složkou pole (magnetické umíme dopočítat)

$$\vec{E}_1(x, y, z, t) = \vec{t}_y E_0 \cos(\underbrace{\omega_1 t - k_1 z + \Phi_1}_{\alpha_1}), \quad \vec{E}_2(x, y, z, t) = \vec{t}_y E_0 \cos(\underbrace{\omega_2 t - k_2 z + \Phi_2}_{\alpha_2})$$



- ▶ Provedeme superpozici v každém čase a bodě

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{t}_y E_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

- ▶ Využili jsme součtový vzorec pro \cos

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

Příklad superpozice dvou vlnění (stejný směr, různé frekvence)

- ▶ Matematický popis pole vzniklého superpozicí

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{i}_y E_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

- ▶ Upravíme nové fázové členy (původní $\alpha_{1,2} = \omega_{1,2}t - k_{1,2}z + \Phi_{1,2}$)

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\bar{\omega}} t - \underbrace{\frac{k_1 + k_2}{2}}_{\bar{k}} z + \underbrace{\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}}_{\bar{\Phi}} \quad (\text{průměr})$$

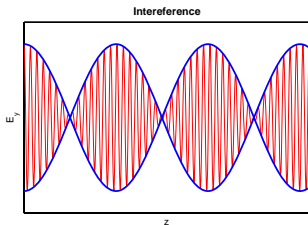
$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\Delta\omega/2} t - \underbrace{\frac{k_1 - k_2}{2}}_{\Delta k/2} z + \underbrace{\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}}_{\Delta\Phi/2} \quad (\text{rozdíl})$$

- ▶ Výsledné pole

$$\vec{E} = \vec{i}_y 2E_0 \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z + \frac{\Delta\Phi}{2} \right) \cos (\bar{\omega}t - \bar{k}z + \bar{\Phi})$$

Příklad superpozice dvou vlnění (stejný směr, různé frekvence)

$$\vec{E} = \vec{i}_y 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z + \frac{\Delta\Phi}{2}\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z + \bar{\Phi})$$



Zázněje pro $\omega_1 \doteq \omega_2$ je $\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$, resp. $\Delta k \ll k_1, k_2$ – amplitudová periodická modulace pole vznikající v důsledku **superpozice**

$$\vec{E} = \vec{i}_y A(z, t) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z + \bar{\Phi})$$

Rychlost fázová rychlost **šíření nosné vlny** (vlnoplochy) prostředím

$$\bar{\omega}t - \bar{k}z = 0 \Rightarrow v_f \equiv \frac{z}{t} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \bar{v}\bar{\lambda}$$

Rychlost grupová rychlost šíření maxima obálky (impulsu) – energie

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z = 0 \Rightarrow v_g \equiv \frac{z}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

Příklad superpozice dvou vlnění

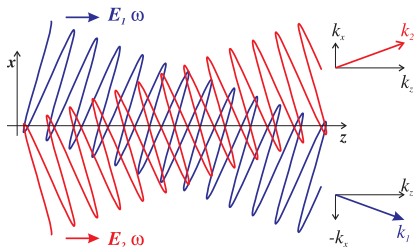
Stejné frekvence a polarizace, šíření v různých směrech

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{y} E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \Phi_1)$$

$$\vec{k}_1 = (-k_x, 0, k_z)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{y} E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \Phi_2)$$

$$\vec{k}_2 = (k_x, 0, k_z)$$



- Výsledné pole

$$\vec{E} = \vec{y} 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\vec{k}}{2} \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\Phi}{2}\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{\vec{k}} \cdot \vec{r} + \bar{\Phi})$$

- Stejné frekvence ($\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$)

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 0, \quad \bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2 = \omega$$

- Různé směry: $\vec{k}_1 = (-k_x, 0, k_z)$ – šíří se podél osy z mírně dolů pod úhlem θ ,
 $\vec{k}_2 = (k_x, 0, k_z)$ – šíří se podél osy z mírně vzhůru pod úhlem θ ,

$$\frac{\Delta\vec{k}}{2} = \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} = (-k_x, 0, 0), \quad \bar{\vec{k}} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} = (0, 0, k_z)$$

Příklad superpozice dvou vlnění (stejná frekvence, různý směr)

