

# Fyzika laserů

Aproximace rychlostních rovnic

Metody generace nanosekundových impulsů. Q-spínání. Spínání ziskem

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky  
České vysoké učení technické  
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

18. března 2013

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. **Aplikace na laser – Q-spínání**
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

## Interakce rezonančního záření s prostředím poloklasicky

Záření elektromagnetická vlna, popisují MR **klasicky**

Prostředí soubor dvouhladinových **kvantových** soustav,  $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$

Interakce záření s hmotou prostřednictvím polarizace prostředí

Odezva prostředí 3 vektorové parciální nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  a  $N$ . Prostředí je pro rezonanční záření **disperzní** a **nelineární**

Signál pomalu proměnný impuls s harmonickou nosnou frekvencí  $\omega \gg T_{\text{imp}}^{-1}$  v rezonanci ( $\omega = \omega_{21}$ ) a bez fázové modulace  $\rightarrow$  tři rovnice pro obálku

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z'} = \frac{\mu_0 \omega_{21} c}{2} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial t'} = -\frac{\mathcal{P}_2}{T_2} - \frac{|d_{21}|^2}{\hbar} \mathcal{E} N$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} = -\frac{N - N_0}{T_1} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}_2$$

$T_2 \ll T_{\text{imp}} \ll T_1$  Aproximace rychlostních rovnic

$$\frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_1} - \frac{I}{I_s} \frac{N}{\tau_1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma \mu c N I - \frac{I}{\tau_c}$$

- ▶ V rychlostních rovnicích...

$$\frac{dI}{dt} = \sigma \mu c N I - \frac{I}{\tau_c}; \quad \frac{dN}{dt} = W - \frac{N}{\tau_1} - \frac{I N}{l_s \tau_1}$$

- ▶ jejichž stacionární řešení má tvar ( $l_0 > 0$ ):

$$N_0 = \frac{1}{\tau_c \mu c \sigma}, \quad W_0 = \frac{N_0}{\tau_{21}}, \quad l_0 = \left( \frac{W}{W_0} - 1 \right) l_s$$

- ▶ ... zavedeme nové bezrozměrné parametry a proměnné:

$$\mathcal{N} = \frac{N}{N_0} \rightarrow N = N_0 \mathcal{N}; \quad \mathcal{I} = \frac{I}{l_0} \rightarrow I = l_0 \mathcal{I}$$
$$\mathcal{W} = \frac{W}{W_0} \rightarrow W = W_0 \mathcal{W} \quad \mathcal{T} = \frac{t}{\tau_c} \rightarrow t = \tau_c \mathcal{T}$$

- ▶ Rychlostní rovnice mají s jejich použitím tvar ( $\eta = \tau_c / \tau_1$ ):

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\mathcal{T}} = (\mathcal{N} - 1) \mathcal{I}; \quad \frac{d\mathcal{N}}{d\mathcal{T}} = \eta \left[ \mathcal{W} - \mathcal{N} - (\mathcal{W} - 1) \mathcal{I} \mathcal{N} \right]$$

- ▶ Rovnice popisující dynamiku laseru ve fázové rovině  $\mathcal{N} - \mathcal{I}$ :

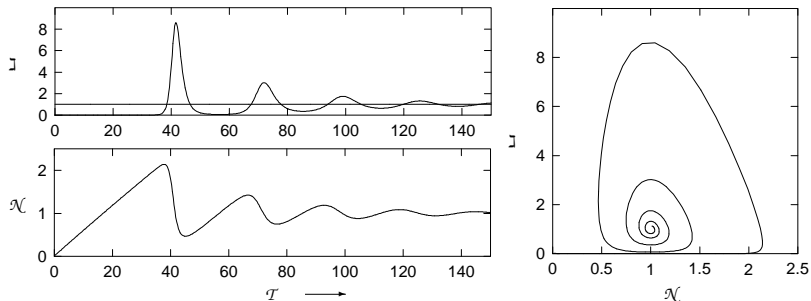
$$\frac{d\mathcal{I}}{d\mathcal{N}} = \frac{(\mathcal{N} - 1) \mathcal{I}}{\eta [\mathcal{W} - \mathcal{N} - (\mathcal{W} - 1) \mathcal{I} \mathcal{N}]}$$

