Fyzika laserů – cvičení

Rovnice poloklasické teorie interakce látky a záření

J. Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické

19. března 2008

Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom ve vnějším poli

- Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom v silném vnějším elektromagnetickém poli:

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} - \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{12} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{12}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} + \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{21} - \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{21}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{4}$$

Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom ve vnějším poli

- Pauliho rovnice pro tlumený dvouhladinový atom v silném vnějším elektromagnetickém poli:

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} - \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{12} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{12}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\left(\Gamma_{21} + \mathrm{i}\omega_{21}\right)\rho_{21} - \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{d}_{21}(\rho_{22} - \rho_{11}) \tag{4}$$

- Cílem je napsat rovnice pro měřitelné veličiny – polarizaci prostředí $\langle \hat{\vec{d}}\, \rangle = \vec{d}_{21}\varrho_{12} + \vec{d}_{12}\varrho_{21}$ a inverzi populaci hladin $\langle \hat{n} \rangle = (\varrho_{22} - \varrho_{11})$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Rovnice pro diagonální prvky

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i} \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12} \rho_{21} - \vec{d}_{21} \rho_{12}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i} \frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21} \rho_{12} - \vec{d}_{12} \rho_{21}) \tag{6}$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Rovnice pro diagonální prvky

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{6}$$

- dosadíme do zderivaveného vztahu pro inverzi populace hladin $\langle \hat{n} \rangle = (\varrho_{22} - \varrho_{11})$

$$\frac{\partial \langle \hat{n} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \varrho_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \varrho_{11}}{\partial t} = 2\Gamma_1 \varrho_{11} - 2\Gamma_2 \varrho_{22} + 2\mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\varrho_{12} - \vec{d}_{12}\varrho_{21})$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Rovnice pro diagonální prvky

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{6}$$

- dosadíme do zderivavaného vztahu pro inverzi populace hladin $\langle \hat{n} \rangle = (\varrho_{22} - \varrho_{11})$

$$\frac{\partial \langle \hat{n} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \varrho_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \varrho_{11}}{\partial t} = 2\Gamma_1 \varrho_{11} - 2\Gamma_2 \varrho_{22} + 2\mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\varrho_{12} - \vec{d}_{12}\varrho_{21})$$

- Využijeme dříve odvozený vztah:

$$(\vec{d}_{21}\varrho_{12} - \vec{d}_{12}\varrho_{21}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_{21}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21} \right) \langle \hat{\vec{d}}\, \rangle \tag{7}$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Rovnice pro diagonální prvky

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_2 \rho_{22} - \Gamma_1 \rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{12}\rho_{21} - \vec{d}_{21}\rho_{12}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \Gamma_1 \rho_{11} - \Gamma_2 \rho_{22} + \mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\rho_{12} - \vec{d}_{12}\rho_{21}) \tag{6}$$

- dosadíme do zderivaveného vztahu pro inverzi populace hladin $\langle \hat{n} \rangle = (\varrho_{22} - \varrho_{11})$

$$\frac{\partial \langle \hat{n} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \varrho_{22}}{\partial t} - \frac{\partial \varrho_{11}}{\partial t} = 2\Gamma_1 \varrho_{11} - 2\Gamma_2 \varrho_{22} + 2\mathrm{i}\frac{\vec{E}}{\hbar} \cdot (\vec{d}_{21}\varrho_{12} - \vec{d}_{12}\varrho_{21})$$

- Využijeme dříve odvozený vztah:

$$(\vec{d}_{21}\varrho_{12} - \vec{d}_{12}\varrho_{21}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega_{21}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21} \right) \langle \hat{\vec{d}} \rangle \tag{7}$$

- Dostaneme:

$$\frac{\partial \langle \hat{n} \rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1 \varrho_{11} - 2\Gamma_2 \varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21} \right) \langle \hat{\vec{d}} \rangle$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Máme

$$\frac{\partial\langle\hat{n}\rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Máme

$$\frac{\partial\langle\hat{n}\rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle$$

- Využijeme vztah pro $2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22}$

$$2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} = -\Gamma\left(\langle\hat{n}\rangle - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right),$$

kde $\langle\hat{n}\rangle = \varrho_{22} - \varrho_{11}$, $1 = \varrho_{11} + \varrho_{22}$ a $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Máme

$$\frac{\partial\langle\hat{n}\rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle$$

- Využijeme vztah pro $2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22}$

$$2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} = -\Gamma\left(\langle\hat{n}\rangle - \frac{\Gamma_1-\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\right),$$

  kde $\langle\hat{n}\rangle = \varrho_{22} - \varrho_{11}$, $1 = \varrho_{11} + \varrho_{22}$ a $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

- Pro parametr Γ_1 pro dvouhladinový systém platí:

$$\Gamma_1 = w_{21} = w_{12}\mathrm{e}^{-\beta(E_2-E_1)} = \Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2-E_1)}.$$

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Máme

$$\frac{\partial\langle\hat{n}\rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle$$

- Využijeme vztah pro $2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22}$

$$2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} = -\Gamma\left(\langle\hat{n}\rangle - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right),$$

kde $\langle\hat{n}\rangle = \varrho_{22} - \varrho_{11}$, $1 = \varrho_{11} + \varrho_{22}$ a $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

- Pro parametr Γ_1 pro dvouhladinový systém platí:

$$\Gamma_1 = w_{21} = w_{12}\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} = \Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)}.$$

- Po dosazení do členu $(\Gamma_1 - \Gamma_2)/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ dostaneme:

$$\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \frac{\Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} - \Gamma_2}{\Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} + \Gamma_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} - 1}{\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_2} - \mathrm{e}^{-\beta E_1}}{\mathrm{e}^{-\beta E_1} + \mathrm{e}^{-\beta E_2}} = \langle\hat{n}^{SS}\rangle$$

kde $\langle\hat{n}^{SS}\rangle$ je populace hladin dvouhladinového systému ve stacionárním stavu

Odvození rovnice pro inverzi populace hladin

- Máme
$$\frac{\partial\langle\hat{n}\rangle}{\partial t} = 2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} + \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_{21}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle$$
- Využijeme vztah pro $2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22}$
$$2\Gamma_1\varrho_{11} - 2\Gamma_2\varrho_{22} = -\Gamma\left(\langle\hat{n}\rangle - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right),$$
kde $\langle\hat{n}\rangle = \varrho_{22} - \varrho_{11}$, $1 = \varrho_{11} + \varrho_{22}$ a $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$
- Pro parametr Γ_1 pro dvouhladinový systém platí:
$$\Gamma_1 = w_{21} = w_{12}\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} = \Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)}.$$
- Po dosazení do členu $(\Gamma_1 - \Gamma_2)/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ dostaneme:
$$\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \frac{\Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} - \Gamma_2}{\Gamma_2\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} + \Gamma_2} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} - 1}{\mathrm{e}^{-\beta(E_2 - E_1)} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_2} - \mathrm{e}^{-\beta E_1}}{\mathrm{e}^{-\beta E_1} + \mathrm{e}^{-\beta E_2}} = \langle\hat{n}^{SS}\rangle$$
kde $\langle\hat{n}^{SS}\rangle$ je populace hladin dvouhladinového systému ve stacionárním stavu
- Tedy:
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_1}\right)\left(\langle\hat{n}\rangle - \langle\hat{n}^{SS}\rangle\right) = \frac{2\vec{E}}{\hbar\omega_{21}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T_2}\right)\langle\hat{\vec{d}}\,\rangle,$$
kde $T_1 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)^{-1}$ je *podélná relaxační doba*