- Výsledné pole

$$\vec{E} = \vec{i}_y 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\vec{k}}{2} \cdot \vec{r} + \frac{\Delta\Phi}{2}\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k} \cdot \vec{r} + \bar{\Phi})$$

- Po dosazení: $\Delta\omega = 0$, $\bar{\omega} = \omega$, $\Delta\vec{k}/2 = (-k_x, 0, 0)$, $\bar{k} = (0, 0, k_z)$, $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \underbrace{\vec{i}_y 2E_0 \cos\left(k_x x + \frac{\Delta\Phi}{2}\right)}_{A(x)} \underbrace{\cos(\omega t - k_z z + \bar{\Phi})}_{\text{vlna ve směru osy } z}$$

- Amplituda nové vlny $A(x)$ je modulovaná ve směru osy x
- Intenzita záření I je úměrná $A^2(x)$

$$I(x) = \frac{1}{2} c \varepsilon A^2(x) = \frac{1}{2} c \varepsilon 4E_0^2 \cos^2\left(k_x x + \frac{\Delta\Phi}{2}\right) = c \varepsilon E_0^2 [1 + \cos(2k_x x + \Delta\Phi)]$$

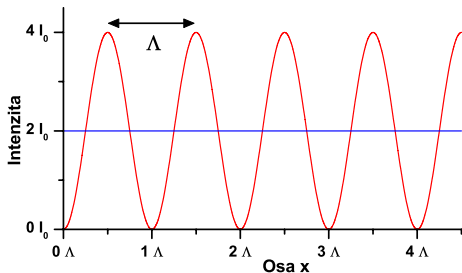
$$I(x) = 2I_0 + \underbrace{2I_0 \cos(2k_x x + \Delta\Phi)}_{\text{interferenční člen}}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon E_0^2 \quad (\text{intenzita jedné samostatné vlny})$$

Příklad superpozice dvou vlnění (stejná frekvence, různý směr)

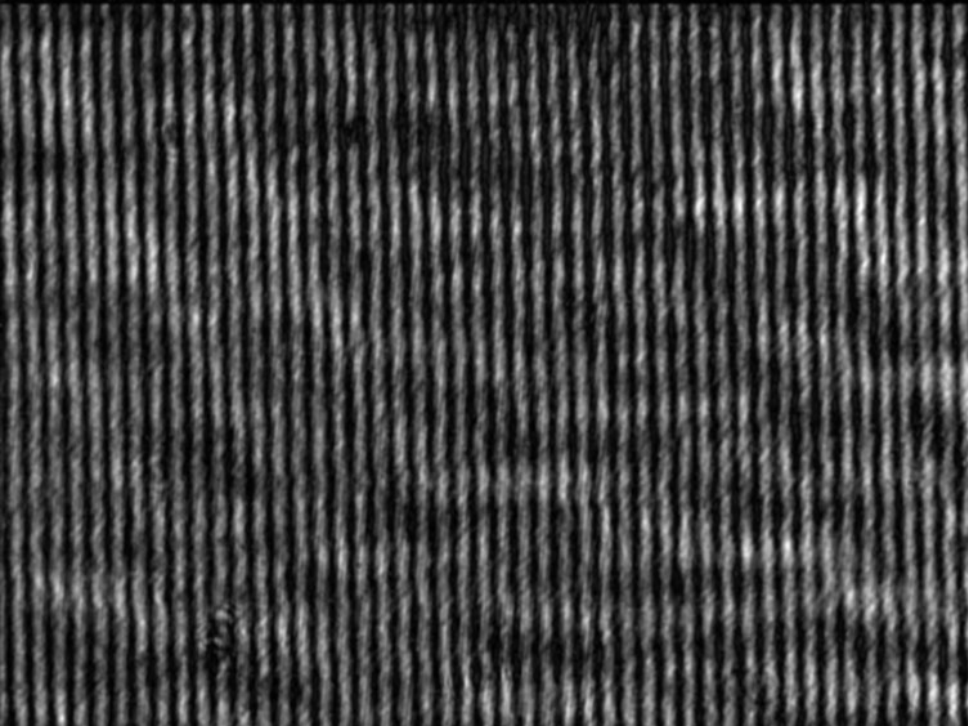
► Intenzita

$$I(x) = 2I_0 + \underbrace{2I_0 \cos(2k_x x + \Delta\Phi)}_{\text{interferenční člen}}$$