# Rychlostní rovnice v režimu volné generace

- ▶ Normované rychlostní rovnice ( $\eta = \tau_c/\tau_1$ ):

$$\frac{dI}{dT} = (\mathcal{N} - 1)I; \quad \frac{d\mathcal{N}}{dT} = \eta \left[ \mathcal{W} - \mathcal{N} - (\mathcal{W} - 1)IN \right]$$

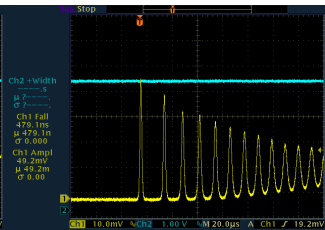
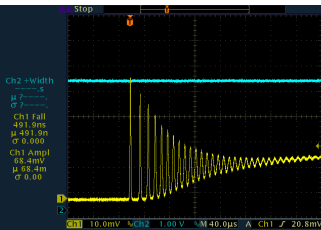
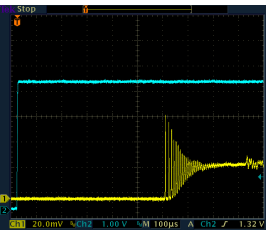
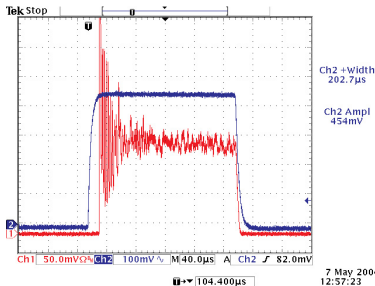
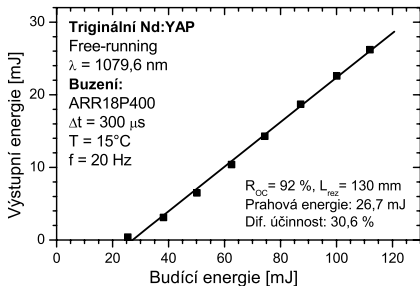
- ▶ Numerické řešení rychlostních rovnic pro  $\mathcal{W} = 30$ ,  $\eta = 2 \times 10^{-3}$



- ▶ Časový vývoj normované inverze populace hladin a intenzity laserového záření

# Rychlostní rovnice v režimu volné generace

- ▶ Příklad naměřené výstupní charakteristiky laseru pro kombinaci *výstupní zrcadlo – délka rezonátoru* s maximální výstupní energií a příklad časové struktury generovaného záření.



## Linearizace rychlostních rovnic

- ▶ Řešení už jen málo liší od stacionárního řešení, když  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{I} \approx 1$

$$\mathcal{N} = 1 + n, \quad n \ll 1,$$

$$\mathcal{I} = 1 + i, \quad i \ll 1.$$

- ▶ Linearizované rychlostní rovnice ve tvaru:

$$\frac{di}{dT} = n(1 + i) \approx n,$$

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dT} &= \eta [\mathcal{W} - 1 - n - (\mathcal{W} - 1)(1 + i)(1 + n)] = \\ &= -\eta [n + (\mathcal{W} - 1)(i + n + in)] \approx \\ &\approx -\eta [\mathcal{W}n + (\mathcal{W} - 1)i] \end{aligned}$$

- ▶ První rovnici derivujeme podle času  $\mathcal{T}$ , dosadíme za derivaci ze druhé a vyloučíme proměnnou  $n$ :

$$\frac{d^2i}{dT^2} = \frac{dn}{dT} = -\eta\mathcal{W}\frac{di}{dT} - \eta(\mathcal{W} - 1)i$$

- ▶ Odpovídá rovnici tlumených kmitů typu:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

- ▶ Řešení bude mít tvar tlumených harmonických kmitů:

$$y(t) = y(0)e^{-\gamma t} \cos \omega t,$$

kde  $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ .

- ▶ Tedy:

$$I(t) = I_0 + \tilde{I}(0)e^{-\Gamma t} \cos \Omega t,$$

$$N(t) = N_0 + \tilde{N}(0)e^{-\Gamma t} \sin \Omega t$$

- ▶ kde:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}}{T_1},$$

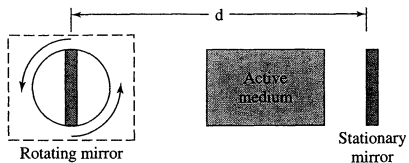
$$\Omega_0^2 = \frac{\mathcal{W} - 1}{T_1 \tau_c},$$

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 - \Gamma^2$$

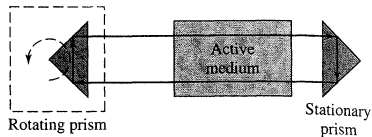


- ▶ Q-spínání je metoda, která umožňuje dosáhnout generace vysoce výkonných impulsů laserového záření s délkou od jednotek do stovek nanosekund.
- ▶ Základní princip mechanismu generace gigantických Q-spínaných impulsů spočívá v jednorázovém uvolnění energie nahromaděné v aktivním prostředí laseru.
- ▶ Ztráty rezonátoru jsou na počátku čerpání uměle zvýšeny  $\Rightarrow$  práh generace laseru zvýšen  $\Rightarrow$  je zabráněno vzniku relaxačních oscilací a nedochází ke generaci laserového záření ( $\mathcal{I} \approx 0$ )
- ▶ Ztráty rezonátoru jsou ve vhodný okamžik prudce sníženy na běžnou hodnotu a sníží se práh generace.
- ▶ V tomto okamžiku je  $N > N_0$  a tedy  $\mathcal{N} > 1$  a dochází k exponenciálnímu nárůstu intenzity laserového záření uvnitř rezonátoru  $\Rightarrow$  gigantický impuls.
- ▶ Po vyčerpání energie nahromaděné v inverzi populace hladin impuls dozrívá s časovou konstantou  $\tau_C$ .

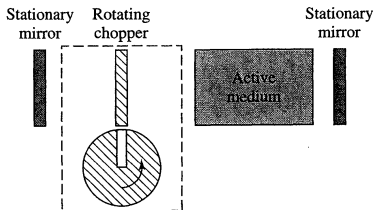
# Metody Q-spínání – mechanické



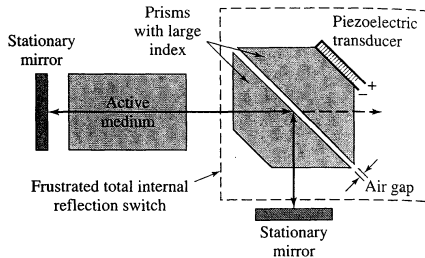
(a) A cavity with a rotating mirror



(b) A cavity with a rotating prism

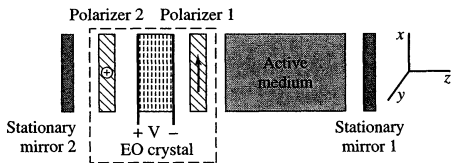


(c) A cavity with a rotating chopper

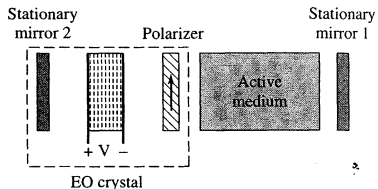


(d) A cavity with a frustrated total internal reflection switch

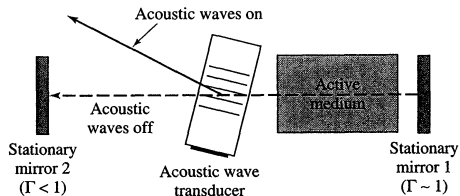
# Metody Q-spínání – elektronické a pasivní



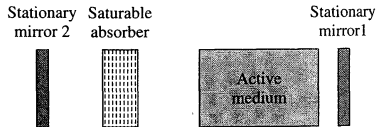
(e) An electrically controlled gate with a half-wave EO crystal and two polarizers with crossed transmission axes



(f) A polarizer, a quarter-wave EO crystal, and mirror 2 acting as an electrically controlled switch