► Vzdálenost maxim (minim) interferenčních proužků $2k_x\Lambda = 2\pi$:

$$\Lambda = \frac{\pi}{k_x} = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

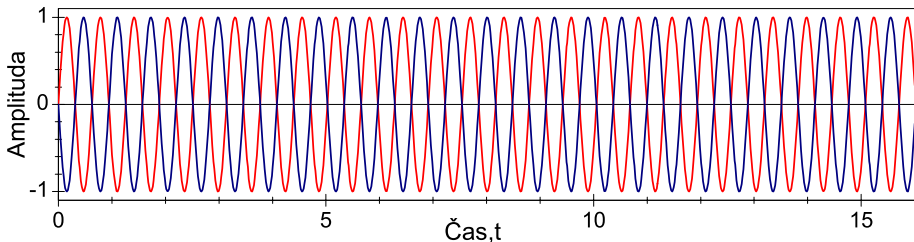


Koherence optického záření

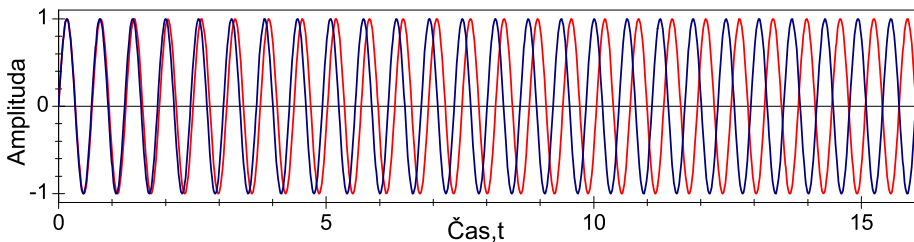
- ▶ **Koherence** – uspořádanost, souvislost
- ▶ Každé optické pole může být charakterizováno jistým parametrem, který určuje míru statistické neuspořádanosti.
- ▶ Koherence optického záření = míra jeho statistického uspořádání.
- ▶ Jestliže frekvence, polarizace nebo fáze skládajících se vln nejsou navzájem nijak vázány, vzniká velmi neuspořádané elektromagnetické pole. Má charakter náhodných fluktuací (šumů). Takové optické záření označujeme jako *nekoherentní*.
- ▶ Pokud jsou jednotlivé složky pole vzájemně vázány (korelovány), má výsledné pole uspořádanější strukturu a mluvíme o něm jako o poli *koherentním*.
- ▶ Koherentní jsou světelná vlnění stejné frekvence, jejichž fázový rozdíl je v uvažovaném bodě prostoru konstantní.
- ▶ Koherence je základním předpokladem pozorovatelné interference světla.
- ▶ Zdroje, které vysílají nekoherentní záření, nazýváme nekoherentními zdroji (Slunce, žárovka, výbojka).
- ▶ Příkladem zdrojů koherentního záření jsou laser a parametrický generátor.
- ▶ koherenční doba, koherenční délka, koherenční plocha
- ▶ časová \times prostorová koherence

Časová koherence optického záření

- ▶ Časově koherentní vlny – zachovávají si konstantní rozdíl fáze

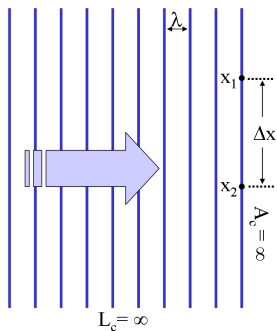


- ▶ Vlny částečně koherentní – postupně se fázový rozdíl zvětšuje

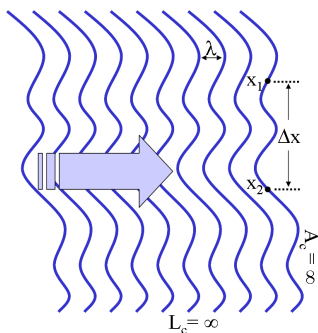


Prostorová koherence optického záření

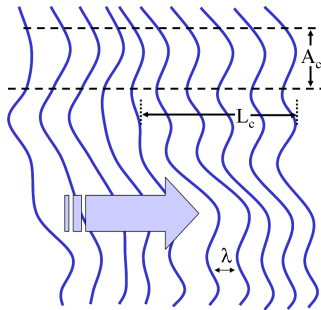
Prostorová koherence vzájemná uspořádanost vlnoploch