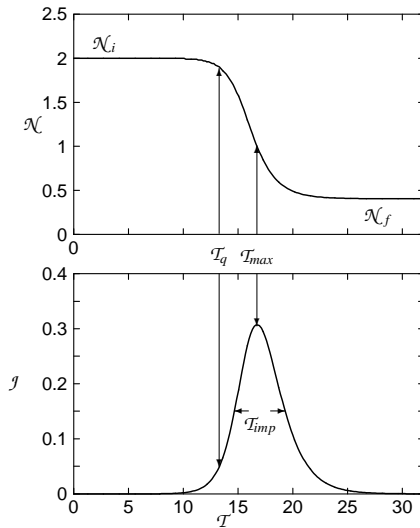


(g) Acoustooptic Q-switch



(h) A cavity with a saturable absorber

# Vybudování Q-spínaného impulsu



## Analytické řešení rychlostních rovnic pro Q-spínaný laser

- ▶ Normovaný tvar rychlostních rovnic

$$\frac{d\mathcal{I}}{dT} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{I}; \quad \frac{d\mathcal{N}}{dT} = \eta \left[ \mathcal{W} - \mathcal{N} - (\mathcal{W} - 1)\mathcal{I}\mathcal{N} \right]$$

- ▶ Proces generace Q-spínaného impulsu probíhá během doby srovnatelné s dobou života fotonu v laserovém oscilátoru
- ▶ Během této doby dojde pouze k nepatrné změně inverze populace hladin v důsledku čerpání a fluorescence ve srovnání s vlivem způsobeným prudkým nárůstem intenzity a proto budou při analytickém řešení tyto změny zanedbány

$$\frac{d\mathcal{I}}{dT} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{I}$$

$$\frac{d\mathcal{N}}{dT} = -\xi\mathcal{I}\mathcal{N}$$

kde

$$\xi = \eta(\mathcal{W} - 1)$$

- ▶ Zavedeme novou funkci pro intenzitu ve tvaru

$$\mathcal{J} = \xi\mathcal{I}$$

## Analytické řešení rychlostních rovnic pro Q-spínaný laser

- ▶ ... dostaneme rychlostní rovnice, jejich řešení je závislé pouze na počátečním stupni inverze:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dT} = (\mathcal{N} - 1)\mathcal{J}, \quad \frac{d\mathcal{N}}{dT} = -\mathcal{J}\mathcal{N}$$

- ▶ Po vyloučení normovaného času  $\mathcal{T}$  dostaneme:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\mathcal{N}} = -\frac{\mathcal{N} - 1}{\mathcal{N}}$$

- ▶ Separujeme proměnné a řešíme za předpokladu, že na počátku je inverze populace  $\mathcal{N}_i$  a hustota fotonů  $\mathcal{J} = 0$ :

$$\mathcal{J} = \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$

- ▶ Z této rovnice lze určit špičkovou intenzitu  $\mathcal{J}_{max}$ , které je dosaženo v okamžiku, kdy  $\mathcal{N} = 1$  ( $d\mathcal{J}/d\mathcal{T} = 0$ ), tj.:

$$\mathcal{J}_{max} = \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1$$

- ▶ Po odnormování dostaneme pro maximální výstupní intenzitu (pro  $R \approx 1$ ):

$$I_{max} \doteq \mathcal{J}_{max} \frac{1 - R}{2} \frac{E_s}{\tau_c}$$

kde  $E_s = \hbar\omega/\kappa\sigma$  je saturační hustota energie (parametr aktivního prostředí)

# Analytické řešení rychlostních rovnic pro Q-spínaný laser

- ▶ Využijeme vztah pro intenzitu

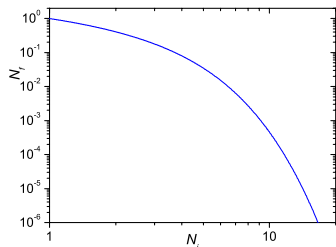
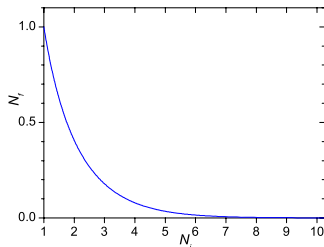
$$\mathcal{J} = \ln \mathcal{N} - \mathcal{N} + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$

- ▶ Určíme hodnotu inverze populace hladin  $\mathcal{N}_f$ , která se ustálí po vygenerování Q-spínaného impulsu, kdy  $\mathcal{J} = 0$ . Tehdy:

$$0 = \ln \mathcal{N}_f - \mathcal{N}_f + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$$

- ▶ ... a tedy:<sup>1</sup>

$$\mathcal{N}_f = -\text{LambertW}\left(-\frac{\mathcal{N}_i}{\exp \mathcal{N}_i}\right)$$



<sup>1</sup>Funkce  $W(x) = \text{LambertW}(x)$  je definována jako řešení transcendentní rovnice  $W(x) \exp[W(x)] = x$ .

- ▶ Celková normovaná energie v impulsu:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{J} dT = - \int_0^\infty \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{dT} dT = - \int_{\mathcal{N}_i}^{\mathcal{N}_f} \frac{d\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = \ln \frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}_f}$$

- ▶ ... nebo-li ( $0 = \ln \mathcal{N}_f - \mathcal{N}_f + \mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i$ )

$$\mathcal{E} = \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f$$

- ▶ Odnormování (pro  $R \approx 1$ ):

$$E = \frac{1-R}{2} SE_s (\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f)$$

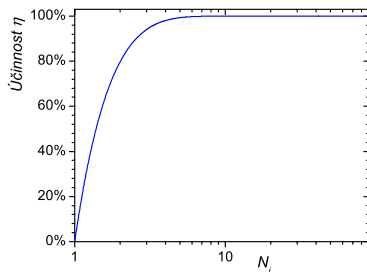
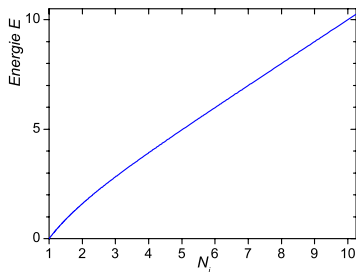
- ▶ kde  $S$  je plocha svazku,  $E_s$  je saturační hustota energie:

$$E_s = \frac{\hbar\omega}{\kappa\sigma}$$

- ▶ Součin  $SE_s$  udává maximální extrahovatelnou energii, která je tím vyšší, čím je menší účinný průřez pro stimulovanou emisi.
- ▶ Energie zjevně nezáleží na délce aktivního prostředí  $L_{ap}$ . Je však nutné s daným  $\sigma$  a  $\mathcal{N}_i$  dosáhnout prahu generace ( $1 \leq R \exp[2\sigma N_i L_{ap}]$ ).



## Energie Q-spínaného impulsu a účinnost konverze energie



$$\mathcal{E} = \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f, \quad \eta = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{N}_i} = 1 - \frac{\mathcal{N}_f}{\mathcal{N}_i}$$

- ▶ Účinnost konverze energie uložené v aktivním prostředí v podobě inverze populace hladin do energie laserového impulsu roste s rostoucím  $\mathcal{N}_i$

# Doba trvání Q-spínaného impulsu

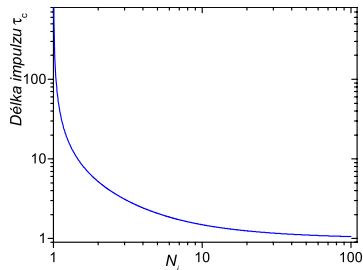
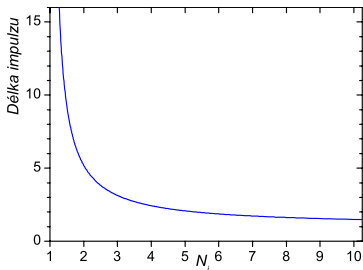
- ▶ Odhad doby trvání impulsu:

$$T_{imp} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}_{max}} = \frac{\mathcal{N}_i - \mathcal{N}_f}{\mathcal{N}_i - \ln \mathcal{N}_i - 1} \rightarrow 1 \quad \text{pro } \mathcal{N}_i \rightarrow \infty$$