- ▶ Prostorově koherentní rovinná vlna



- ▶ Prostorově koherentní obecná vlnoplocha



- ▶ Částečně koherentní obecná vlnoplocha

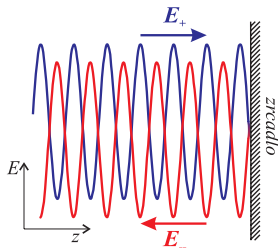
Superpozice vln před zrcadlem

- ▶ Vlna šířící se směrem k zrcadlu $\vec{k}_+ = (0, 0, k)$

$$\vec{E}_+(\vec{r}, t) = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi_+)$$

- ▶ Vlna po odrazu (beze ztrát) šířící se směrem od zrcadla $\vec{k}_- = (0, 0, -k)$

$$\vec{E}_-(\vec{r}, t) = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t + kz + \Phi_-)$$



- ▶ Výsledné pole

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \vec{i}_y 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z + \frac{\Delta\Phi}{2}\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z + \bar{\Phi})$$

- ▶ Stejná frekvence

$$\Delta\omega = 0, \bar{\omega} = \omega$$

- ▶ Různé směry (opačné, $\vec{k}_- = -\vec{k}_+$):

$$\frac{\Delta k}{2} = (0, 0, k), \bar{k} = (0, 0, 0)$$

- ▶ Výsledná vlna je „**vlna stojatá**“ – uzly & kmitny (v místě zrcadla uzel)

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \vec{i}_y 2E_0 \underbrace{\cos\left(kz - \frac{\Delta\Phi}{2}\right)}_{\text{modulace v prostoru}} \underbrace{\cos(\omega t + \bar{\Phi})}_{\text{modulace v čase}}$$

- ▶ Výsledná vlna je „**vlna stojatá**“ – uzly & kmitny (v místě zrcadla uzel)

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \vec{i}_y 2E_0 \underbrace{\cos\left(kz - \frac{\Delta\Phi}{2}\right)}_{\text{modulace v prostoru}} \underbrace{\cos(\omega t + \bar{\Phi})}_{\text{modulace v čase}}$$

- ▶ Stojatá vlna – na rozdíl od postupné vlny je závislost na čase a prostoru v argumentu jiné harmonické funkce, uzly a kmitny se nepohybují

Fabryův-Perotův rezonátor (FPR)

- ▶ Dvě polopropustná nekonečně rozlehlá zrcadla umístěná rovnoběžně ve volném prostoru – nejjednodušší otevřený rezonátor

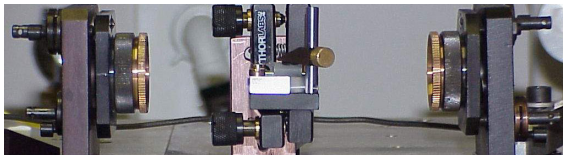
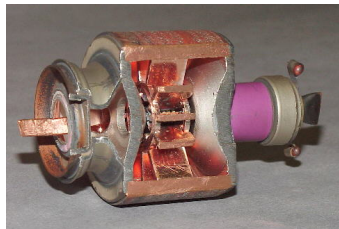
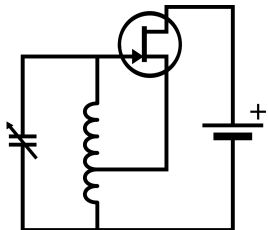
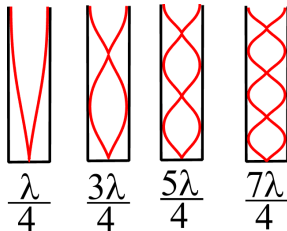
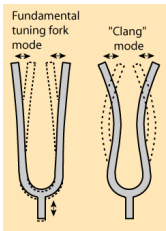
Rezonátor Obecně těleso schopné akumulace energie, které může být zdrojem kmitů, působí-li na něj periodická vnější síla. Kmitání rezonátoru vyvolané touto vnější silou se nazývá vynucené. Amplituda vynucených kmitů prudce stoupá, přibližuje-li se frekvence vnějšího působení tzv. *vlastním (rezonančním) frekvencím* rezonátoru.