- ▶ Oddnormování:

$$T_{imp} = \tau_c \mathcal{T}_{imp}$$

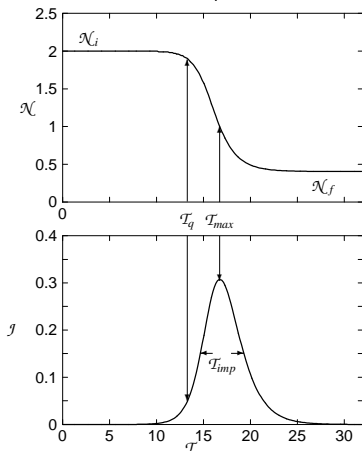
- ▶ Nejkratší impuls bude mít dobu trvání  $\tau_c$ .
- ▶ Délka impulsu v tomto přiblížení nezávisí na vlastnostech aktivního prostředí (kromě jeho vlivu na  $\tau_c$ ), jen na parametrech rezonátoru a dosažitelné relativní inverzi populace hladin.



## Doba vybudování Q-spínaného impulsu

- Doba  $\tau_q$  vybudování gigantického impulsu ze šumu  $\mathcal{I}_0$  lze spočítat za předpokladu, že se inverze populace hladin  $\mathcal{N}$  až do okamžiku, kdy je dosaženo  $\mathcal{I} = 1$ , prakticky nemění. Potom:

$$\tau_q = -\frac{\ln \mathcal{I}_0}{\mathcal{N}_i - 1}$$



## Závěry plynoucí z analytického modelu generace Q-spínaného impulsu

- ▶ Pro zvýšení účinnosti Q-spínání (maximalizace  $\mathcal{E}$ , minimalizace  $\mathcal{N}_i$ ) je třeba mít na počátku co nejvyšší hodnotu  $\mathcal{N}_i$ , tedy poměr  $N/N_0$ .  $\mathcal{N}_i$  pak určuje všechny parametry generovaného impulsu.
- ▶ S rostoucí hodnotou  $\mathcal{N}_i$  se délka impulsu zkracuje, ale nelze generovat impulsy kratší než je doba života fotonu v rezonátoru. S ohledem na přijatou aproximaci však současně musí být  $T_{imp} > \tau_R$ .
- ▶ V praxi je možné předpokládat (v případě, kdy čerpací rychlost není závislá na inverzi populace hladin), že  $\mathcal{N}_i$  je poměr čerpací energie (výkonu) použité při Q-spínání ku prahové energii (prahovém výkonu) laseru v režimu volné generace s otevřeným Q-spínačem.
- ▶ Pro nalezení tvaru impulsu je třeba řešit rychlostní rovnice numericky.

# Pomalé Q-spínání

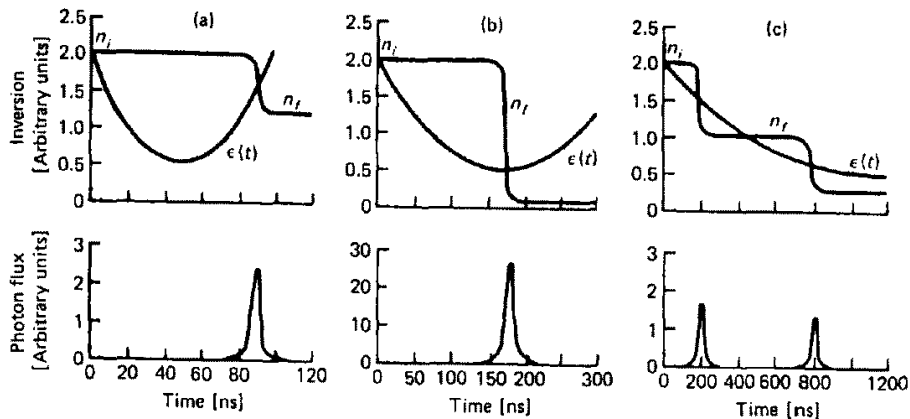


Fig. 8.3. Inversion, cavity losses, and pulse development as a function of time in a slow Q-switched system [8.6]

## Q-spínání saturevatelným absorbérem

- ▶ Saturevatelný absorbér je dvouhladinové médium se širokým absorpčním spektrem, jehož absorpční koeficient  $\beta$  závisí na intenzitě dopadajícího záření obdobně jako zisk zesilujícího prostředí

$$\beta(I) = \frac{\beta_0}{1 + I/I_S^a}.$$

- ▶ Transmittance saturevatelného absorbéroho tloušťky  $l_a$  je dána vztahem:

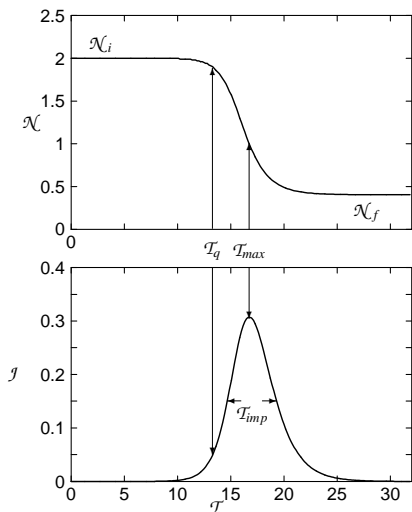
$$T(I) = \exp[-\beta(I)l_a], \quad T_0 \equiv T(0) = \exp[-\beta_0 l_a].$$

- ▶ Rychlost změny transmittance absorbéroho závisí na hodnotě saturační intenzity.
- ▶ Během krátké doby může dojít k úplné saturaci absorbéroho, takže se prahová hodnota inverze populace hladin sníží tak, jako by absorbér v rezonátoru nebyl přítomen.
- ▶ Pokud zanedbáme přechodový jev spojený se změnou ztrát absorbéroho, můžeme snadno odhadnout hodnotu  $\mathcal{N}_i$ :

$$\mathcal{N}_i = 1 + \frac{2 \ln T_0}{\ln R}.$$








- ▶ Lze odhadnout délku generovaného impulsu a účinnost extrakce energie
- ▶ V prvním přiblížení nebudou tyto parametry závislé na budící energii ani na použitém typu aktivního prostředí, ale pouze na hodnotě parametrů  $T_0$  a  $R$ .

- ▶ S pomocí intenzivního buzení je možné připravit na počátku laserové akce vysokou hodnotu  $\mathcal{N}_i$  za dobu kratší, než je doba nutná k vygenerování gigantického impulzu  $\mathcal{T}_q$ .
- ▶ Pokud bude buzení trvat po dobu několikanásobně delší, než je doba  $\mathcal{T}_q$ , bude na výstupu laseru generován sled impulzů podobný přechodovému jevu v režimu volné generace, s tím rozdílem, že intenzita generovaného záření bude podstatně vyšší, neboť se silně uplatňuje buzení mezi impulzy. Doba trvání prvního impulzu ve sledu je tím kratší, čím je rychlost buzení větší.
- ▶ Pokud vlastní budící impulz bude podstatně kratší než je doba  $\mathcal{T}_q$ , budou po jeho ukončení podmínky stejné jako po otevření Q-spínače a generace se bude řídit obdobnými zákony.



- ▶ Aproximace rychlostních rovnic pro laser s krátkým rezonátorem – dynamika laseru v režimu volné generace a Q-spínání
- ▶ Relaxační oscilace
- ▶ Q-spínání, spínání ziskem
  - ▶ Parametry impulzu určuje poměr počáteční a prahové inverze laseru  $\mathcal{N}_i = N/N_0$
  - ▶ Energie impulzu a špičkový výkon jsou úměrné saturační energii a  $\mathcal{N}_i$
  - ▶ Nejkratší délka generovaného impulzu odpovídá době života fotonu v rezonátoru
- ▶ Příště: Koherentní šíření impulzů (Soliton, samoindukovaná propustnost, fotonové echo)



-  SALEH, B. E. A.– TEICH, M. C.: *Základy fotoniky - 3.díl*, Matfyzpress, Praha, 1995 (<http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/fotonika/Fotonika-3-text.pdf>)
-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  LONČAR, G.: *Elektrodynamika I*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1990
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>