Otevřený rezonátor Soustava odrazných ploch a opt. prvků, ve které může být vybuze no stojaté vlnění s vlnovou délkou podstatně menší, než jsou geometrické rozměry prvků a vzdálenost mezi nimi. *Otevřený rezonátor je nedílnou součástí laseru, kde vytváří kladnou zpětnou vazbu.*

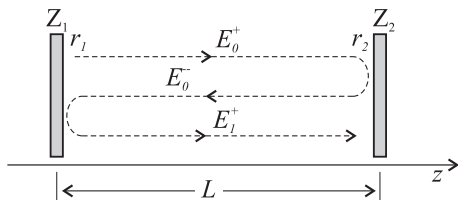
Optický rezonátor Otevřený rezonátor s vlastními frekvencemi odpovídajícími frekvencím optického záření.

- ▶ Uvnitř FPR dochází k interferenci nekonečného počtu vln vzniklých mnohonásobnými odrazy uvnitř FPR
- ▶ Intenzita záření prošlého FPR či odraženého od FPR závisí na vzájemné vzdálenosti odrazných ploch FPR, na vlnové délce dopadajícího záření a na úhlu dopadu záření na FPR
- ▶ Rezonance, rezonanční frekvence, fázové zpoždění

Rezonátory a oscilátory



Superpozice vln ve Fabryově-Perotově rezonátoru



FPR: zrcadla Z_1, Z_2
vzdálenost mezi nimi L
amplitudová odrazivost zrcadel r_1, r_2 .

- ▶ Vlna šířící se FPR zleva doprava:

$$\vec{E}_0^+ = \vec{i}_y E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi_+)$$

- ▶ Po odrazu od Z_2 :

$$\vec{E}_0^- = \vec{i}_y r_2 E_0 \cos(\omega t + kz + \Phi_-)$$

- ▶ Po odrazu od Z_1 :

$$\vec{E}_1^+ = \vec{i}_y r_1 r_2 E_0 \cos(\omega(t - \tau) + kz + \Phi_+ + \Delta_{12})$$

- ▶ časové zpoždění na jeden průchod $\tau = 2L/c$, Δ_{12} fázová změna při odrazu
- ▶ Složením \vec{E}_0^+ a \vec{E}_1^+ :

$$\vec{E}_0^+ + \vec{E}_1^+ = \vec{i}_y \underbrace{E_0 \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos \delta}}_{\text{amplituda vlny } A(x)} \cos(\omega t - kz + \Phi_+ + \beta)$$

Superpozice vln ve Fabryově-Perotově rezonátoru

- ▶ Pole v rezonátoru

$$\vec{E}_0^+ + \vec{E}_1^+ = \underbrace{\vec{i}_y E_0 \sqrt{1 + R^2 + 2R\cos(\delta)}}_{\text{amplituda vlny } A(x)} \cos(\omega t - kz + \Phi_+ + \beta)$$

kde $R = r_1 r_2$ je odrazivost pro intenzitu záření, $\delta = \omega\tau + \Delta_{12}$ fázové zpoždění po oběhu rezonátorem

- ▶ Amplituda vlny $A(x)$ bude maximální, pokud $\cos(\delta)$ bude co největší, tj. pokud $\delta = 2n\pi$ (n je libovolné celé číslo)
- ▶ Zanedbáme Δ_{12} vzhledem k $\omega\tau$. Podmínka maximalizace $A(x)$:

$$\delta = \omega \frac{2L}{c} = 2n\pi$$

- ▶ Podmínka **rezonance** – na jeden oběh rezonátoru ($2L$) připadá **sudý počet půlvln** (pole v rezonátoru úměrné $1/(1 - R)$)

$$2L = 2n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \nu_n = \frac{nc}{2L} \text{ (} n\text{-tá rezonanční frekvence),} \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L}$$

- ▶ Rozladění nastává pro lichý počet půlvln na oběh rezonátorem $\delta = (2n + 1)\pi$ (pole v rezonátoru úměrné $1/(1 + R)$)

Ztráty optického rezonátoru

- ▶ Energie, kterou lze uložit v rezonátoru je úměrná objemu tohoto rezonátoru
- ▶ Relaxace energie, **doba života fotonu v rezonátoru** τ_c , ztráty rezonátoru

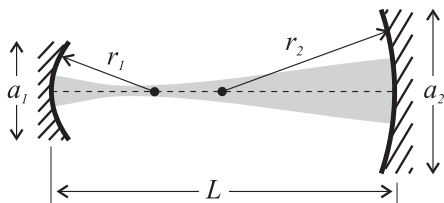
$$U(t) = U(0) \exp\left[-\frac{t}{\tau_c}\right], \quad \tau_c = \frac{2L}{c} \frac{1}{\ln \frac{1}{R_1 R_2}}$$

- ▶ **Činitel jakosti** rezonátoru Q – poměr energie uložené v rezonátoru ku energii uvolněné z rezonátoru za „periodu“ vlastních kmitů $1/\omega_{rez}$

$$Q = \frac{U(0)}{U(0) - U(1/\omega_{rez})} = \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{1}{\omega_{rez}\tau_c}\right]} \doteq \omega_{rez}\tau_c = 2\pi\nu_n\tau_c$$

- ▶ Čím menší ztráty rezonátoru ($R_1, R_2 \rightarrow 1$), tím větší τ_c a Q

Otevřený rezonátor, Sférické otevřené rezonátory



L – délka rezonátoru

r_1, r_2 – poloměr křivosti zrcadel

a_1, a_2 – charakteristický rozměr zrcadel
(průměr, délka hrany...)

- ▶ Obvykle se rezonátor pro zvýšení stability realizuje pomocí kulových zrcadel
- ▶ Pasivní ztráty \times činné ztráty \times difrakční ztráty
- ▶ Fresnelovo číslo

$$N_F = \frac{a_1 a_2}{4\lambda L}$$

- ▶ Geometrické podobnostní parametry rezonátoru (rovinné zrcadlo má $r = \infty$)

$$G_1 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \left(1 - \frac{L}{r_1} \right)$$

$$G_2 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \left(1 - \frac{L}{r_2} \right)$$

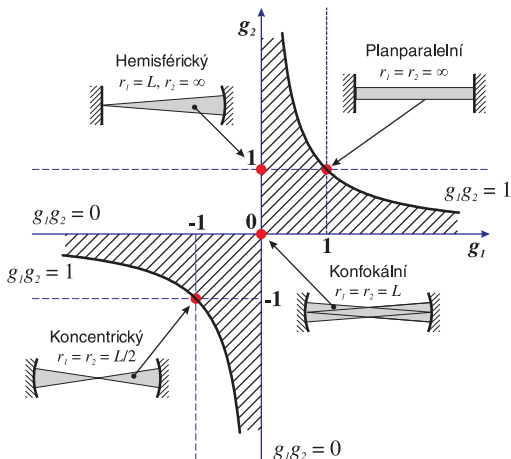
- ▶ Ekvivalentní rezonátory – mají stejné hodnoty G_1, G_2 a N_F

Diagram stability pro otevřený sférický rezonátor

- ▶ Stabilní × nestabilní rezonátory, **podmínka stability** $0 < g_1 g_2 < 1$






$$g_1 = 1 - \frac{L}{r_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{r_2}$$

- ▶ **Diagram stability** – grafické vyjádření podmínky stability $0 < g_1 g_2 < 1$



- ▶ **Uvnitř** šrafované oblasti jsou rezonátory stabilní.
- ▶ **Mimo** šrafovanou oblast jsou nestabilní.
- ▶ **Na hranici** jsou stabilní rezonátory citlivé na rozladění.

- ▶ Světlo – elektromagnetická vlna \times částice (foton)
- ▶ Intenzita elektrického pole E [V/m] \times Intenzita záření I [W/m²]
- ▶ *Superpozice* elektromagnetických vln – **interferenční jevy**
- ▶ Koherence optického záření
- ▶ Rezonátor \times **optický rezonátor**
- ▶ **Rezonance** – při jednom oběhu se v rezonátoru se naskládá sudý počet půlvln (pro lineární rezonátor $2L =$ celočíselný násobek vlnových délek)
- ▶ Ztráty, doba života fotonu v rezonátoru
- ▶ Stabilita rezonátoru, diagram stability

-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 (<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjn1/ult/>)
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  Sochor V.: *Lasery a koherentní svazky*, Academia, Praha, 1990 (<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjn1/ult/>)
-  Engst P., Horák M.: *Aplikace laserů*, SNTL, Praha, 1989 (<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjn1/ult/>)
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjn1/ult/>